

SISTEMI DIGITALI DI CONTROLLO

Prof. Alessandro De Luca

DIS, Università di Roma “La Sapienza”

deluca@dis.uniroma1.it

Lucidi tratti dal libro

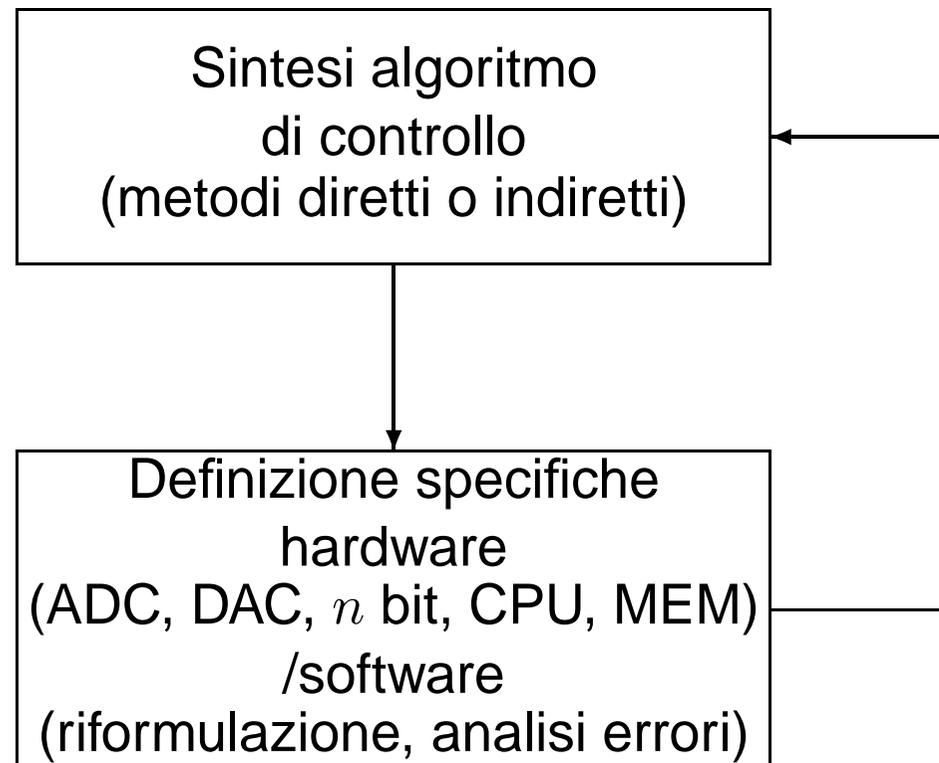
C. Bonivento, C. Melchiorri, R. Zanasi: “Sistemi di Controllo Digitale”

Capitolo 13: Problemi di realizzazione del controllo digitale

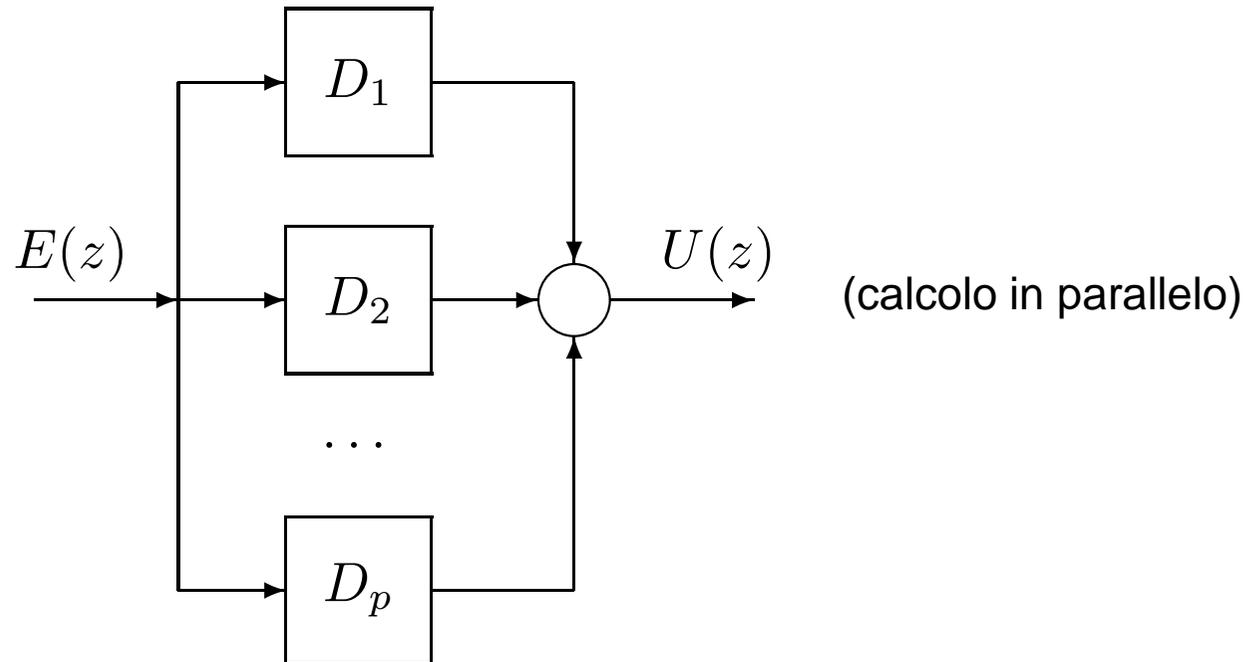
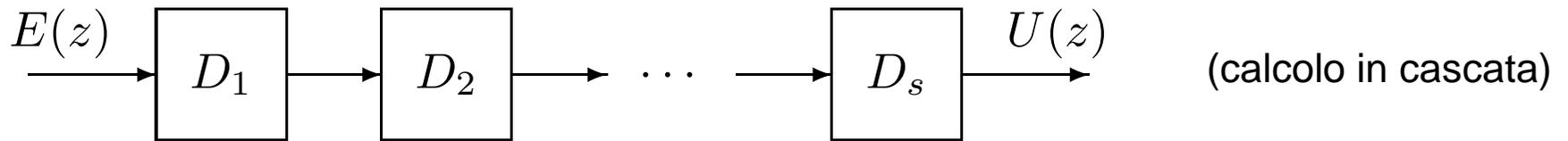
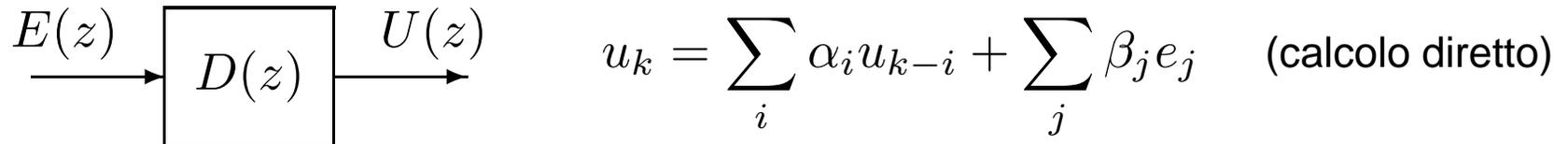
Si ringraziano gli autori

Problemi di realizzazione del controllo digitale

- Strutturazione dell'algoritmo
- Rappresentazioni delle grandezze, errori di quantizzazione e aritmetica di elaborazione
- Precisione nella memorizzazione dei parametri
- Filtraggio antialiasing
- Scelta del periodo di campionamento



