

# **SISTEMI DIGITALI DI CONTROLLO**

**Prof. Alessandro De Luca**

**DIS, Università di Roma “La Sapienza”**

**deluca@dis.uniroma1.it**

Lucidi tratti dal libro

**C. Bonivento, C. Melchiorri, R. Zanasi: “Sistemi di Controllo Digitale”**

**Capitolo 11: Regolatori standard**

Si ringraziano gli autori

- Struttura fissa dei regolatori digitali standard nella pratica industriale
  - discretizzazione di algoritmi analogici tipo PID
  - scelta del periodo di campionamento  $T$
  - tuning dei parametri
- Altri aspetti trattati
  - possibili configurazioni dell'algoritmo
  - compensazione di ritardi noti
  - passaggio bumpless manuale-automatico
  - schemi anti-windup
  - tuning automatico dei parametri
  - realizzazione in cascata
  - compensazione del disturbo

Discretizzazione del classico regolatore PID analogico (sull'ingresso di errore)

$$U(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s)$$

Usando l'integrazione rettangolare (di Eulero a sinistra) per il termine integrale e le differenze all'indietro per quello derivativo

- forma di posizione

$$u_n = K_p \left[ e_n + \frac{T}{T_i} \sum_{k=0}^n e_k + \frac{T_d}{T} (e_n - e_{n-1}) \right] + M_R$$

dove  $M_R$  è un termine di compensazione in avanti (ad es., del disturbo)

- forma di velocità

$$\Delta u_n = u_n - u_{n-1} = K_p \left[ e_n - e_{n-1} + \frac{T}{T_i} e_n + \frac{T_d}{T} (e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}) \right]$$

utile in situazioni di possibile saturazione dell'attuatore (non accumulo del termine integrale/di sommatoria)

Usando invece l'integrazione trapezoidale (metodo di Tustin)

- forma di posizione

$$u_n = K'_p \left[ e_n + \frac{T}{T'_i} \sum_{k=0}^n \frac{e_k + e_{k-1}}{2} + \frac{T'_d}{T} (e_n - e_{n-1}) \right] + M_R$$

- forma di velocità

$$\Delta u_n = K'_p \left[ e_n - e_{n-1} + \frac{T}{2T'_i} (e_n + e_{n-1}) + \frac{T'_d}{T} (e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}) \right]$$

Una forma di algoritmo particolarmente utilizzata in pratica

- termine derivativo in forma 'realizzabile'  $\frac{T_d s}{1 + T_d s/N}$  con  $N$  tra 3 e 10
- parte integrale con 'differenze in avanti'
- parte derivativa con 'differenze all'indietro'

$$D_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left[ 1 + \frac{T}{T_i(z-1)} + \frac{T_d}{T + T_d/N} \frac{z-1}{[z - T_d/(NT + T_d)]} \right]$$

Con le posizioni

$$\alpha = \frac{T}{T_i} \quad \beta = \frac{NT_d}{(NT + T_d)} \quad \gamma = \frac{T_d}{(NT + T_d)}$$

$$q_0 = K_p(1 + \beta) \quad q_1 = -K_p(1 + \gamma - \alpha + 2\beta) \quad q_2 = K_p(\gamma - \alpha\gamma + \beta)$$

quest'ultimo regolatore si può riscrivere come

$$D_{PID}(z) = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{(z - 1)(z - \gamma)}$$

Ponendo allora

$$R = (z - 1)(z - \gamma) \quad T = S = q_0 z^2 + q_1 z + q_2$$

il regolatore risulta quindi del tipo polinomiale (già incontrato nei metodi analitici)

$$Ru = Tv - Sy$$

## Scelta del passo di campionamento

Si effettua come al solito

- in base alla banda passante  $B_{-3}$  desiderata ad anello chiuso
- in pratica, la frequenza di campionamento è spesso scelta come

$$f_c = \frac{1}{T} \simeq 10 B_{-3} \quad (\text{banda espressa in Hertz})$$

Il tuning si effettua in due fasi:

- 1) calcolo dei parametri in base a semplici modelli standard del processo e uso di criteri di ottimizzazione della risposta
- 2) messa a punto sul campo

Una volta scelto  $T$ , i criteri usati nella prima fase si differenziano in due categorie:

- a) quelli che utilizzano alcuni punti caratteristici della risposta indiciale  $y(t)$  per imporre l'andamento transitorio desiderato  
ad es., imponendo un dato rapporto di smorzamento tra due picchi della risposta (tipicamente 0.25)
- b) criteri di tipo integrale sulla risposta di errore

$$ISE = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt \quad AE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

ISE = Integral Square Error, IAE = Integral Absolute Error, ITAE= Integral Time Absolute Error

## Tuning dei parametri – 2

Nel caso di criteri della categoria a), esistono tabelle di riferimento per il tuning dei parametri dei regolatori PID **analogici**

Tipo	Ziegler-Nichols	Cohen-Coon	3C
<i>P</i>	$K K_p = (\theta/\tau)^{-1}$	$K K_p = (\theta/\tau)^{-1} + 0.333$	$K K_p = 1.208(\theta/\tau)^{-0.956}$
<i>PI</i>	$K K_p = 0.9(\theta/\tau)^{-1}$ $T_i/\tau = 3.33(\theta/\tau)$	$K K_p = 0.9(\theta/\tau)^{-1} + 0.082$ $T_i/\tau = \frac{3.33(\theta/\tau)[1+(\theta/\tau)/11]}{1+2.2(\theta/\tau)}$	$K K_p = 0.928(\theta/\tau)^{-0.946}$ $T_i/\tau = 0.928(\theta/\tau)^{0.583}$
<i>PID</i>	$K K_p = 1.2(\theta/\tau)^{-1}$ $T_i/\tau = 2(\theta/\tau)$ $T_d/\tau = 0.5(\theta/\tau)$	$K K_p = 1.35(\theta/\tau)^{-1} + 0.27$ $T_i/\tau = \frac{2.5(\theta/\tau)[1+(\theta/\tau)/5]}{1+0.6(\theta/\tau)}$ $T_d/\tau = \frac{0.37(\theta/\tau)}{1+0.2(\theta/\tau)}$	$K K_p = 1.37(\theta/\tau)^{-0.95}$ $T_i/\tau = 0.74(\theta/\tau)^{0.738}$ $T_d/\tau = 0.365(\theta/\tau)^{0.95}$

con  $K$ ,  $\theta$  e  $\tau$  parametri di un modello standard del processo (individuati eventualmente in modo grafico, vedi Appendice B)

## Tuning dei parametri – 3

### Modello standard del sistema

(fornisce una risposta a gradino unitario qualitativamente simile a quella del processo reale)

$$G_p(s) = K \frac{e^{-\theta s}}{1 + \tau s}$$

Nel caso **digitale**, si approssima la presenza del campionatore e del ricostruttore di ordine zero con un ritardo pari a  $T/2$  e si pone nelle tabelle precedenti

$$\theta \longrightarrow \theta' = \theta + \frac{T}{2} \quad \frac{\theta'}{\tau} \begin{array}{l} \nearrow K K_p \\ \longrightarrow \frac{T_i}{\tau} \\ \searrow \frac{T_d}{\tau} \end{array}$$

Si ricavano quindi  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$

## Esempio di tuning dei parametri con Ziegler-Nichols – 1

Sia il sistema da controllare

$$G(s) = \frac{1}{(0.5s + 1)(s + 1)^2(2s + 1)}$$

Esso è approssimabile con un modello della forma standard mediante un'analisi grafica della risposta al gradino (qui, con la tecnica di Miller – vedi Appendice B)

$$G_m(s) = \frac{e^{-1.46s}}{1 + 3.34s} \quad (K = 1, \theta = 1.46 \text{ s}, \tau = 3.34 \text{ s})$$

Si vuole progettare un regolatore PID con  $T = 0.3 \text{ s}$

- $\theta' = \theta + T/2 = 1.46 + 0.15 = 1.61$        $\theta' / \tau = 0.482$
- dalla tabella di Ziegler-Nichols si ha

$$K K_p = 2.4894 \quad \frac{T_i}{\tau} = 0.9641 \quad \frac{T_d}{\tau} = 0.241$$

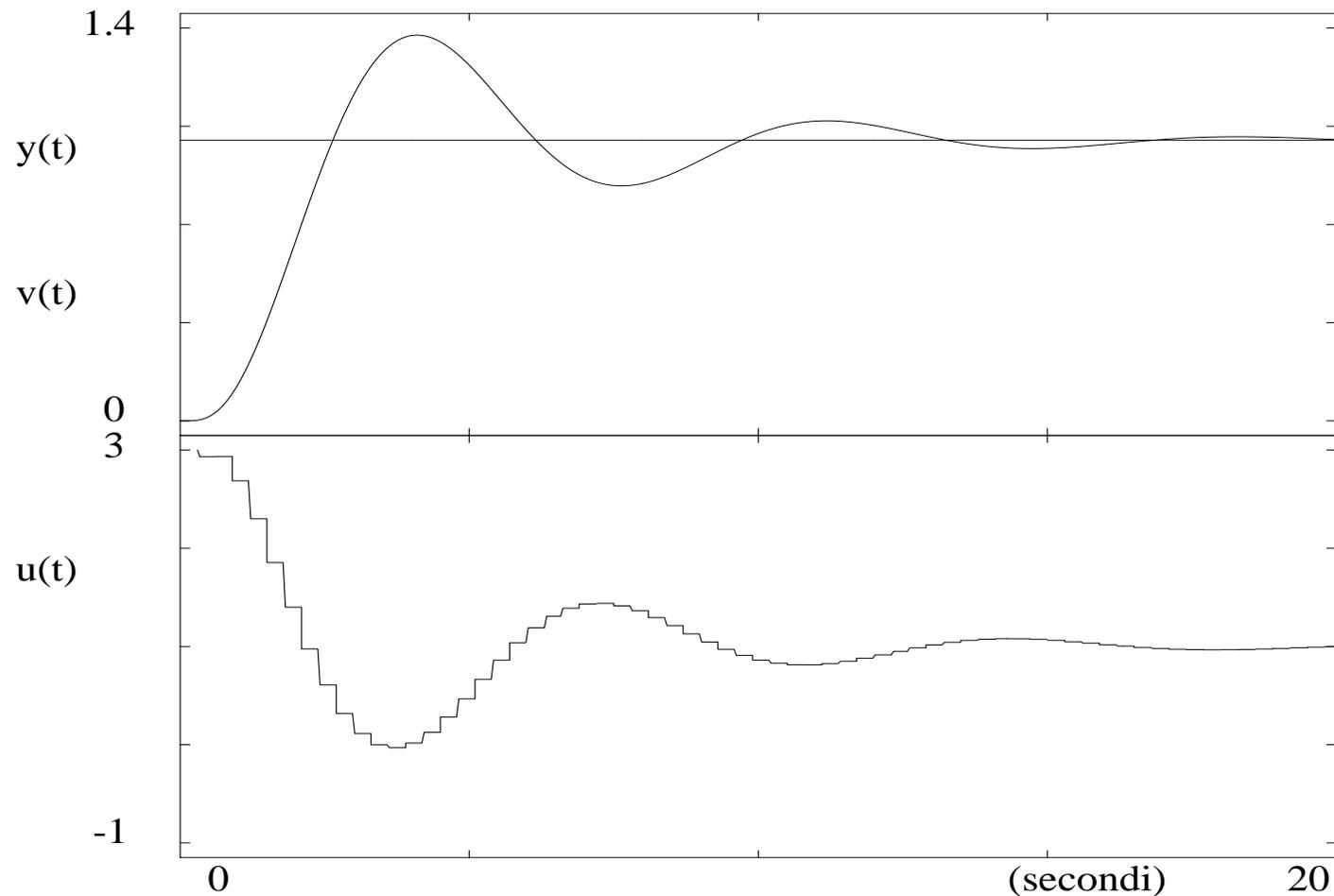
da cui si ottengono i parametri

$$K_p = 2.4894 \quad T_i = 0.9641 \tau = 3.22 \quad T_d = 0.241 \tau = 0.805$$

## Esempio di tuning dei parametri con Ziegler-Nichols – 2

Mediante discretizzazione rettangolare si ottiene il regolatore (scritto in potenze di  $z^{-1}$ )

$$D_{PID}(z) = K_p \left[ 1 + \frac{T}{T_i(1 - z^{-1})} + \frac{T_d}{T}(1 - z^{-1}) \right]$$