Strutturazione dell'algoritmo

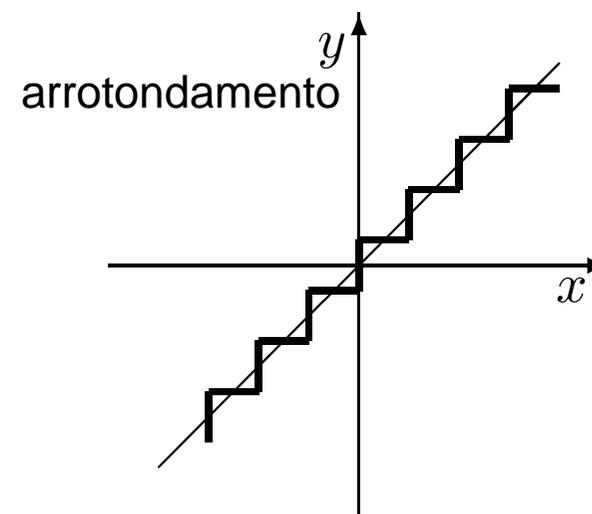
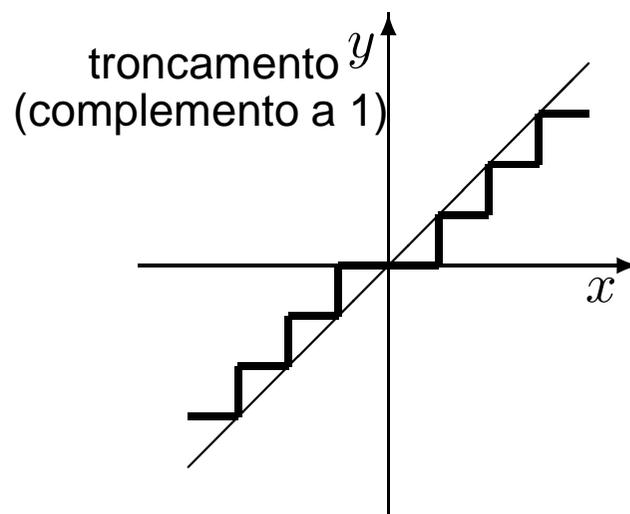
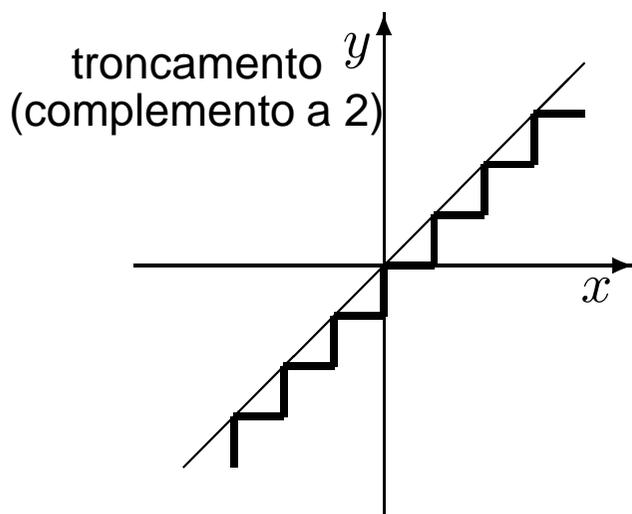


Diverse realizzazioni software dell'algoritmo di controllo digitale (per ridurre il ritardo di elaborazione e/o minimizzare gli effetti della propagazione di errori di quantizzazione)

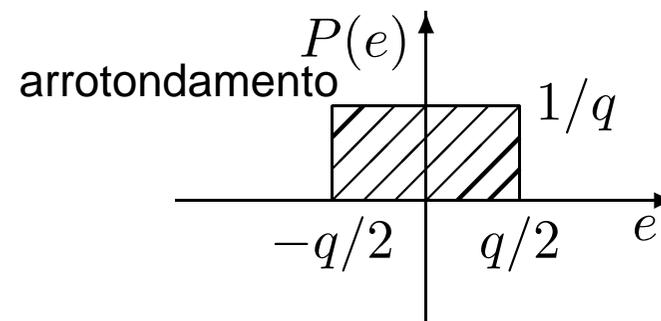
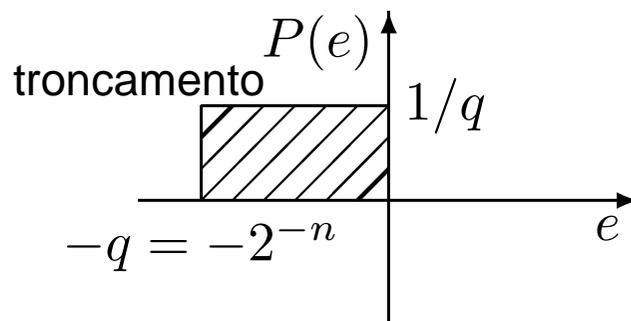
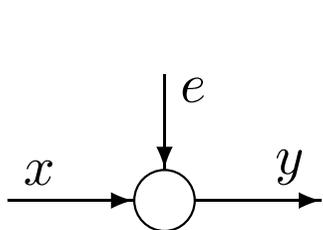
Rappresentazione delle grandezze – 1

- risoluzione dei convertitori A/D (e D/A) con n bit
- precisione di elaborazione (moltiplicazioni tra parametri e valori di una variabile)
- i parametri possono differire dai valori ideali “nominali” (numero cifre significative)

caratteristiche di quantizzazione più comuni di un convertitore A/D



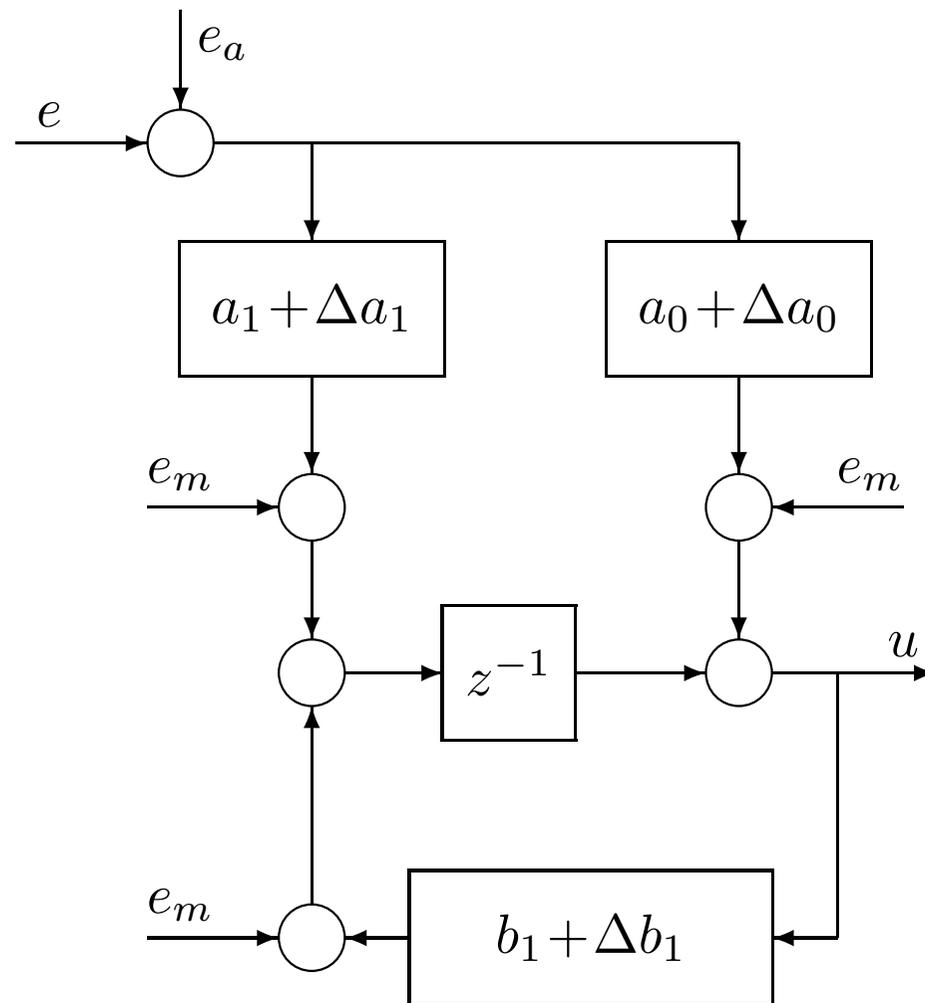
- la quantizzazione può essere approssimata con un rumore bianco additivo



Rappresentazione delle grandezze – 2

Si consideri il semplice caso

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$$



Rappresentazione delle grandezze – 3

- il rumore di conversione e_a e il rumore di quantizzazione dovuto alla moltiplicazione e_m variano rapidamente e non influenzano la stabilità
- le variazioni dei coefficienti Δa_0 , Δa_1 e Δb_1 hanno effetto sulla dinamica e quindi sulla stabilità
- l'influenza di e_a sull'uscita u dipende da $D(z)$, ma non dalla sua particolare struttura realizzativa
- la generazione e la propagazione di e_m dipende dalla particolare struttura realizzativa di $D(z)$

Propagazione dell'errore di conversione – 1

Esaminiamo la propagazione di e_a , ossia del rumore di conversione

- caso di troncamento con complemento a 2

$$\bar{e}_T = -\frac{q}{2} \quad \text{valore medio} \quad \sigma_T^2 = \frac{q^2}{12} \quad \text{varianza}$$

dove $q = 2^{-n} = \text{peso del } LSB$

- caso di arrotondamento

$$\bar{e}_R = 0 \quad \sigma_R^2 = \frac{q^2}{12}$$

Posto $D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k}$, si avrà allora

$$\bar{u} = \bar{e} \sum_{k=0}^{\infty} d_k = \bar{e} \lim_{z \rightarrow 1} D(z)$$

$$\sigma_u^2 = \sigma_e^2 \sum_0^{\infty} d_k^2 \left(= \sigma_e^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} D(z) D(z^{-1}) z^{-1} dz \right)$$

(l'ultima uguaglianza è ottenuta applicando il Teorema di Parseval)

Propagazione dell'errore di conversione – 2

Ad esempio, se

$$D(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s+b} \right] = \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k z^{-k} \quad \beta = e^{-bT} \quad (d_k = \beta^k)$$

si ha

$$\bar{u} = \frac{\bar{e}}{1 - \beta} \quad \sigma_u^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \beta^2} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \infty$$

Per T piccolo $\rightarrow \beta \simeq 1 - bT$ e, posto $b = 1$, si ha infatti

T	β	$1/(1 - \beta^2)$
0.1	0.9	5
0.01	0.99	50
0.001	0.999	500

Propagazione dell'errore di moltiplicazione

Esaminiamo ora la propagazione di e_m , ossia del rumore di quantizzazione introdotto dall'aritmetica (moltiplicazione), con riferimento al caso di un regolatore del secondo ordine

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{\gamma_1}{1 - \beta_1 z^{-1}} + \frac{\gamma_2}{1 - \beta_2 z^{-1}} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

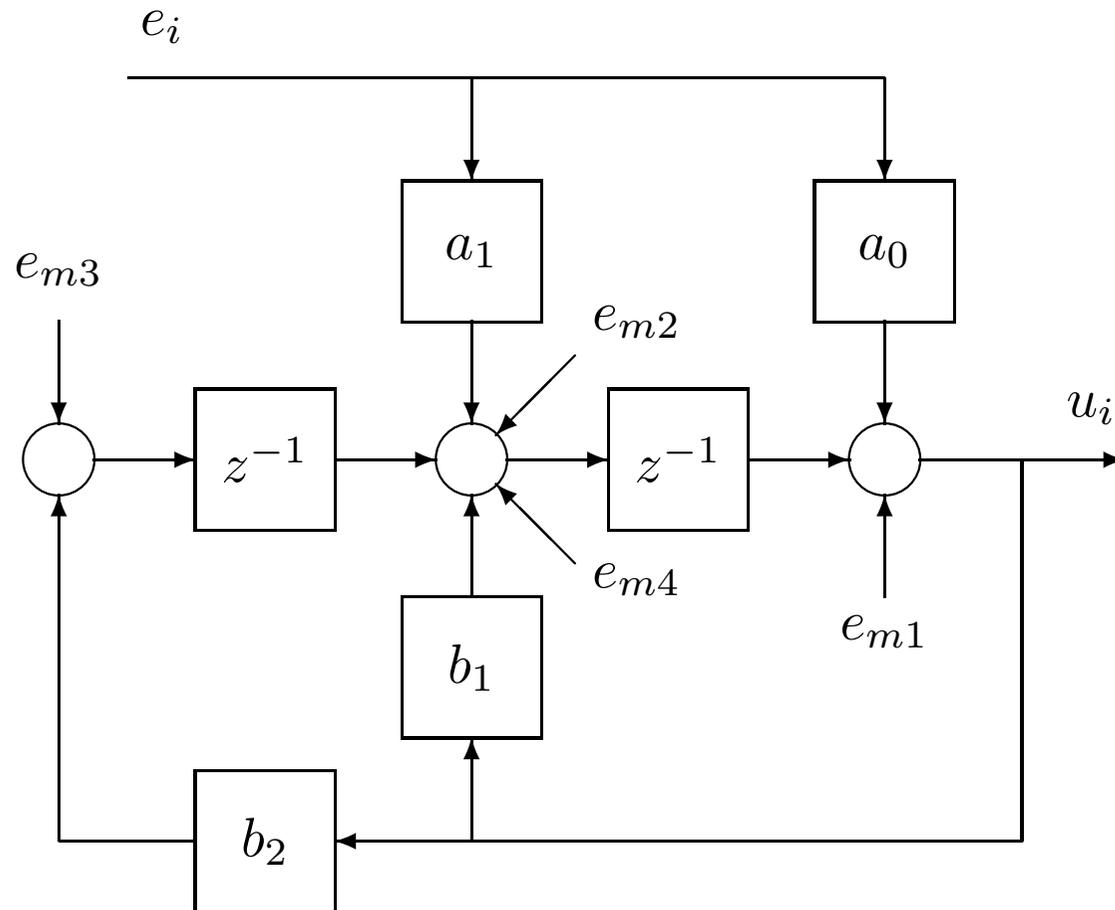
con $a_0 = \gamma_1 + \gamma_2$, $a_1 = -(\gamma_1 \beta_2 + \gamma_2 \beta_1)$, $b_1 = -(\beta_1 + \beta_2)$, $b_2 = \beta_1 \beta_2$

Come detto, la generazione e propagazione di e_m dipenderà dalla struttura realizzativa (di calcolo) della $D(z)$.