Nel caso di criteri della categoria b) (ossia integrali), il progetto dei regolatori PID analogici procede nel modo seguente:

- si sceglie il criterio ( $IAE$ ,  $ISE$  o  $ITAE$ )
- si sceglie il tipo di controllore ( $P$ ,  $PI$  o  $PID$ )
- si sceglie l'azione di controllo ( $P$ ,  $I$  o  $D$ )
- in corrispondenza alle scelte fatte, esistono anche qui tabelle che forniscono due parametri  $A$  e  $B$  da usare per generare un valore  $Y$

$$Y = A \left( \frac{\theta}{\tau} \right)^B \quad \left[ \text{oppure} \quad Y = A + B \left( \frac{\theta}{\tau} \right) \right]$$

la cui interpretazione è poi

- $Y = K K_p$  nel caso di azione proporzionale  $P$
- $Y = \tau/T_i$  nel caso di azione integrale  $I$
- $Y = T_d/\tau$  nel caso di azione derivativa  $D$

Anche qui, nella versione digitale occorre operare la sostituzione  $\theta \rightarrow \theta' = \theta + T/2$

## Tuning dei parametri – 5

Le tabelle di riferimento nel caso di criteri integrali si distinguono in funzione del principale problema di controllo affrontato nel progetto

Variazione di set point				
<i>Criterio</i>	<i>Controllore</i>	<i>Azione</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>IAE</i>	<i>PI</i>	<i>P</i>	0.758	-0.861
		<i>I*</i>	1.020	-0.323
<i>ITAE</i>	<i>PI</i>	<i>P</i>	0.586	-0.916
		<i>I*</i>	1.030	-0.165
<i>IAE</i>	<i>PID</i>	<i>P</i>	1.086	-0.869
		<i>I*</i>	0.740	-0.130
		<i>D</i>	0.348	+0.914
<i>ITAE</i>	<i>PID</i>	<i>P</i>	0.965	-0.855
		<i>I*</i>	0.796	-0.147
		<i>D</i>	0.308	+0.929

\* In questo caso si deve utilizzare  $Y = A + B(\theta/\tau)$

Variazione di carico				
<i>Criterio</i>	<i>Controllore</i>	<i>Azione</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>IAE</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	0.902	-0.985
<i>ISE</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	1.141	-0.917
<i>ITAE</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	0.490	-1.084
<i>IAE</i>	<i>PI</i>	<i>P</i>	0.984	-0.986
		<i>I</i>	0.608	-0.707
<i>ISE</i>	<i>PI</i>	<i>P</i>	1.305	-0.959
		<i>I</i>	0.492	-0.739
<i>ITAE</i>	<i>PI</i>	<i>P</i>	0.859	-0.977
		<i>I</i>	0.674	-0.680
<i>IAE</i>	<i>PID</i>	<i>P</i>	1.435	-0.921
		<i>I</i>	0.878	-0.749
		<i>D</i>	0.482	+1.137
<i>ISE</i>	<i>PID</i>	<i>P</i>	1.495	-0.945
		<i>I</i>	1.101	-0.771
		<i>D</i>	0.560	+1.006
<i>ITAE</i>	<i>PID</i>	<i>P</i>	1.357	-0.947
		<i>I</i>	0.842	-0.738
		<i>D</i>	0.381	+0.995

## Esempio di tuning dei parametri con criterio ITAE – 1

Si consideri di nuovo

$$G(s) = \frac{1}{(0.5s + 1)(s + 1)^2(2s + 1)}$$

e il suo modello nella forma standard ( $K = 1, \theta = 1.46 \text{ s}, \tau = 3.34 \text{ s}$ )

$$G_m(s) = \frac{e^{-1.46s}}{1 + 3.34s}$$

Si vuole progettare un regolatore  $PI$  con il criterio ITAE per variazioni di set point

Dalla tabella relativa, con  $T = 0.3 \text{ s}$  e  $\theta' = \theta + T/2 = 1.61$

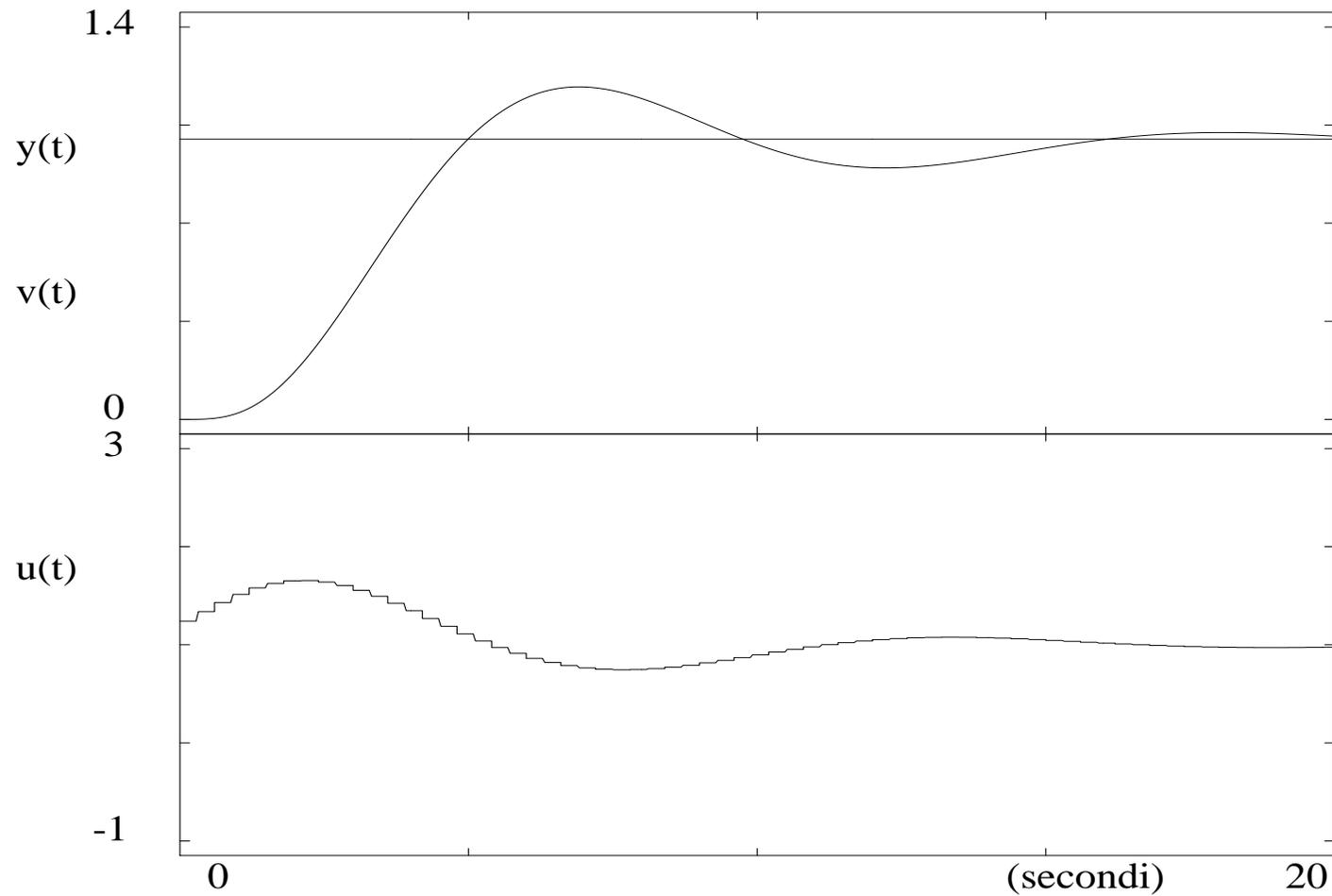
$$K K_p = A \left( \frac{\theta'}{\tau} \right)^B = 0.586 \left( \frac{\theta'}{\tau} \right)^{-0.916} = 1.143 (= Y)$$

$$\tau/T_i = A + B \left( \frac{\theta'}{\tau} \right) = 1.030 - 0.165 \left( \frac{\theta'}{\tau} \right) = 0.95 (= Y)$$

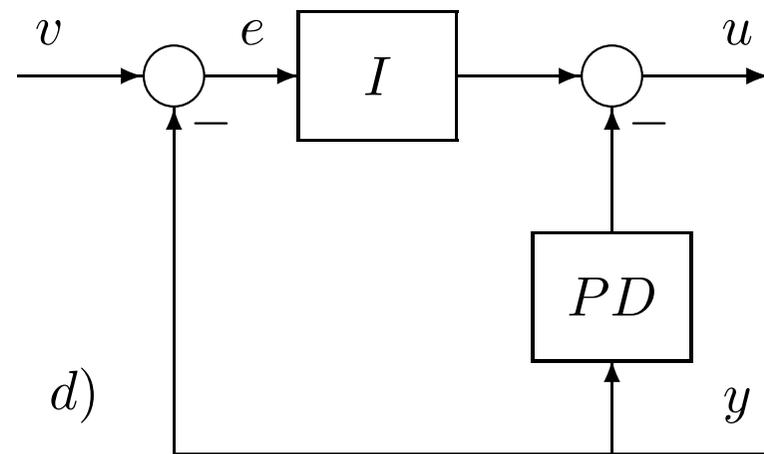
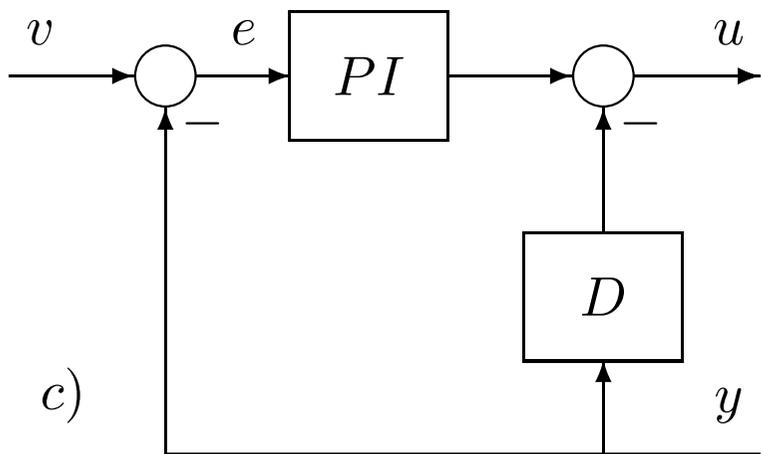
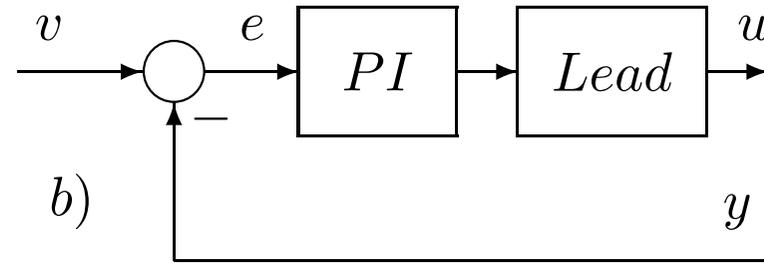
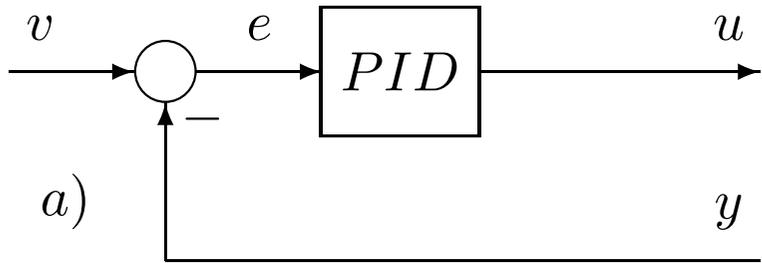
da cui si ottiene  $K_p = 1.143, T_i = 3.514$

## Esempio di tuning dei parametri con criterio ITAE – 2

Dopo una discretizzazione rettangolare del controllore PI così ottenuto, si ha il seguente comportamento



# Possibili configurazioni PID – 1



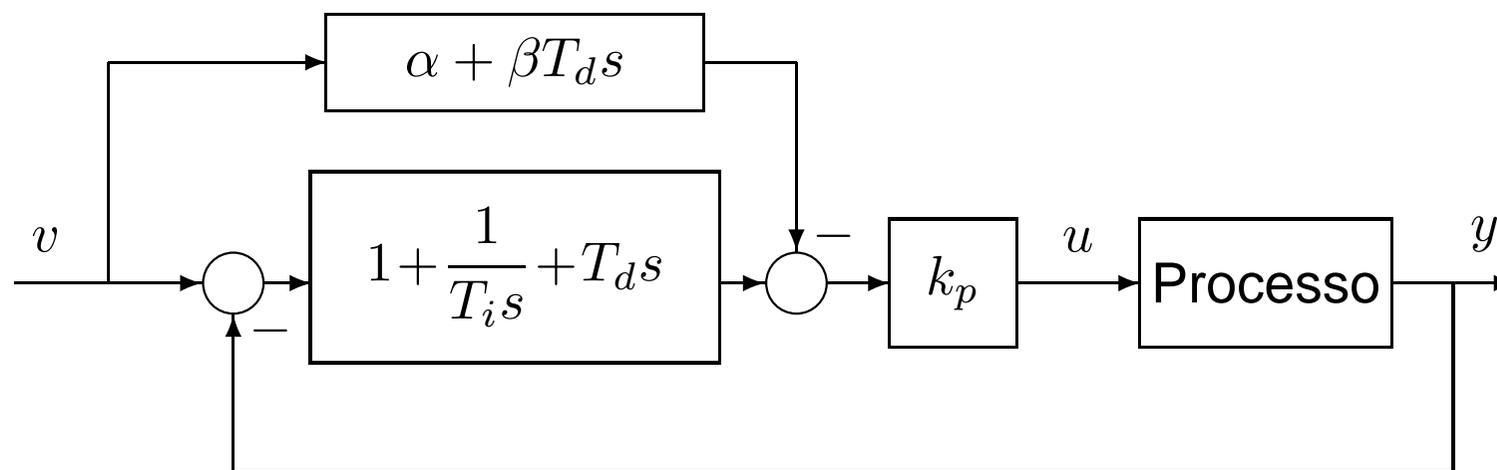
ogni variante rispetto alla struttura base a) risponde a specifiche esigenze pratiche

In particolare:

- la configurazione  $b)$  è una realizzazione di  $a)$  che sfrutta aspetti frequenziali del progetto con rete anticipatrice
- la configurazione  $c)$  evita di derivare le variazioni a gradino del riferimento (tipicamente costante a tratti) che generano in  $a)$  o  $b)$  impulsi inutili/dannosi
- la configurazione  $d)$  permette di attenuare ampi salti dell'uscita del regolatore per brusche variazioni del riferimento  
(alternativamente, si può operare uno 'shaping' del set point distribuendo la variazione totale su più passi di campionamento)

## Possibili configurazioni PID – 3

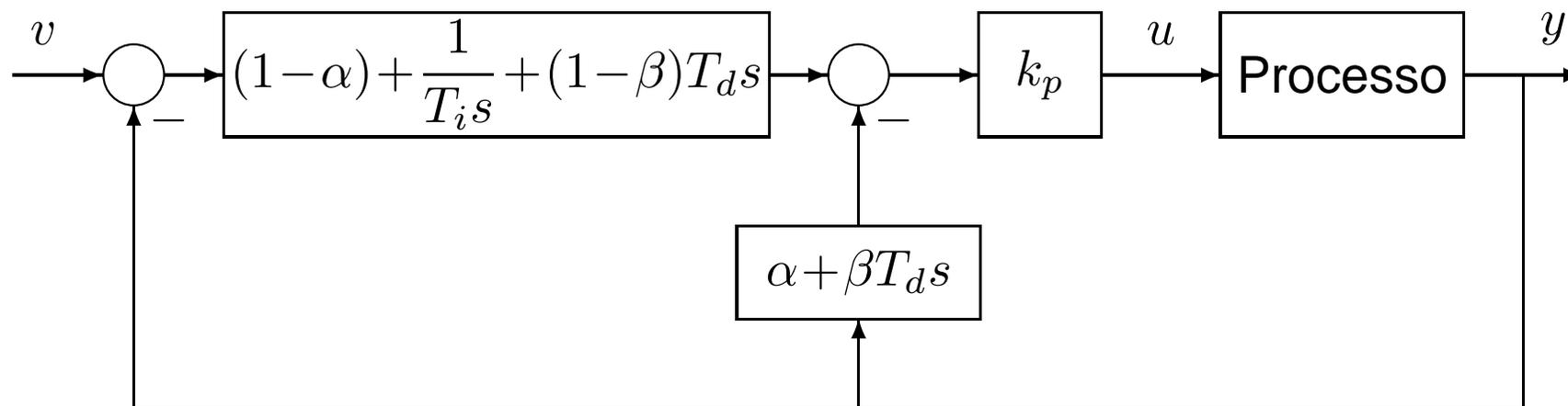
Struttura generale del regolatore PID a due gradi di libertà (i parametri  $\alpha$  e  $\beta$ ), con azione di feedback (dall'errore) e di feedforward (dal riferimento)



Ovviamente questo schema analogico va al solito discretizzato per ottenere un regolatore digitale

## Possibili configurazioni PID – 4

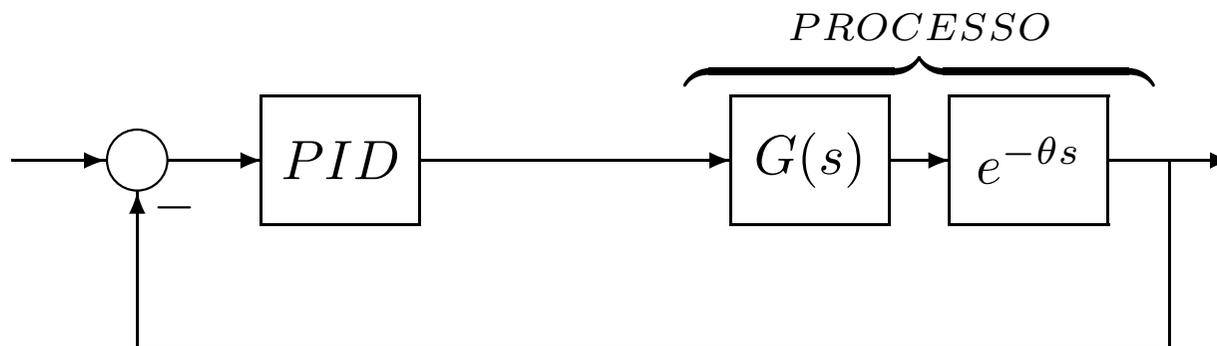
Schema equivalente al precedente, con solo azioni in feedback (dall'uscita misurata e dall'errore)



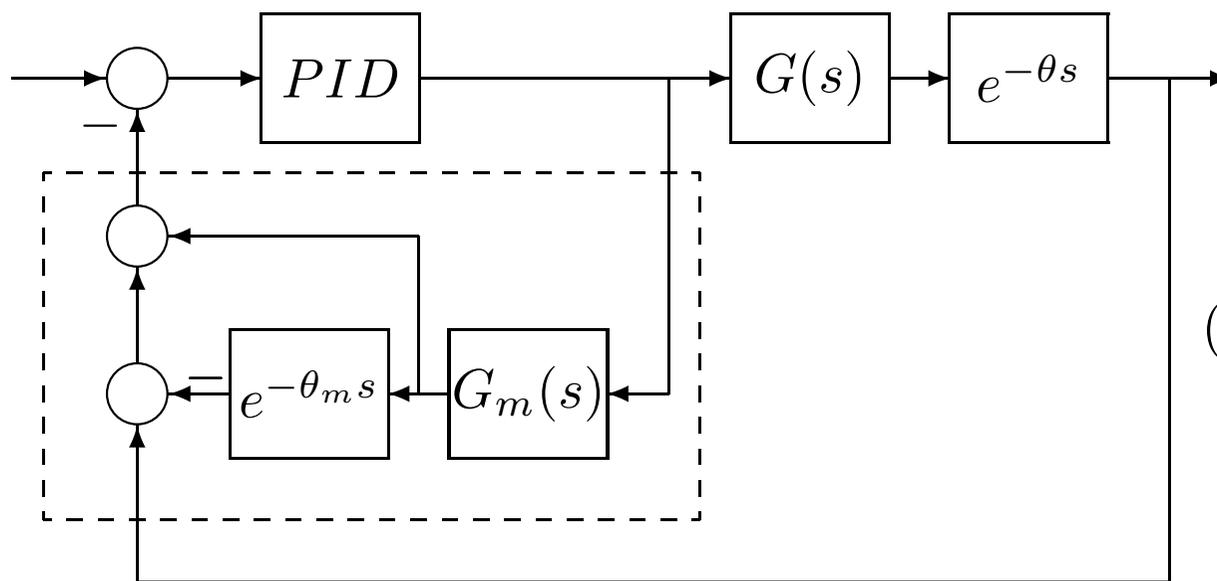
Si ritrovano le configurazioni precedenti:

- per  $\alpha = 0, \beta = 0$  si ha la configurazione *a*)
- per  $\alpha = 0, \beta = 1$  si ha la configurazione *c*)
- per  $\alpha = 1, \beta = 1$  si ha la configurazione *d*)
- sono possibili anche situazioni intermedie con valori di  $\alpha$  e  $\beta$  compresi tra 0 e 1