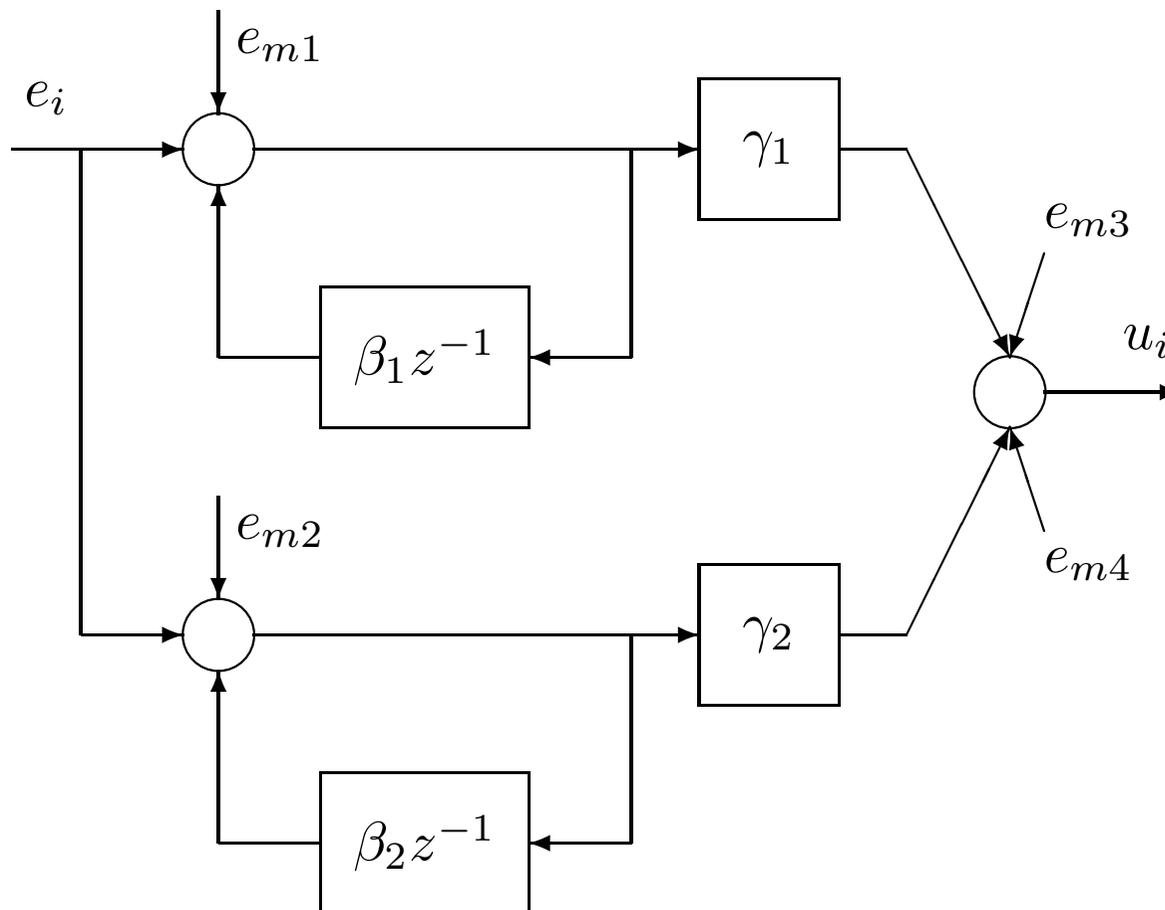
Consideriamo quindi tre tipologie di realizzazione

- diretta
- parallela con post-moltiplicazione
- parallela con pre-moltiplicazione

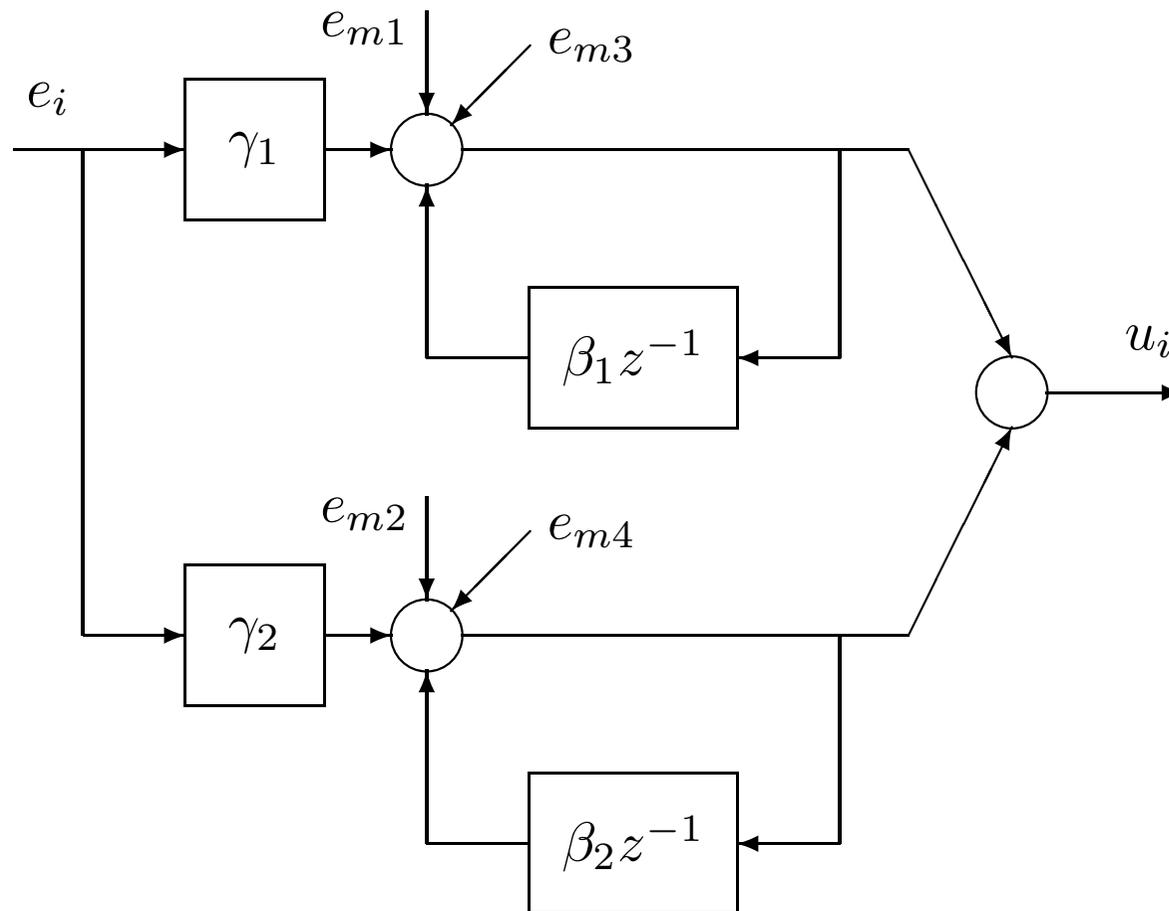
Realizzazione di tipo **diretto**



Realizzazione di tipo **parallelo con post-moltiplicazione**



Realizzazione di tipo **parallelo con pre-moltiplicazione**



Propagazione dell'errore di moltiplicazione (reprise)

- caso diretto

$$\bar{u} = \frac{4\bar{e}_m}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)} \quad \sigma_u^2 = 4\sigma_e^2 \frac{1 + \beta_1\beta_2}{(1 - \beta_1\beta_2)(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}$$

- caso parallelo con post-moltiplicazione

$$\bar{u} = \bar{e}_m \left[\frac{\gamma_1}{1 - \beta_1} + \frac{\gamma_2}{1 - \beta_2} + 2 \right] \quad \sigma_u^2 = \sigma_e^2 \left[\frac{\gamma_1^2}{1 - \beta_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{1 - \beta_2^2} + 2 \right]$$

- caso parallelo con pre-moltiplicazione

$$\bar{u} = 2\bar{e}_m \left[\frac{1}{1 - \beta_1} + \frac{1}{1 - \beta_2} \right] \quad \sigma_u^2 = 2\sigma_e^2 \left[\frac{1}{1 - \beta_1^2} + \frac{1}{1 - \beta_2^2} \right]$$

dal confronto

$$\frac{\sigma_{u \text{ parallelo}}^2}{\sigma_{u \text{ diretto}}^2} = \frac{(2 - \beta_1^2 - \beta_2^2)(1 - \beta_1\beta_2)}{2(1 + \beta_1\beta_2)} \quad \frac{\bar{u}_{\text{parallelo}}}{\bar{u}_{\text{diretto}}} = \frac{2 - \beta_1 - \beta_2}{2}$$