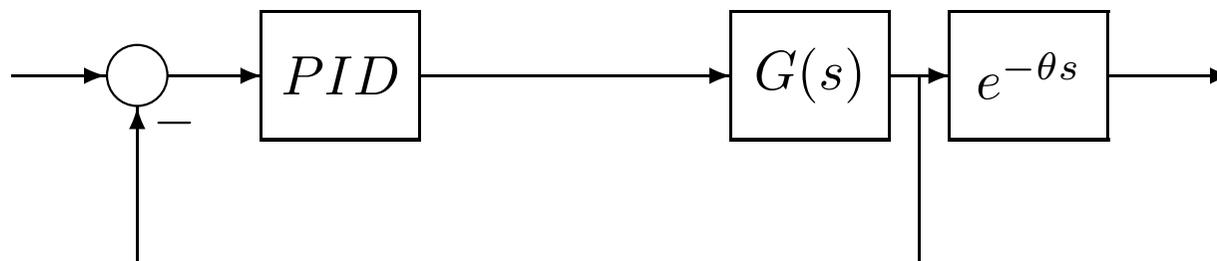
# Compensazione di ritardi noti



(a) con ritardo finito  $\theta$



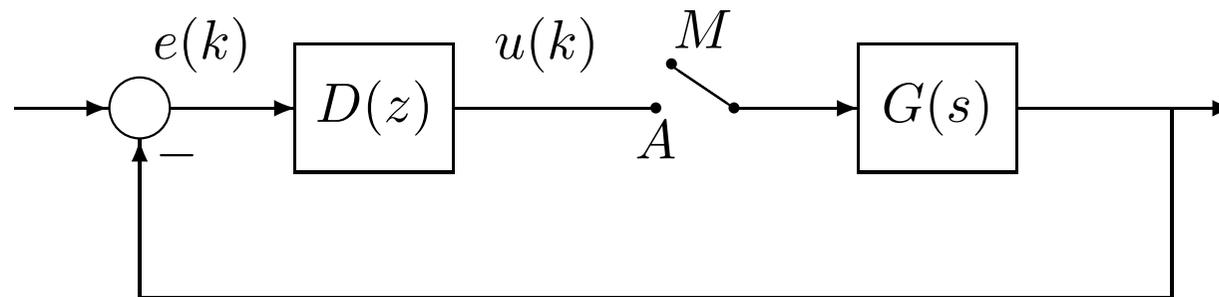
(b) uso dello Smith predictor



(c) ... nel caso ideale

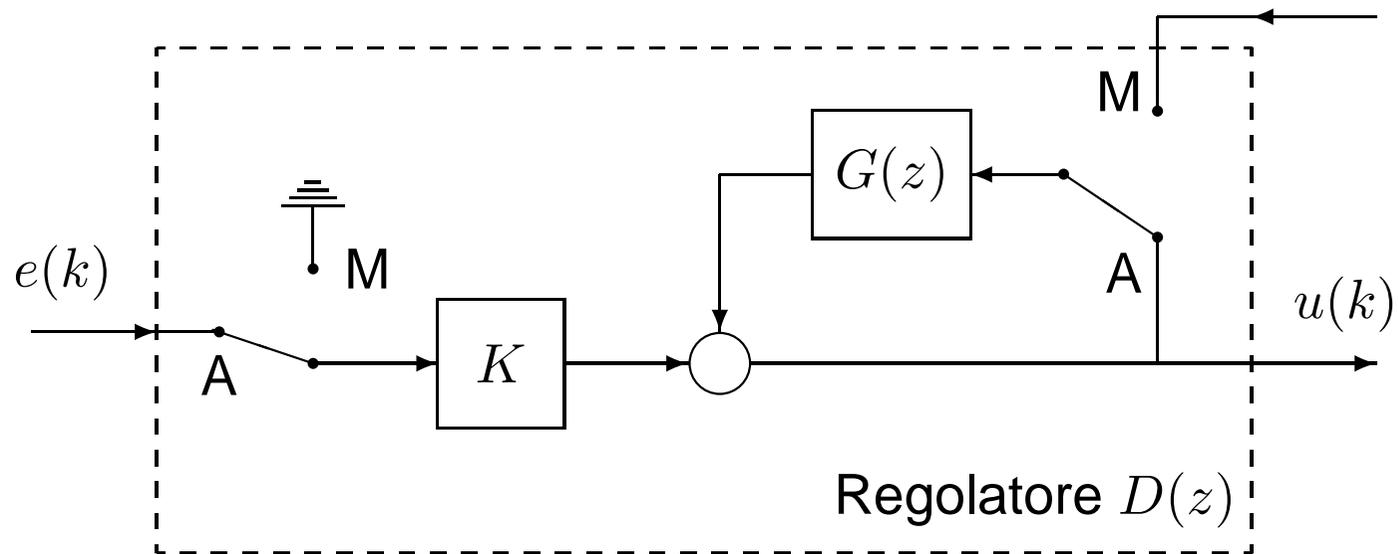
## Passaggio bumpless manuale/automatico – 1

- in alcune situazioni (industriali) è opportuno prevedere una doppia modalità di controllo dell'impianto, **automatica** e **manuale**
- in quella manuale, il riferimento è fissato da un operatore
- lo schema di base è (deviatore su  $M$  = manuale, su  $A$  = automatico)



- problemi di 'salto' di  $u(k)$  al passaggio  $M \rightarrow A$ , in presenza di un'azione integrale nel regolatore automatico  $D(z)$  (che è quindi un sistema dinamico con un proprio stato interno)
- data una  $D(z)$ , sia un regolatore PID che un altro controllore con azione integrale (polo in  $z = 1$ ), è possibile ottenere un passaggio bumpless con opportune modifiche realizzative della  $D(z)$

## Passaggio bumpless manuale/automatico – 2



Lo schema realizzativo bumpless deve avere, per il modo **manuale**

1.  $G(1) = 1$
2.  $G(z)$  stabile

e per il modo **automatico**

3.  $D(z) = \frac{K}{1 - G(z)} =$  (qui per un regolatore PID)  $= \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{(z - 1)(z - \gamma)}$
4.  $G(z)$  deve contenere un fattore  $z^{-1}$  (esclude la presenza di un loop algebrico nello schema)

Dal vincolo 3 si ricava

$$G(z) = \frac{D(z) - K}{D(z)} = 1 - \frac{K}{D(z)}$$

Se  $D(z)$  ha un polo in  $z = 1$  (azione integrale),  $D(1) = \infty$  e  $G(1) = 1$  è soddisfatta  $\forall K$ .

Posto

$$D(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{b_0 + B_1(z^{-1})z^{-1}}{a_0 + A_1(z^{-1})z^{-1}}$$

si ha

$$G(z) = \frac{B(z^{-1}) - K A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{b_0 - K a_0 + [B_1(z^{-1}) - K A_1(z^{-1})]z^{-1}}{B(z^{-1})}$$

Il polinomio  $B(z^{-1})$  deve avere radici (zeri di  $D(z)$ ) interni al cerchio unitario (vincolo 2)

Il valore  $K = \frac{b_0}{a_0}$  soddisfa il vincolo 4, da cui

$$G(z) = \frac{B_1(z^{-1}) - \frac{b_0}{a_0} A_1(z^{-1})}{B(z^{-1})} z^{-1}$$

## Esempio di costruzione per il passaggio bumpless – 1

Il regolatore digitale (progettato per il processo della slide 10)

$$D(z) = \frac{1.513 (1 - 0.741 z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.392 z^{-1})}$$

si può riscrivere come

$$D(z) = \frac{1.513 - 1.121 z^{-1}}{1 + (-0.608 - 0.392 z^{-1})z^{-1}} = \frac{b_0 + B_1(z^{-1})z^{-1}}{a_0 + A_1(z^{-1})z^{-1}}$$

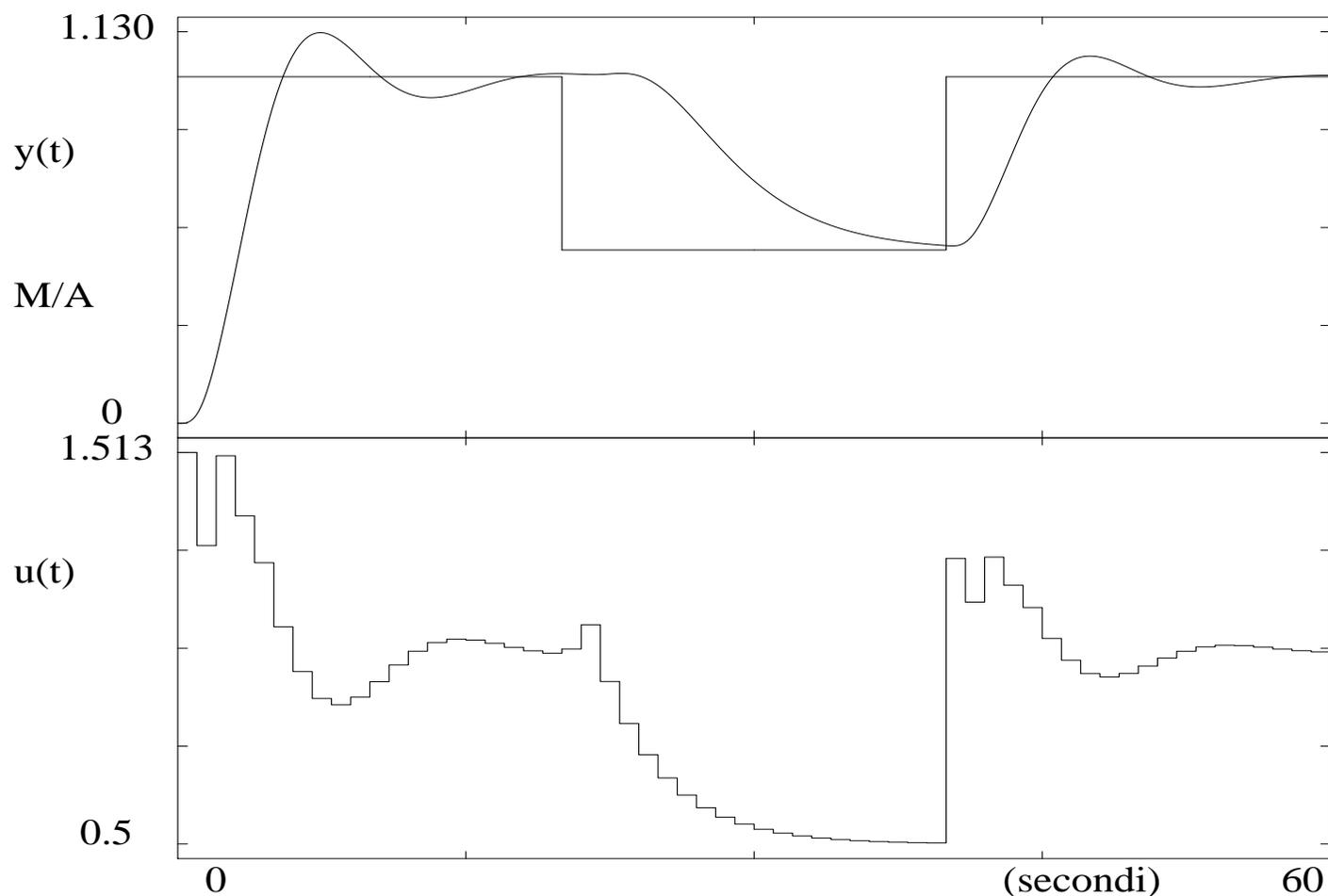
dove

$$b_0 = 1.513 \quad a_0 = 1 \quad B_1(z^{-1}) = -1.121 \quad A_1(z^{-1}) = -0.608 - 0.392 z^{-1}$$

da cui  $K = \frac{b_0}{a_0} = 1.513$  e quindi

$$G(z) = \frac{-1.121 - 1.513 (-0.608 - 0.392 z^{-1})}{1.513 - 1.121 z^{-1}} z^{-1} = \frac{(-0.201 + 0.392 z^{-1}) z^{-1}}{1.513 - 1.121 z^{-1}}$$

## Esempio di costruzione per il passaggio bumpless – 2

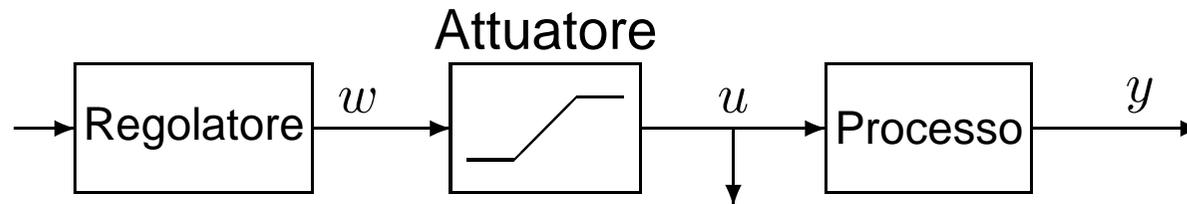


Per  $0 \leq t < 20$  s e per  $40 \leq t < 60$  s, si ha modo “automatico” (ad anello chiuso, con  $r(t) = 1$ ); per  $20 \leq t < 40$  s, si ha modo “manuale” (ad anello aperto, con  $r_m(t) = 0.5$ )

Esistono altri schemi di trasferimento bumpless (vedi p. 263 del testo) che migliorano il transitorio  $A \rightarrow M$

## Schemi di antisaturazione (anti-windup) – 1

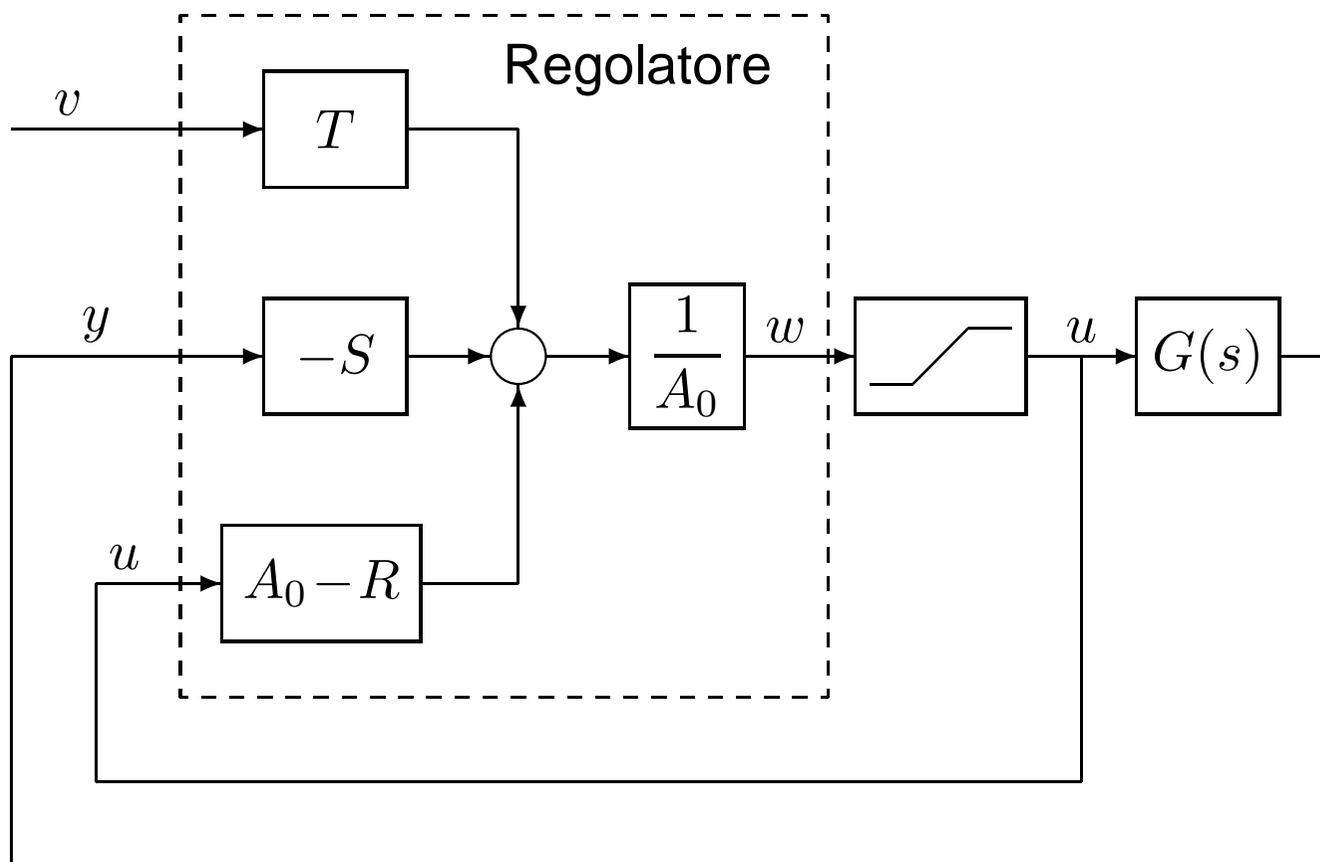
- i dispositivi di attuazione (che devono realizzare il comando di controllo) presentano in realtà saturazioni
- è opportuno evitare che il regolatore continui ad integrare l'errore (fenomeno del **windup**) quando la variabile di controllo satura
- se l'azione integrale si 'carica' eccessivamente, richiedere molto tempo per tornare a valori normali (lunghi transitori)
- il fenomeno di windup è presente solo nella forma 'in posizione' dell'algoritmo (nella forma in velocità non è presente una sommatoria ... )



Per ottenere uno schema automatico anti-windup, assumiamo disponibile la misura della 'posizione' dell'attuatore, o una sua stima basata su un semplice modello algebrico dell'attuatore stesso

## Schemi di antisaturazione (anti-windup) – 2

Uno schema di antisaturazione (con  $A_0(z)$  polinomio strettamente stabile) è allora



$$A_0 w = T v - S y + (A_0 - R) u$$
$$u = \text{sat}(w)$$

$$\text{sat}(w) = \begin{cases} u_L & w < u_L \\ w & u_L \leq w \leq u_H \\ u_H & w > u_H \end{cases}$$

## Schemi di antisaturazione (anti-windup) – 3

$$\begin{cases} A_0 w &= T v - S y + (A_0 - R) u \\ u &= \text{sat}(w) \end{cases}$$

- in assenza di saturazione ( $w(k) = u(k)$ ), si ha il regolatore nominale

$$A_0 u = T v - S y + (A_0 - R) \quad \rightarrow \quad u = \frac{T}{R} v - \frac{S}{R} y$$

- se il processo  $G(s)$  è stabile, la  $w$  rimane comunque limitata (in quanto uscita di un sistema stabile con ingressi limitati)

Si consideri un regolatore PID (con tutte le azioni sull'errore)

$$D(z) = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{(z-1)(z-\gamma)} \quad R = (z-1)(z-\gamma) = z^2 - (\gamma+1)z + \gamma$$
$$S = T = q_0 z^2 + q_1 z + q_2$$

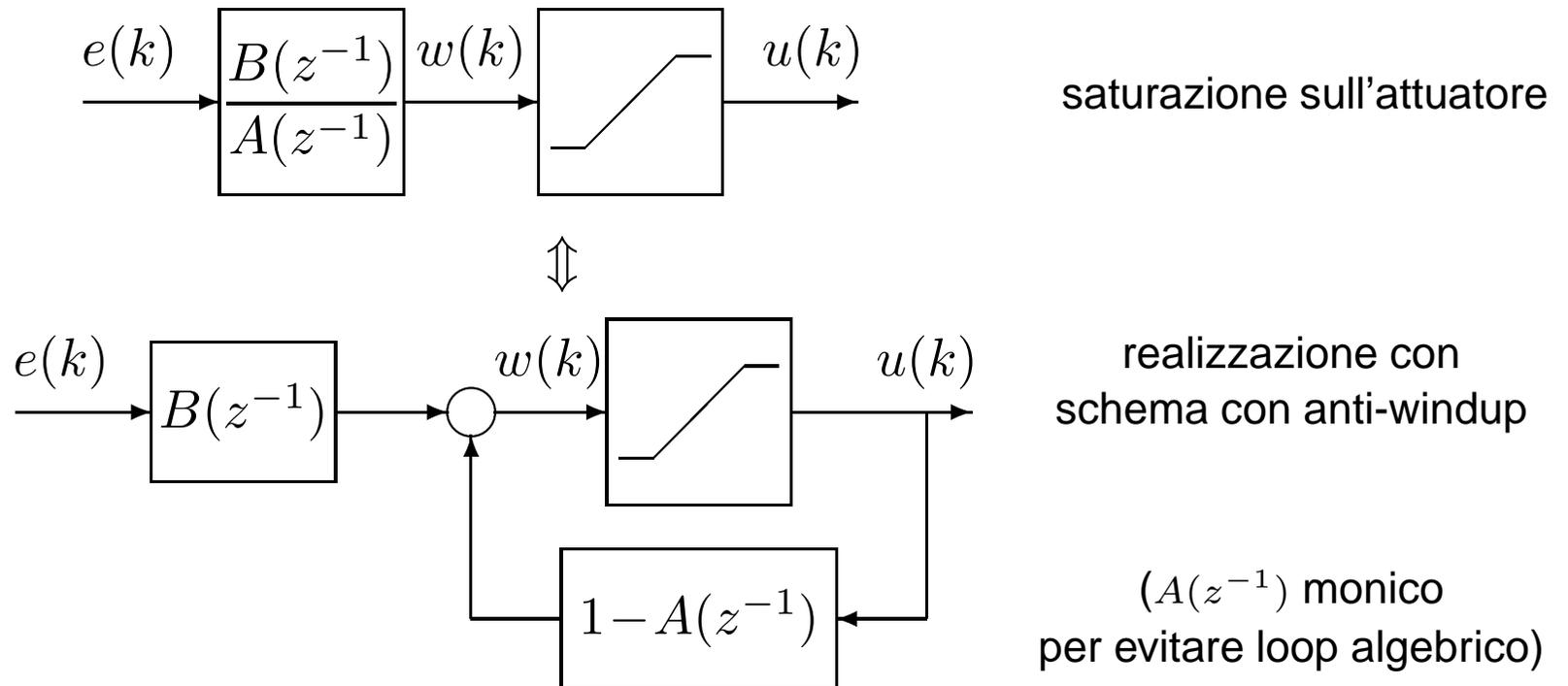
per cui  $A_0 w = (q_0 z^2 + q_1 z + q_2)e + [A_0 - z^2 + (\gamma+1)z - \gamma] u$ . Posto, ad es.,  $A_0 = z^2$

$$\begin{cases} w(k) &= q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) + (\gamma+1)u(k-1) - \gamma u(k-2) \\ u(k) &= \text{sat}(w(k)) \end{cases}$$

# Schemi di antisaturazione (anti-windup) – 4

La scelta particolare  $A_0 = z^n$  (come nell'esempio del PID) fornisce nello schema generale

$$B(z^{-1}) = \frac{T(z)}{z^n} = \frac{S(z)}{z^n} \quad A(z^{-1}) = \frac{R(z)}{z^n} \quad \rightarrow \quad D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

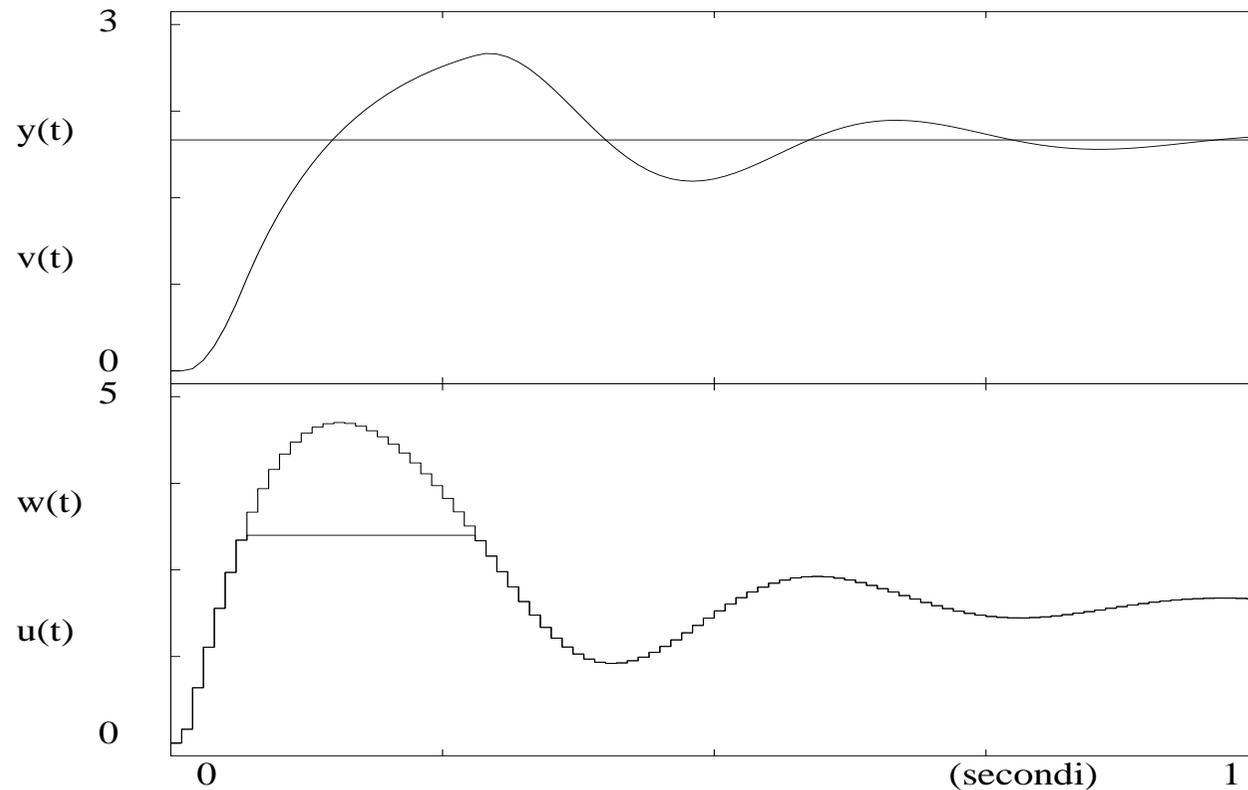


$$\begin{cases} w(k) = B(z^{-1})e(k) + [1 - A(z^{-1})]u(k) \\ u(k) = \text{sat}[w(k)] \end{cases}$$