⇒ la realizzazione in **parallelo è migliore tanto più T è piccolo**

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{\gamma_1}{1 - \beta_1 z^{-1}} + \frac{\gamma_2}{1 - \beta_2 z^{-1}} \\ &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - (\gamma_1 \beta_2 + \gamma_2 \beta_1) z^{-1}}{1 - (\beta_1 + \beta_2) z^{-1} + \beta_1 \beta_2 z^{-2}} \end{aligned}$$

Posta una variazione di un parametro $\bar{\lambda} + \delta\lambda$ e $z_j + \delta z_j$ nell'equazione caratteristica (denominatore della $D(z)$)

$$P(z, \bar{\lambda}) = 0$$

si ha

$$P(z_j + \delta z_j, \bar{\lambda} + \delta\lambda) = P(z_j, \bar{\lambda}) + \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=z_j} \delta z_j + \left. \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\bar{\lambda}} \delta\lambda$$

ossia la variazione di posizione di una sua radice ($j = 1, 2$) è

$$\delta z_j = - \left. \frac{\partial P / \partial \lambda}{\partial P / \partial z} \right|_{\substack{z = z_j \\ \lambda = \bar{\lambda}}} \delta\lambda$$

Errori di rappresentazione dei coefficienti - 2

Per una realizzazione di calcolo **diretta**

$$u(k) = (\beta_1 + \beta_2)u(k-1) - \beta_1\beta_2u(k-2) + (\gamma_1 + \gamma_2)e(k) - (\gamma_1\beta_2 + \gamma_2\beta_1)e(k-1)$$

$$P = z^2 - (\beta_1 + \beta_2)z + \beta_1\beta_2 \quad \text{con radici} \quad \beta_1, \beta_2$$

si ha

$$\lambda_1 = \beta_1 + \beta_2 \quad \lambda_2 = \beta_1\beta_2$$

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda_1} = -z \quad \frac{\partial P}{\partial \lambda_2} = 1 \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 2z - \lambda_1$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial \lambda_1} \right|_{z=\beta_1} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial \lambda_2} \right|_{z=\beta_1} = \frac{-1}{\beta_1 - \beta_2}$$

Se $\beta_1 \simeq \beta_2$, e questo accade per T piccoli, si ha **elevata sensibilità**

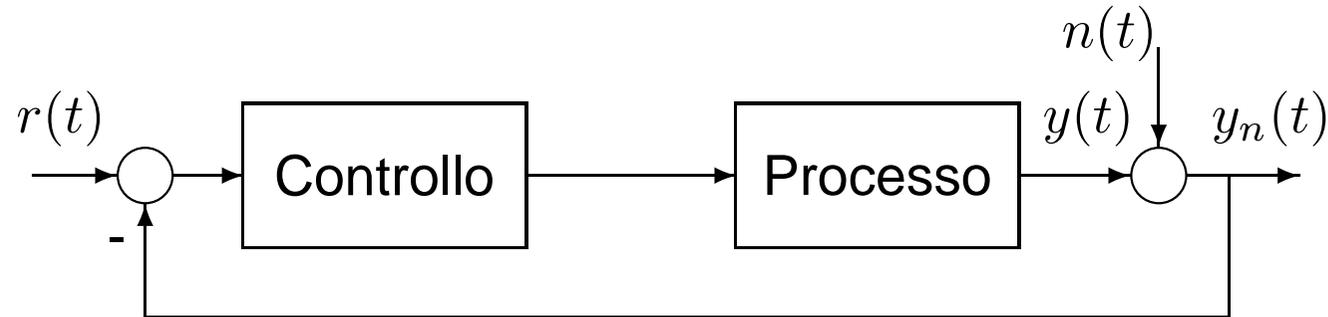
Per il caso di realizzazioni di calcolo **in parallelo** (o **in cascata**), è ovvio che i coefficienti in $P_i = z + \beta_i$ ($i = 1, 2$) sono proprio le radici β_1 e β_2 e la sensibilità è quindi **costante** (pari comunque a -1)

Orientamenti generali

- strutture realizzative di tipo parallelo sono preferibili per quanto riguarda la propagazione degli errori di quantizzazione del convertitore A/D
- strutture di tipo diretto sono poco robuste ad errori di rappresentazione dei parametri
- un periodo di campionamento T piccolo esalta sia gli effetti della quantizzazione che la sensibilità agli errori sui parametri

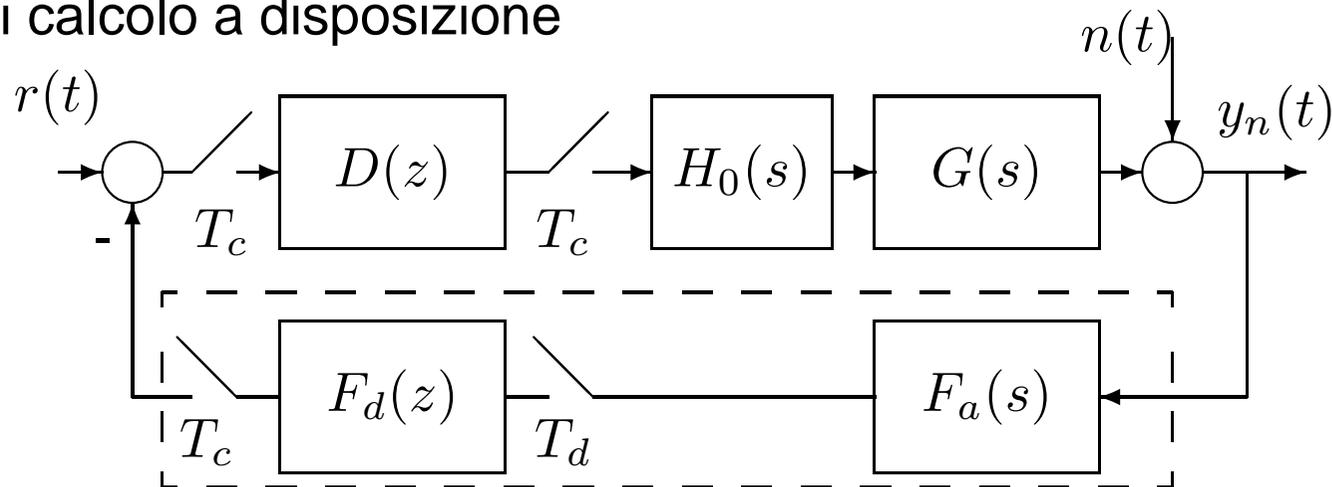
Filtraggio antialiasing – 1

L'aliasing prodotto dal campionamento introduce componenti di segnale non desiderate a basse frequenze, ossia nella banda del segnale utile in anello chiuso

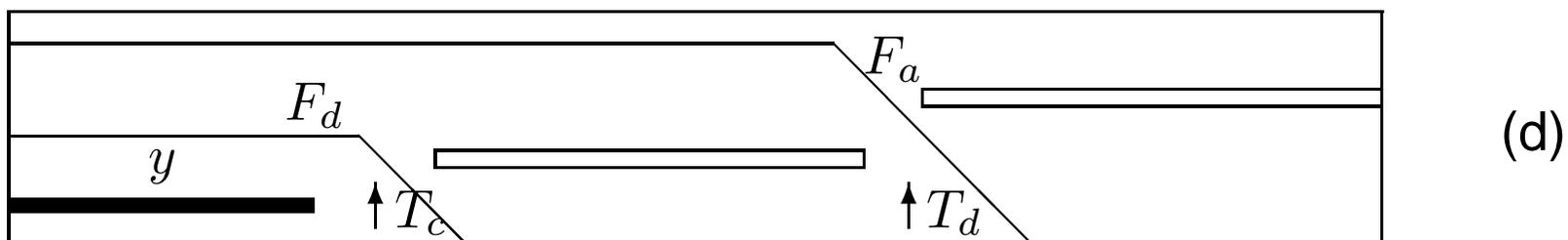
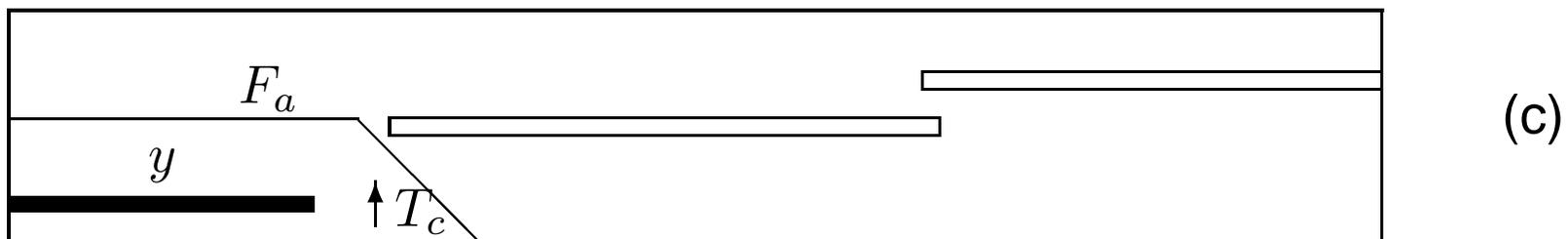
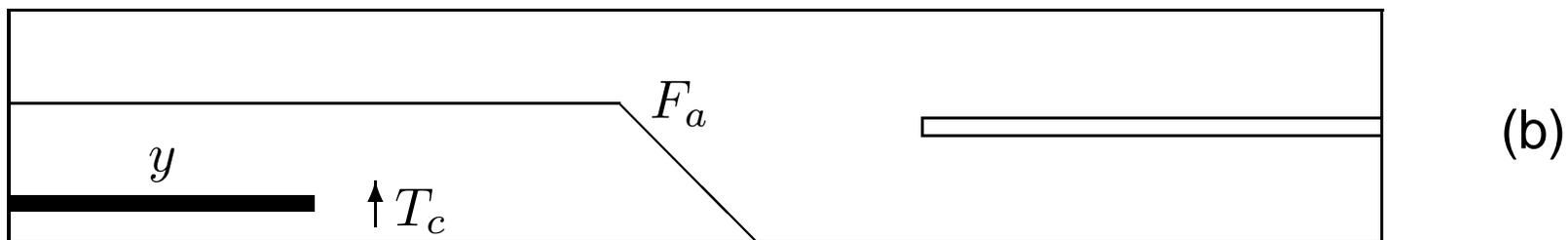
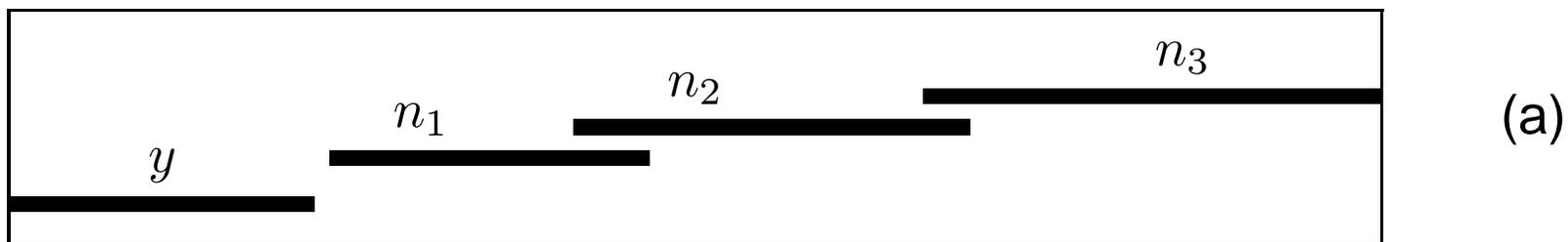


È necessario introdurre opportuni filtri (**analogici e/o digitali**) che eliminano il più possibile, prima dell'effettivo campionamento, il segnale di rumore tenendo in conto

- natura e banda di frequenza del rumore
- complessità realizzativa
- potenza di calcolo a disposizione



Filtraggio antialiasing – 2



nota: la scala delle ascisse (frequenze) è logaritmica

Due tipologie di **guard-filters**

Filtraggio **analogico**

- di tipo passivo con reti RC, adatti per realizzare costanti di tempo dell'ordine di qualche secondo
- pendenza di 20 db per decade (per un RC del primo ordine)
- di tipo attivo, con amplificatori operazionali, se si richiedono prestazioni superiori
- è bene che l'azione filtrante non interessi la zona di segnale utile per mantenere la prontezza del sistema
- non grava sul sistema di elaborazione ma, per cambiamenti, richiede modifiche hardware

Filtraggio **digitale**

- periodo di campionamento T_d **minore** di quello di controllo T_c
- quindi, richiedono la possibilità di aumentare la frequenza di campionamento
- facilmente modificabili via software
- essenzialmente di due tipi: filtri di media oppure filtri per discretizzazione

- filtro digitale di media su N campioni

$$y(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u(k-i) \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{1}{N} \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \omega_f \approx \frac{\pi}{NT_d} \quad (\text{per } N \geq 5)$$

con pulsazione di taglio ω_f che diminuisce al crescere di N (con T_d fissato)

- si sceglie di solito il periodo di acquisizione pari a $T_d = T_c/N$ (in uscita, in $t = kT_c$ si ha la media degli N valori letti in T_c) $\Rightarrow \omega_f \approx \pi/T_c = \omega_c/2$ (indipendente da N se si varia T_d , fissato T_c)
- filtro digitale per discretizzazione, usando le tecniche già viste (capitolo 7)
- ad esempio, per un filtro analogico del primo ordine