## Esempio di anti-windup

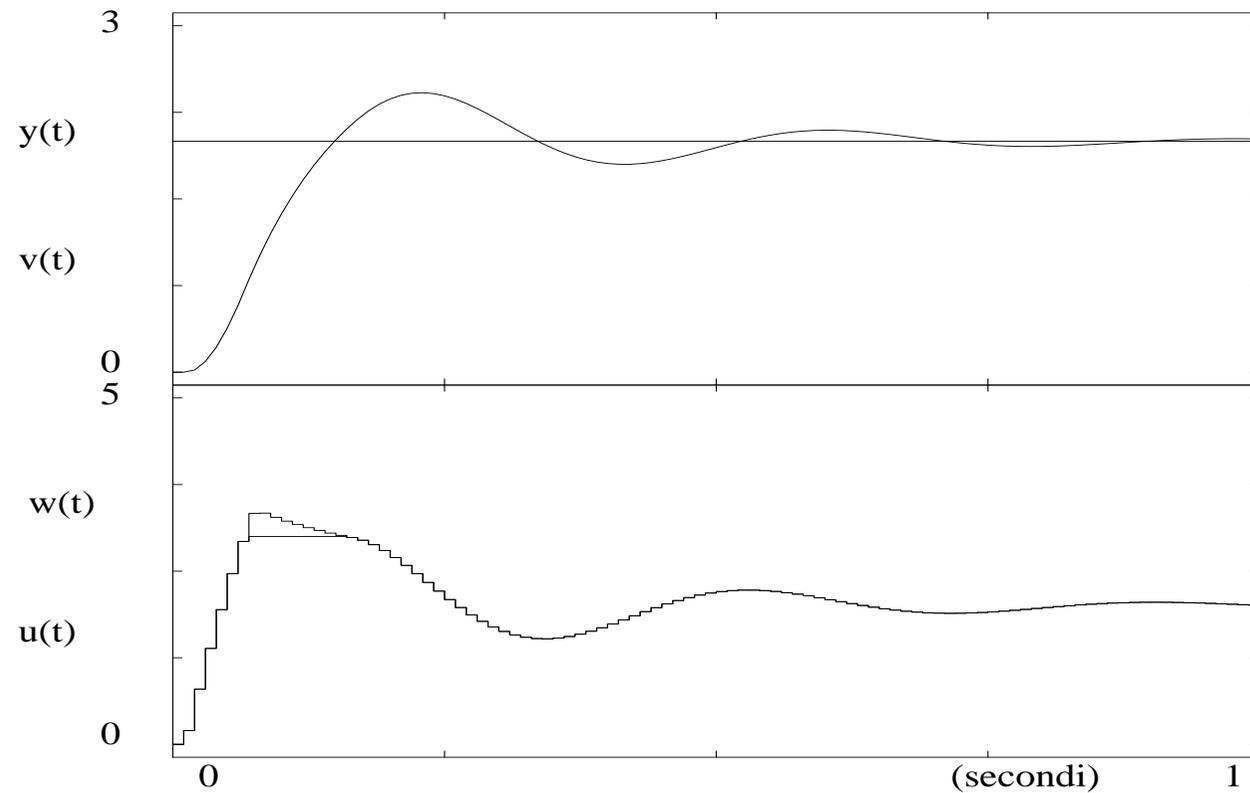
Per il sistema  $G(s) = \frac{1}{1 + 0.1s}$  con il regolatore digitale  $D(z) = \frac{0.1 + 0.2z^{-1}}{1 - z^{-1}}$  per un set point  $v = 2$

in presenza di saturazione  $u(k) \in [-3, +3]$  e **senza** dispositivo di anti-windup si ha



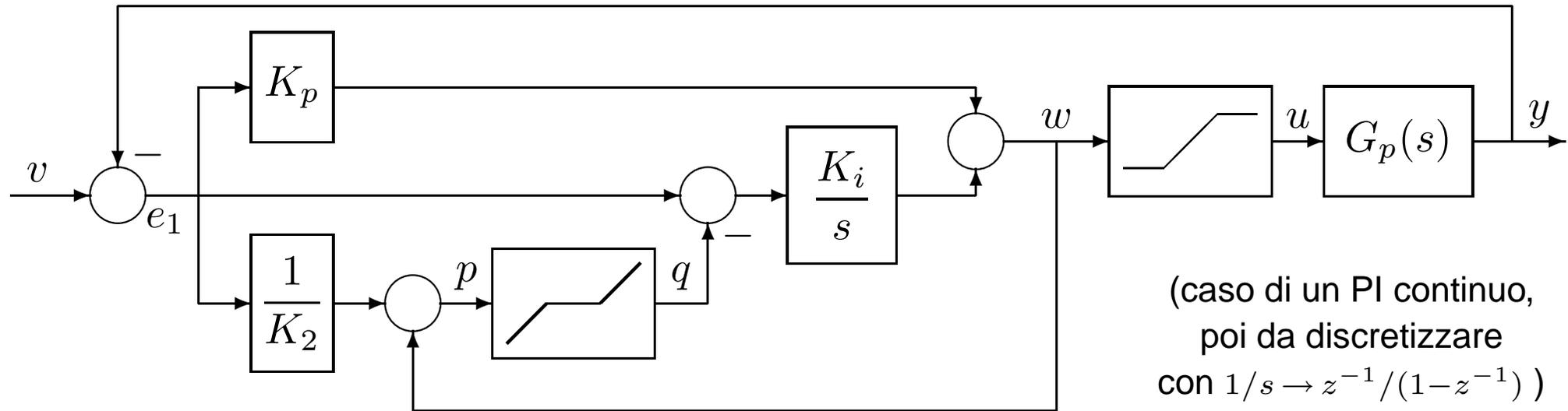
## Esempio di anti-windup (cont)

Adottando lo schema **anti-windup** (con saturazione retroazionata) si ottiene invece



## Schemi di antisaturazione (anti-windup) – 5

Uno schema di anti-windup che **non richiede la misura (o un modello) del comando  $u$  saturato** ma di fissare un limite superiore e inferiore al termine integrale è il seguente



$$q(p) = \begin{cases} K_2(p - u_H) & p > u_H \\ 0 & u_L \leq p \leq u_H \\ K_2(p - u_L) & p < u_L \end{cases} \quad \text{comportamento } \text{dead-zone}$$

## Schemi di antisaturazione (anti-windup) – 6

Analisi dello schema anti-windup con dead-zone

La variabile  $w$  (e quindi la  $u$ ) rimane entro i limiti fissati  $u_L$  e  $u_H$ , in quanto la variabile  $p$  rimane entro gli stessi limiti; infatti se fosse  $p = \frac{e_1}{K_2} + w > u_H$ , allora si avrebbe

$$q = K_2(p - u_H) = K_2\left(w + \frac{e_1}{K_2} - u_H\right)$$

A regime, per effetto dell'azione integrale, deve risultare  $q = e_1$  (ingresso nullo all'integratore) e quindi

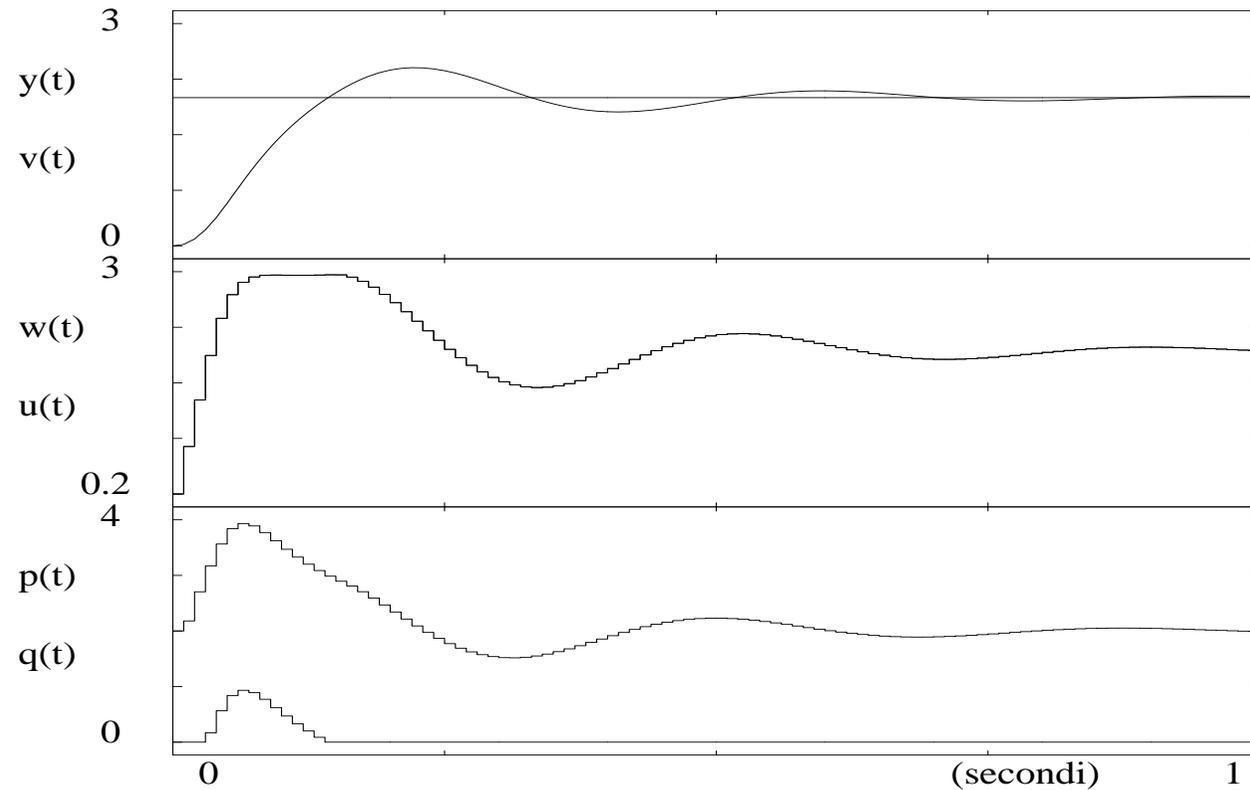
$$K_2w + e_1 - K_2u_H = e_1$$

da cui  $u = u_H$  come desiderato; analogo comportamento si ha quando  $p < u_L$

Il parametro  $K_2 > 0$  costituisce un grado di libertà nella realizzazione dello schema: a valori di  $K_2 > 1$  corrispondono risposte più pronte con ampiezze di controllo più elevate, mentre per  $K_2 < 1$  si hanno risposte più lente e comandi più 'dolci'

## Schemi di antisaturazione (anti-windup) – 7

Nello stesso esempio precedente, utilizzando lo schema anti-windup con dead-zone e per  $K_2 = 1$  si ottiene



## Schemi di antisaturazione (anti-windup) – 8

Un ulteriore schema anti-windup è il cosiddetto metodo dell' inseguimento dell'integrale

Ogni qual volta l'uscita del regolatore tende a saturare, il termine integrale  $I$  viene posto pari a

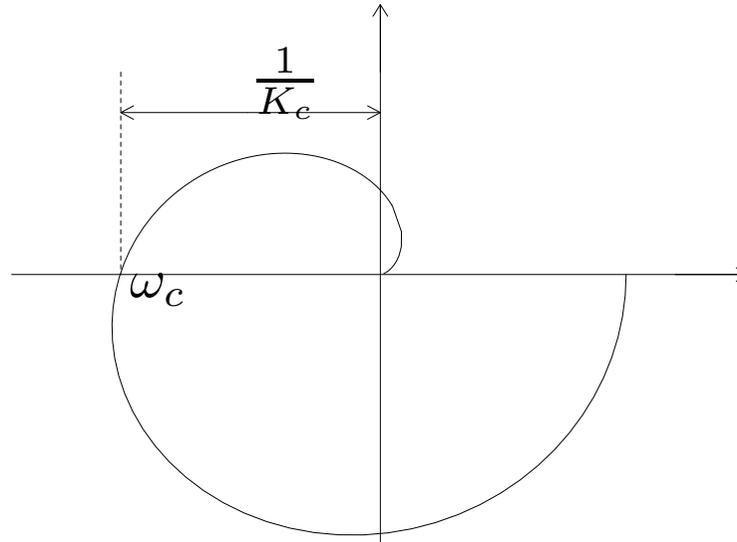
$$I = \frac{1}{K_p} \left\{ u_H - K_p \left[ e(k) + T_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right] \right\}$$

in modo che

$$w(k) = K_p \left\{ e(k) + I + T_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right\} = u_H$$