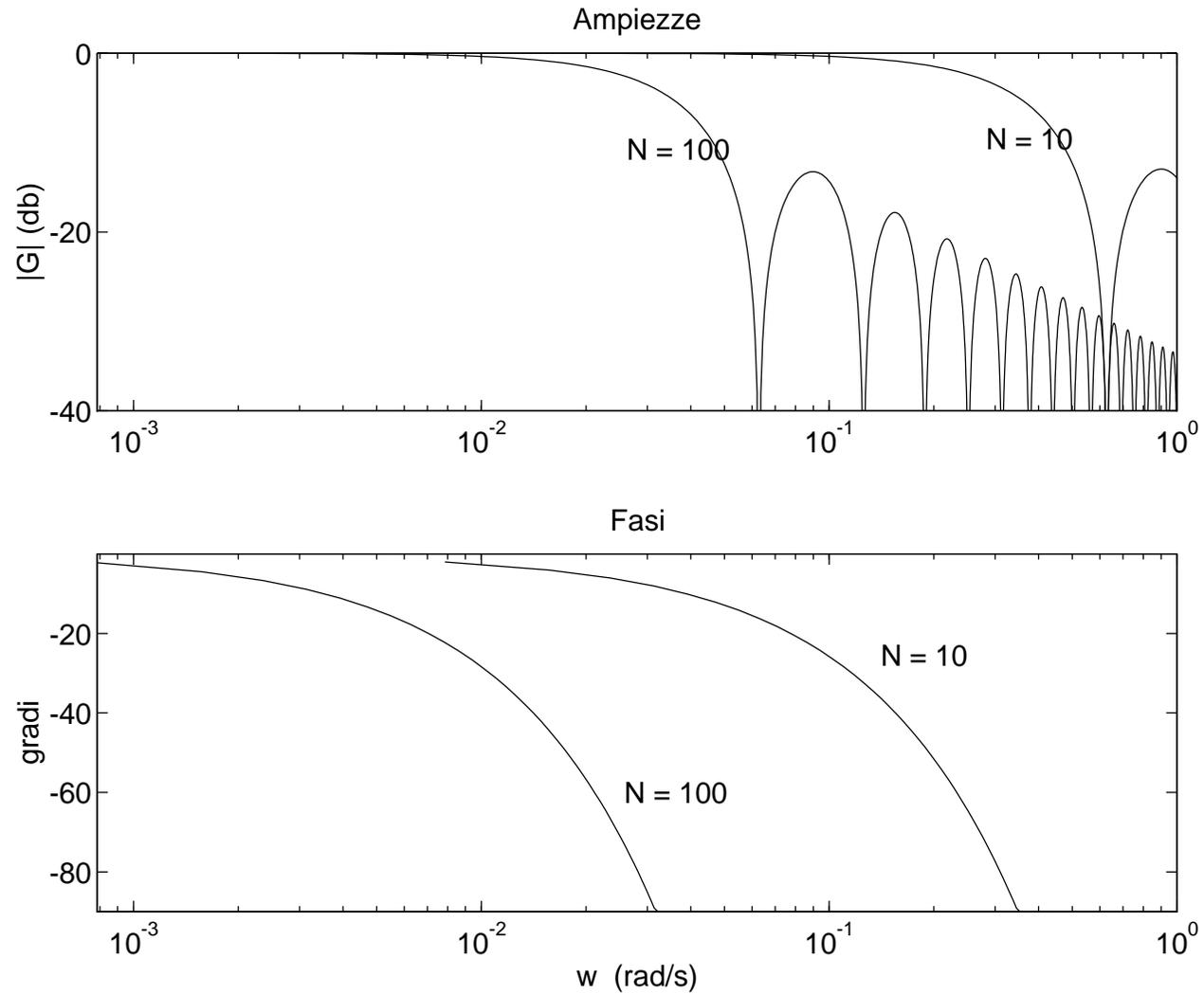
$$F(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

con il metodo delle differenze all'indietro oppure con corrispondenza poli/zeri si ha

$$F_{back}(z) = \frac{T_d/\tau}{(T_d/\tau) - z^{-1}} \quad F_{p/z}(z) = \frac{1 - e^{-T_d/\tau}}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - e^{-T_d/\tau} z^{-1}}$$

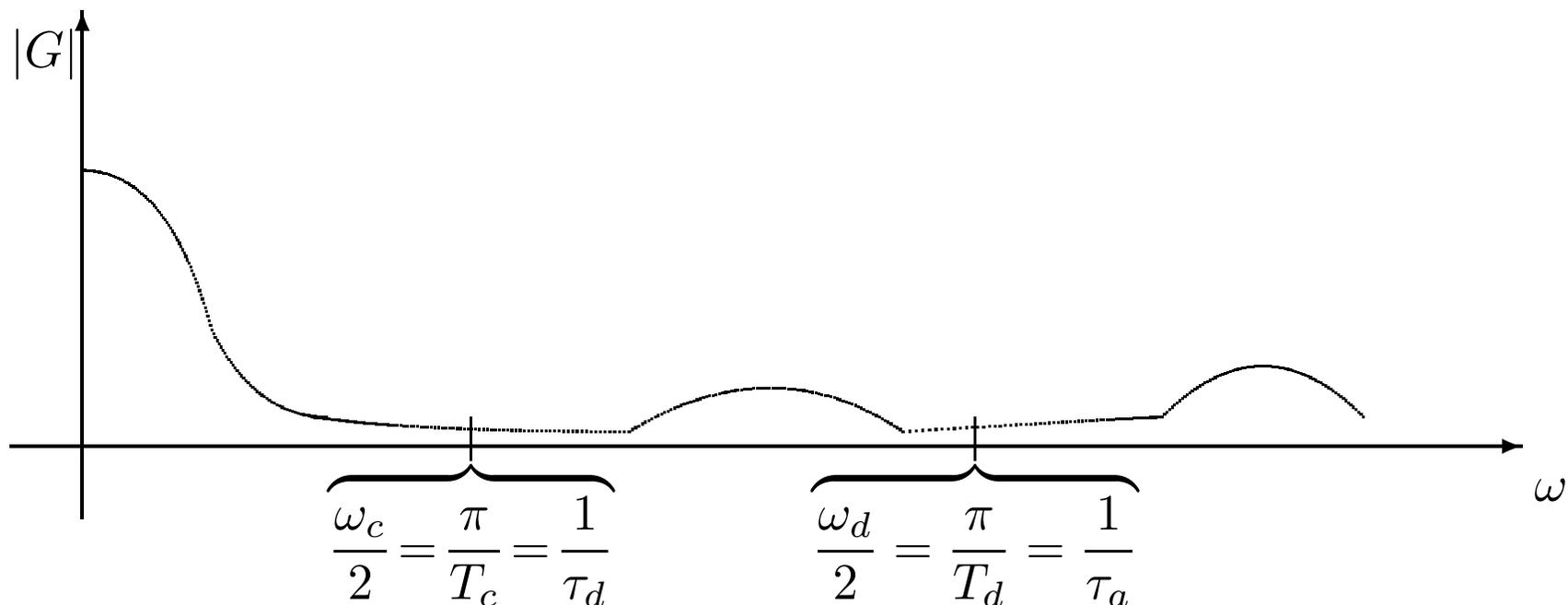
Filtraggio antialiasing – 5

Diagrammi di Bode di 2 filtri digitali di media ($N = 10$ e $N = 100$) per $T_d = 0.1$ s fissato



Filtraggio antialiasing – 6

Per la scelta delle costanti di tempo del filtro analogico (e dell'eventuale filtro digitale):
compromesso tra filtraggio del rumore e non influenza sulla banda utile del segnale



pulsazioni di taglio/ costanti di tempo (equivalenti) dei filtri

$$\omega_a = \omega_c/2 = \pi/T_c \approx 2/T_c \quad \text{e per un filtro del 1}^\circ \text{ ordine } \tau_a = 1/\omega_a \approx T_c/2 \quad (\text{filtro analogico})$$

$$\tau_d = T_c/\pi \approx T_c/2 \quad \tau_a = T_d/\pi \approx T_d/2 \quad (\text{matching per filtro digitale e analogico combinati})$$

$$T_d \text{ nei filtri digitali: } T_d = T_c/N = T_c/(5 \div 10) \text{ (filtri di media); } T_d = f(\tau_d) \text{ (filtri per discretizzazione)}$$

Se non è sufficiente un filtro del primo ordine, si ricorre a strutture più complesse

- filtri di Butterworth → **guadagno il più possibile costante** nella banda passante
- filtri di Bessel → fase il più possibile costante nella banda passante
- filtri di Chebyshev → ‘ripple’ costante nella banda e **i più simili a un filtro ideale**
- filtri ITAE → minimizzano il criterio ITAE per ingresso a gradino
- filtri selettivi, detti anche “notch filters” → per disturbi a frequenza nota