# Tuning automatico dei parametri del PID – 1

E' basato sulla stima sperimentale del guadagno critico  $K_c$  e del periodo di oscillazione critica  $P_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$  (individuabili anche sul diagramma di Nyquist, dove  $\frac{1}{K_c} =$  margine di guadagno)

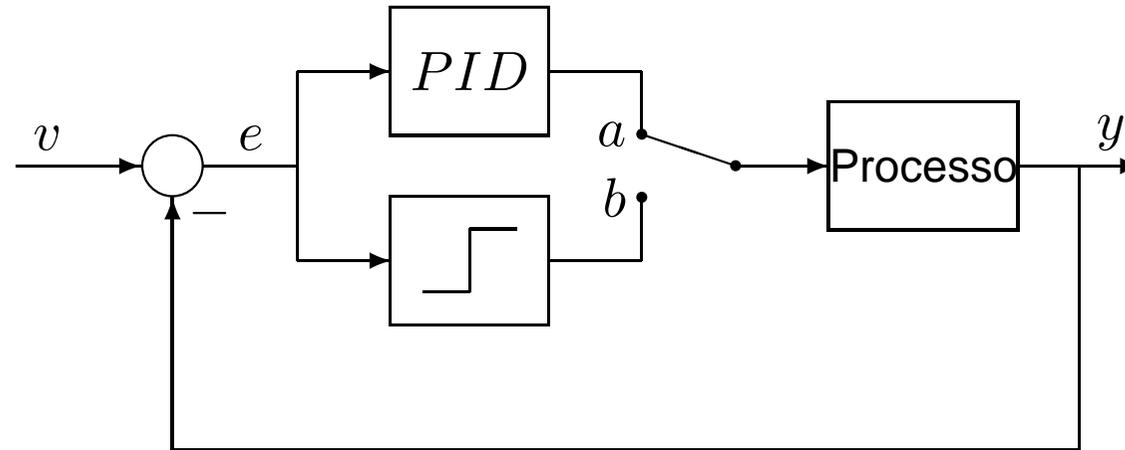


Stimati  $K_c$  e  $P_c$ , si usa la tabella di Ziegler-Nichols

Tipo	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_c$	$\infty$	0
PI	$0.45K_c$	$P_c/1.2$	0
PID	$0.6K_c$	$0.5P_c$	$0.125P_c$

## Tuning automatico dei parametri del PID – 2

Schema per il tuning automatico con funzione a relè (non linearità)

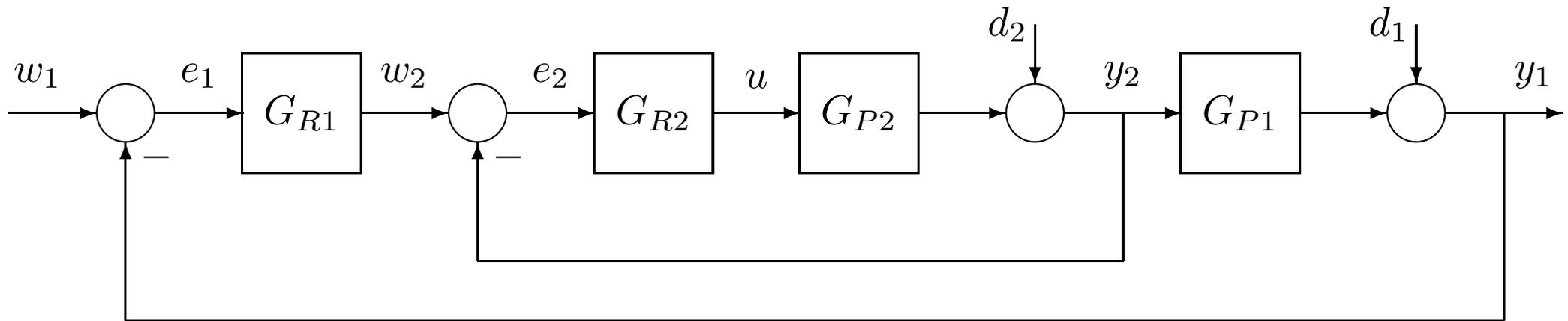


- (a) posizione di operazione normale: il  $PID$  tarato è in funzione
- (b) posizione di tuning: il sistema viene posto in oscillazione critica dalla retroazione non lineare per rilevare i parametri  $K_c$  e  $P_c$

Dalla teoria delle funzioni descrittive segue che, per un processo filtrante, il segnale  $e$  a regime è periodico quasi-sinusoidale di periodo  $P_c$  e che la prima armonica dell'uscita del relè ha un'ampiezza  $4d/\pi$ , dove  $d$  = ampiezza della funzione a relè; misurata allora l'ampiezza  $A$  dell'uscita sinusoidale  $y$  del processo, si ottiene  $K_c = 4d/\pi A$

E' una variante del tuning ottenuto per aumento del guadagno  $K_p$  del solo termine proporzionale del  $PID$  (con gli altri guadagni posti a zero) fino all'innescio delle oscillazioni critiche

## Realizzazione in cascata – 1



In molte realizzazioni, anzichè avere un unico anello di controllo, si ha uno **schema in cascata**

- anello interno o **ausiliario**
- anello esterno o **principale**

I vantaggi di queste realizzazioni sono che

- 1) i disturbi  $d_2$  agenti su  $G_{P2}$  sono già controllati dall'anello interno prima di influenzare  $y_1$
- 2) la retroazione interna riduce le variazioni parametriche in  $G_{P2}$  (spesso trascurate)
- 3) la dinamica del sistema complessivo può divenire più rapida

## Realizzazione in cascata – 2

Posto per il processo  $Y_1(z) = G_{P1}G_{P2}(z)U(z) = G_P(z)U(z)$ , dallo schema si ricava

$$\frac{Y_2(z)}{W_2(z)} = \frac{G_{R2}(z)G_{P2}(z)}{1 + G_{R2}(z)G_{P2}(z)} = G_{W2}(z)$$

$$\frac{Y_1(z)}{W_2(z)} = \frac{G_{R2}(z)G_P(z)}{1 + G_{R2}(z)G_{P2}(z)} = G'_P(z)$$

$$\frac{Y_1(z)}{W_1(z)} = \frac{G_{R1}(z)G'_P(z)}{1 + G_{R1}(z)G'_P(z)} = G_W(z)$$

$$= \frac{G_{R1}(z)G_{R2}(z)G_P(z)}{1 + G_{R2}(z)G_{P2}(z) + G_{R1}(z)G_{R2}(z)G_P(z)}$$

## Esempio di progetto in cascata – 1

Sia  $G_P(s) = G_{P1}(s)G_{P2}(s)$  con

$$G_{P1}(s) = \frac{1}{(1 + 10s)(1 + 5s)} \quad G_{P2}(s) = \frac{1}{1 + 7.5s}$$

Posto  $T = 4$  s, si ottiene

$$G_{P1}(z) = \frac{0.1087z + 0.0729}{z^2 - 1.1197z + 0.3012}$$

$$G_{P2}(z) = \frac{0.4134}{z - 0.5866} = \frac{b_{12}z^{-1}}{1 + a_{12}z^{-1}}$$

$$G_P(z) = \frac{0.0186(z + 0.1718)(z + 2.4411)}{(z - 0.5866)(z - 0.6705)(z - 0.4493)}$$

## Esempio di progetto in cascata – 2

Supponiamo di usare un controllore ausiliario di tipo PI nell'anello interno

$$G_{R2} = \frac{q_{02} + q_{12}z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Risulta allora

$$G_{W2} = \frac{q_{02}b_{12}z^{-1} + q_{12}b_{12}z^{-2}}{1 + (a_{12} + q_{02}b_{12} - 1)z^{-1} + (q_{12}b_{12} - a_{12})z^{-2}}$$

per cui, come previsto dalla presenza di un'azione integrale,  $G_{W2}(1) = 1$

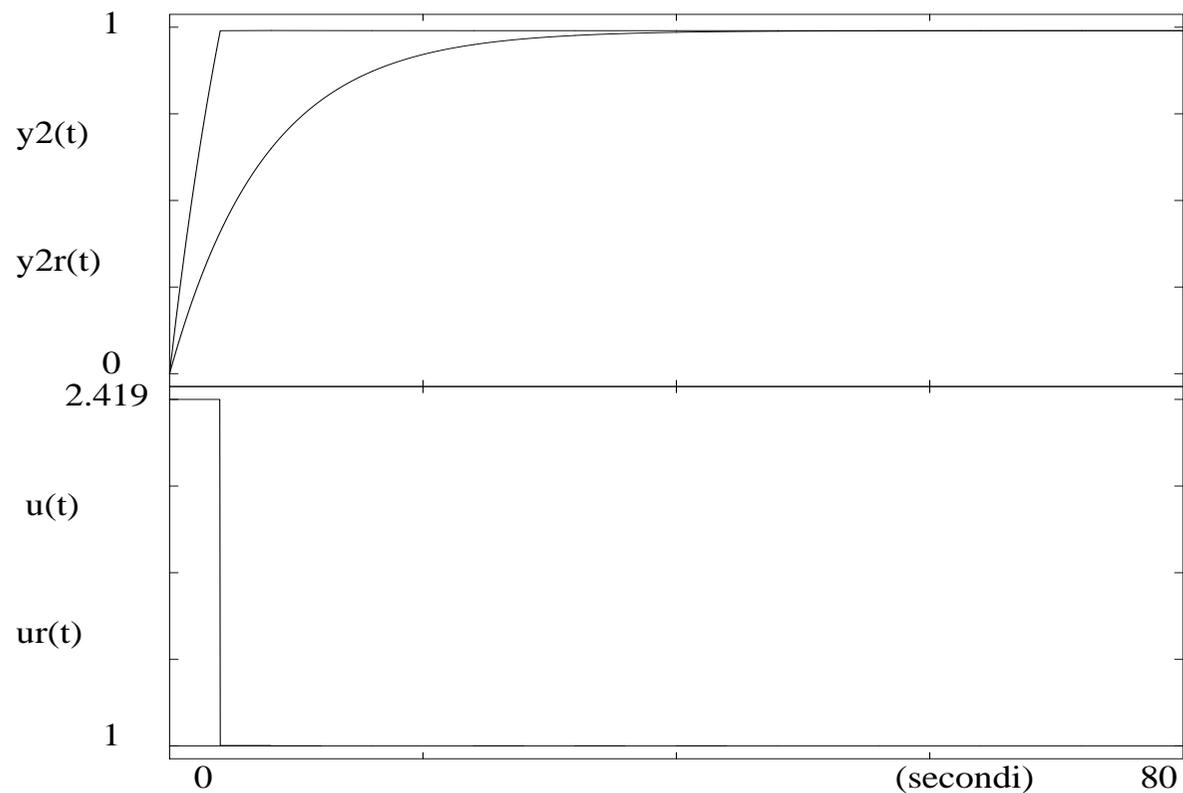
I parametri  $q_{02}$  e  $q_{12}$  sono scelti in modo che lo zero del PI coincida con il polo di  $G_{P2}(z)$ . Ponendo  $q_{02} = 2.4189$  e  $q_{12} = -1.4189$ , si ottiene

$$G_{W2}(z) = z^{-1}$$

e il tempo di assestamento di  $G_{W2}$  è finito (1 campione = 4 s), quindi più piccolo di quello della  $G_{P2}$  non retroazionata

## Esempio di progetto in cascata – 3

Confronto tra uscita  $y_2(t)$  e ingresso  $u(t)$  del sistema  $G_{P2}(s)$  con la retroazione  $G_{R2}(z)$  e uscita  $y_{2r}(t)$  e ingresso  $u_r(t)$  del sistema  $G_{P2}(s)$  senza la retroazione interna



## Esempio di progetto in cascata – 4

La presenza di un'azione integrale nel regolatore ausiliario fa sì che  $G_{W2}(1) = 1$  indipendentemente da possibili variazioni parametriche di  $G_{P2}$

La funzione di trasferimento vista dal regolatore principale  $G_{R1}(z)$  in presenza dell'anello interno diventa

$$G'_P(z) = \frac{0.0450(z + 0.1718)(z + 2.4411)}{z(z - 0.6705)(z - 0.4493)}$$

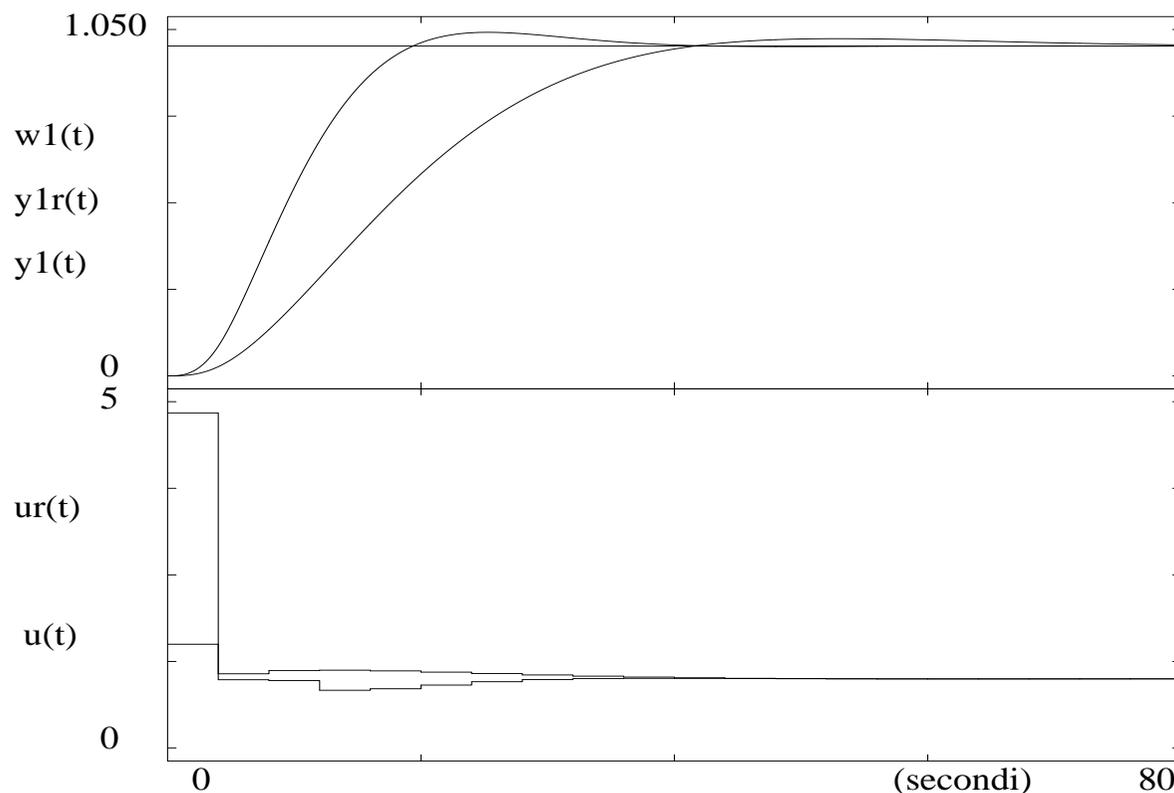
e quindi l'anello ausiliario ha cancellato uno dei poli di  $G_P(z)$  sostituendolo con un polo nell'origine

Come regolatore principale si può adottare a questo punto un PID completo, o un regolatore tipo deadbeat o altri

E' prevedibile che si ottengano risultati con una risposta complessiva  $y$  più rapida e ben smorzata, anche se a fronte di ingressi al processo  $u$  inizialmente di ampiezza più elevata

## Esempio di progetto in cascata – 5

Confronto tra uscita  $y_1(t)$  e ingresso  $u(t)$  del sistema  $G_P(s)$  **controllato in cascata, con la retroazione  $G_{R2}(z)$** , e uscita  $y_{1r}(t)$  e ingresso  $u_r(t)$  del sistema controllato con un unico  $G_R(z)$  **senza la retroazione interna**



dove si sono usati i seguenti PID principali, rispettivamente **in assenza dell'anello interno** (quindi da solo) o **in presenza dell'anello interno** (quindi come PID esterno)

$$G_R(z) = \frac{1.5 - 1.886z^{-1} + 0.59z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

$$G_{R1}(z) = \frac{2 - 2.24z^{-1} + 0.6024z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

## Esempio di progetto in cascata – 6

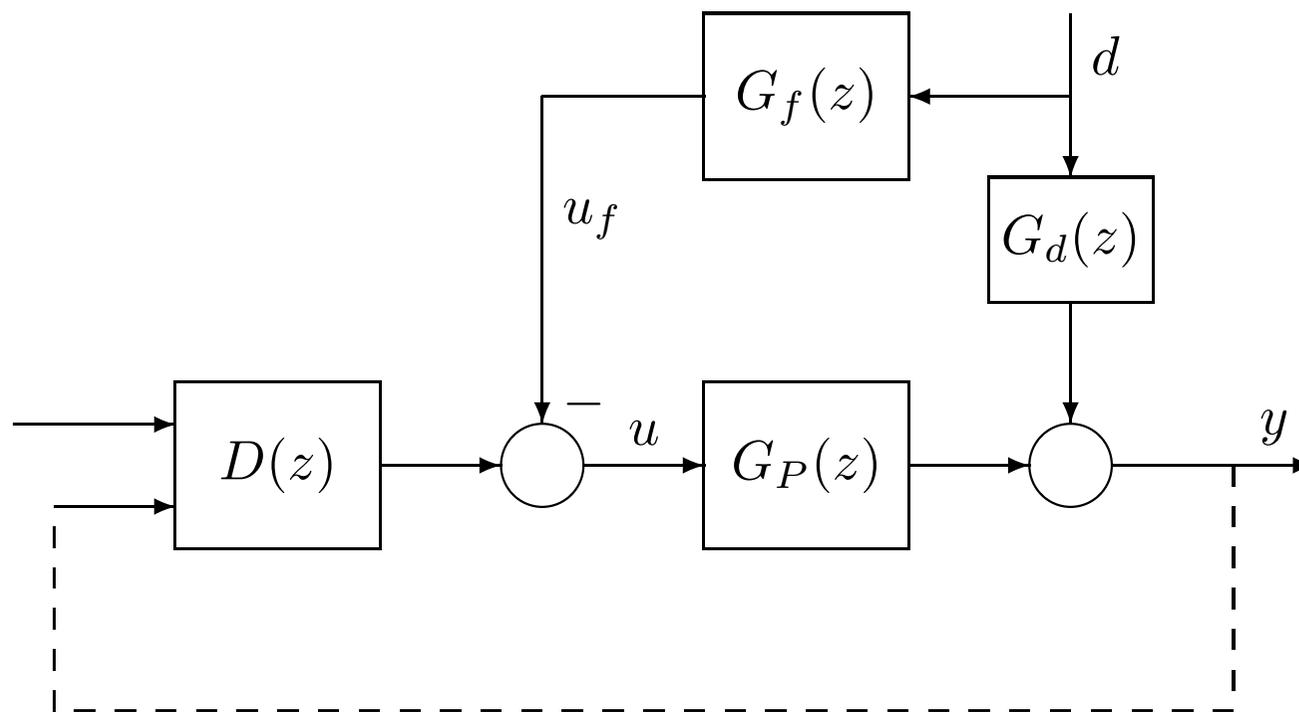
Da un punto di vista implementativo, nel caso di un PI ausiliario e di un PID principale, l'algoritmo di controllo che deve essere programmato è del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1(k) = w_1 - y_1(k) \\ w_2(k) = w_2(k-1) + q_{01}e_1(k) + q_{11}e_1(k-1) + q_{21}e_1(k-2) \\ e_2(k) = w_2(k) - y_2(k) \\ u(k) = u(k-1) + q_{02}e_2(k) + q_{12}e_2(k-1) \end{array} \right.$$

dove  $w_1$  è il riferimento esterno costante

## Compensazione del disturbo – 1

Si consideri la presenza di un disturbo sul processo e si assuma che tale disturbo sia **misurabile**: è possibile aggiungere un'azione di compensazione (in avanti/ feedforward)



Nel caso **ideale** si vorrebbe ottenere

$$G_f(z)G_p(z) = G_d(z)$$

## Compensazione del disturbo – 2

Se poniamo in generale

$$G_p(z) = z^{-k} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = z^{-k} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}$$

$$G_d(z) = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_q z^{-q}}{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_q z^{-q}}$$

ne segue nel caso ideale

$$G_f(z) = \frac{G_d(z)}{G_p(z)} = \frac{A(z^{-1})D(z^{-1})}{z^{-k}B(z^{-1})C(z^{-1})} = \frac{h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_m z^{-(m+q)}}{f_d z^{-k} + \dots + f_{m+q+k} z^{-(m+q+k)}}$$

Per la realizzabilità di  $G_f(z)$  deve essere

$$k = 0 \quad \text{processo discreto senza ritardo (eccesso poli-zeri di } G_p(z) \text{ deve essere nullo)}$$

Inoltre, poichè la compensazione opera una **totale cancellazione** della dinamica  $G_p(z)$ , i polinomi  $B$  e  $C$  devono essere stabili

## Compensazione del disturbo – 3

Più comune è l'applicazione di una compensazione in avanti **non ideale**, a struttura fissa e con parametri ottimizzati in un certo modo

$$G_f(z) = \frac{H(z^{-1})}{F(z^{-1})} = \frac{h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_p z^{-p}}{1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_p z^{-p}}$$

Nel caso tipico di  $p = 2$ , si pone

$$G_f(1) = \frac{h_0 + h_1 + h_2}{1 + f_1 + f_2} = K_f = \frac{1}{G_p(1)}$$

in modo da ottenere **a regime** una compensazione ideale del disturbo (costante)

Un modo ragionevole per scegliere i quattro parametri rimanenti di  $G_f(z)$  è quello di fissare i primi valori della variabile di controllo

$$u(k) = -f_1 u(k-1) - f_2 u(k-2) + h_0 d(k) + h_1 d(k-1) + h_2 d(k-2)$$

## Compensazione del disturbo – 4

Se ad esempio  $d(k)$  è un gradino discreto unitario, i quattro parametri si ricavano dalle prime quattro relazioni sequenziali

$$\begin{cases} u(0) = h_0 \\ u(1) = -f_1 u(0) + h_0 + h_1 = (1 - f_1)u(0) + h_1 \\ u(2) = -f_1 u(1) - f_2 u(0) + h_0 + h_1 + h_2 = (f_1 - f_2)u(0) + (1 - f_1)u(1) + h_2 \\ u(3) = -f_1 u(2) - f_2 u(1) + h_0 + h_1 + h_2 = f_2 u(0) + (f_1 - f_2)u(1) + (1 - f_1)u(2) \end{cases}$$

scegliendo  $u(0), \dots, u(3)$  (con eventuali vincoli) e risolvendo ...

Nel caso più semplice di  $p = 1$   $\left( G_f(z) = \frac{h_0 + h_1 z^{-1}}{1 + f_1 z^{-1}} \right)$ , procedendo in modo analogo si ottiene la soluzione

$$h_0 = u(0) \quad f_1 = -\frac{u(1) - K_f}{u(0) - K_f} \quad h_1 = u(1) - u(0)(1 - f_1)$$

per dati campioni di controllo  $u(0)$  e  $u(1)$  desiderati. Per la stabilità di  $G_f(z)$  occorre poi che  $|f_1| < 1$ , da cui

$$u(1) < u(0) \quad \mathbf{e} \quad h_1 < f_1 u(0)$$