Filtri di Butterworth – 1

I filtri di Butterworth (passa basso) $F_B(s)$ sono tra i più usati in ambito controllistico. Per un guadagno statico unitario, un tale filtro di ordine n e con pulsazione di taglio ω_f (a -3 db) è caratterizzato dalla relazione sul modulo della risposta armonica

$$|F_B(j\omega)| = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_f}\right)^{2n}}$$

Nota: furono introdotti dall'autore solo per n pari, ma si possono costruire (anche in forma normalizzata rispetto a ω_f) per n intero positivo qualsiasi; ne esistono inoltre versioni passa-alto e passa-banda

Valendo l'identità $|F_B(j\omega)|^2 = [F_B(s)F_B(-s)]_{s=j\omega}$, si deduce

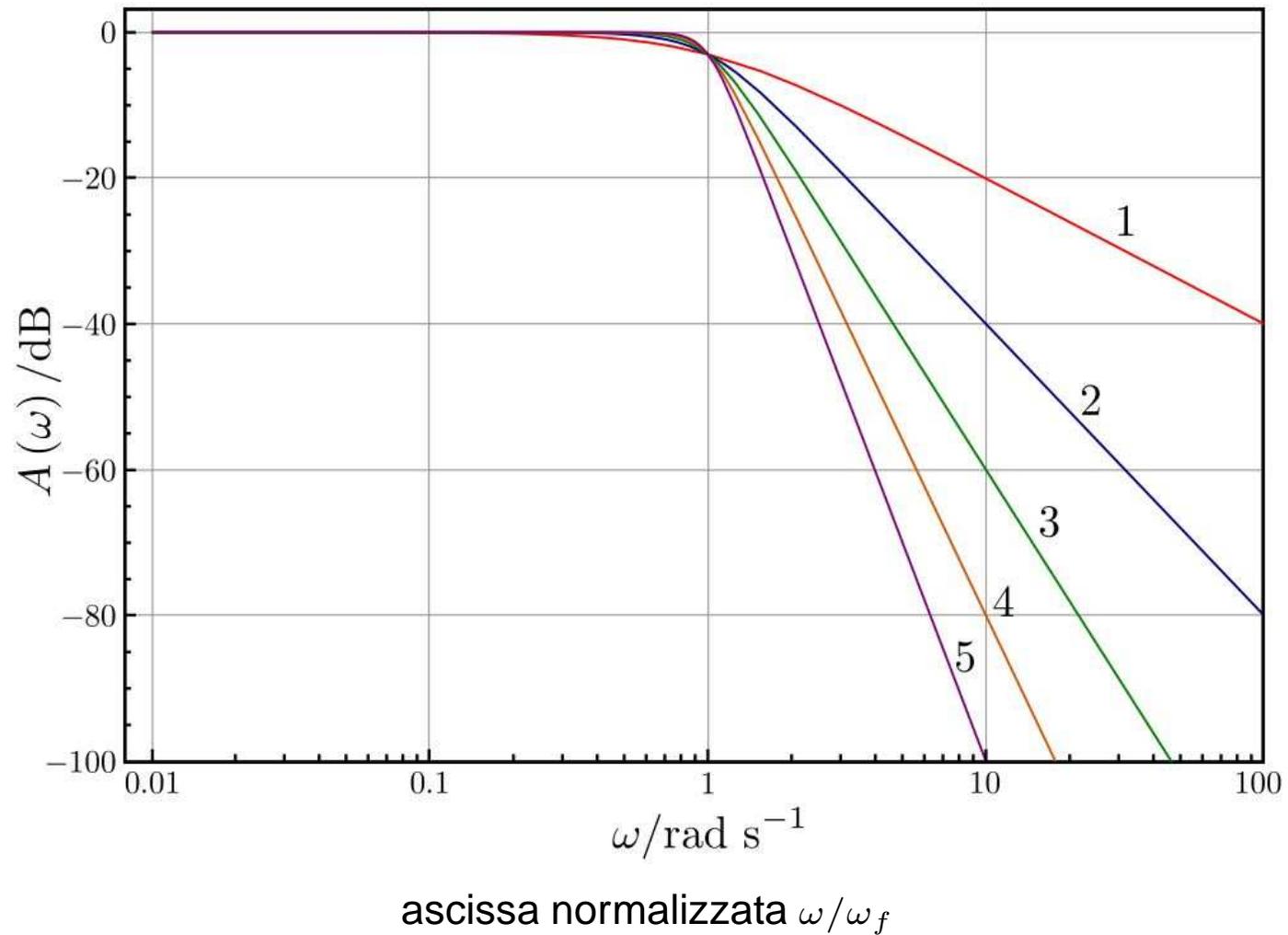
$$F_B(s)F_B(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\omega_f)^{2n}}$$

e poichè $(s/j\omega_f)^{2n} = -1 = e^{j\pi} e^{j2k\pi}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) e $j = e^{j\pi/2}$, i suoi $2n$ poli sono

$$s_i = e^{j\pi/2} \omega_f e^{j\pi/(2n)} e^{j\pi i/n} = \omega_f e^{j(n+1)\pi/(2n)} e^{j\pi i/n} \quad i = 0, 1, \dots, 2n - 1$$

tutti posti sul cerchio di raggio $|s_i| = \omega_f$ centrato nell'origine, e ugualmente spazati di un angolo pari a π/n (gli n poli di $F_B(s)$ sono **tutti e soli** quelli a **parte reale negativa!**)

Filtri di Butterworth – 2



moduli della risposta armonica di $F_B(s)$ al variare di n tra 1 e 5

Esempio di filtro di Butterworth – 1

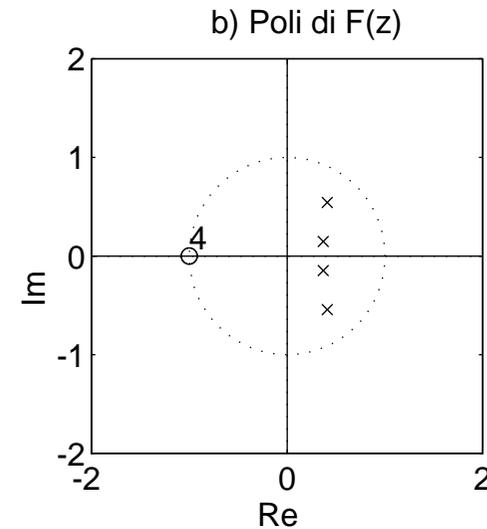
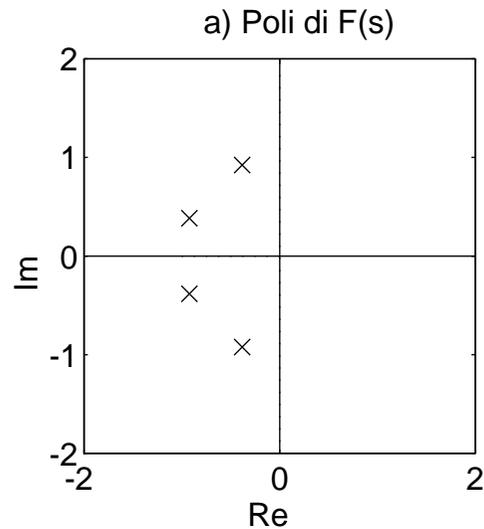
Volendo progettare un filtro con $\omega_f = 1$ rad/s e $n = 4$, si ha ($i = 0, 1, \dots, 7$)

$$s_i = \left(\cos \frac{5\pi}{8} + j \sin \frac{5\pi}{8}\right) \left(\cos \frac{\pi i}{4} + j \sin \frac{\pi i}{4}\right)$$

$$F_B(s) = \frac{1}{[(s+0.3827)^2 + (0.9239)^2][(s+0.9239)^2 + (0.3287)^2]}$$

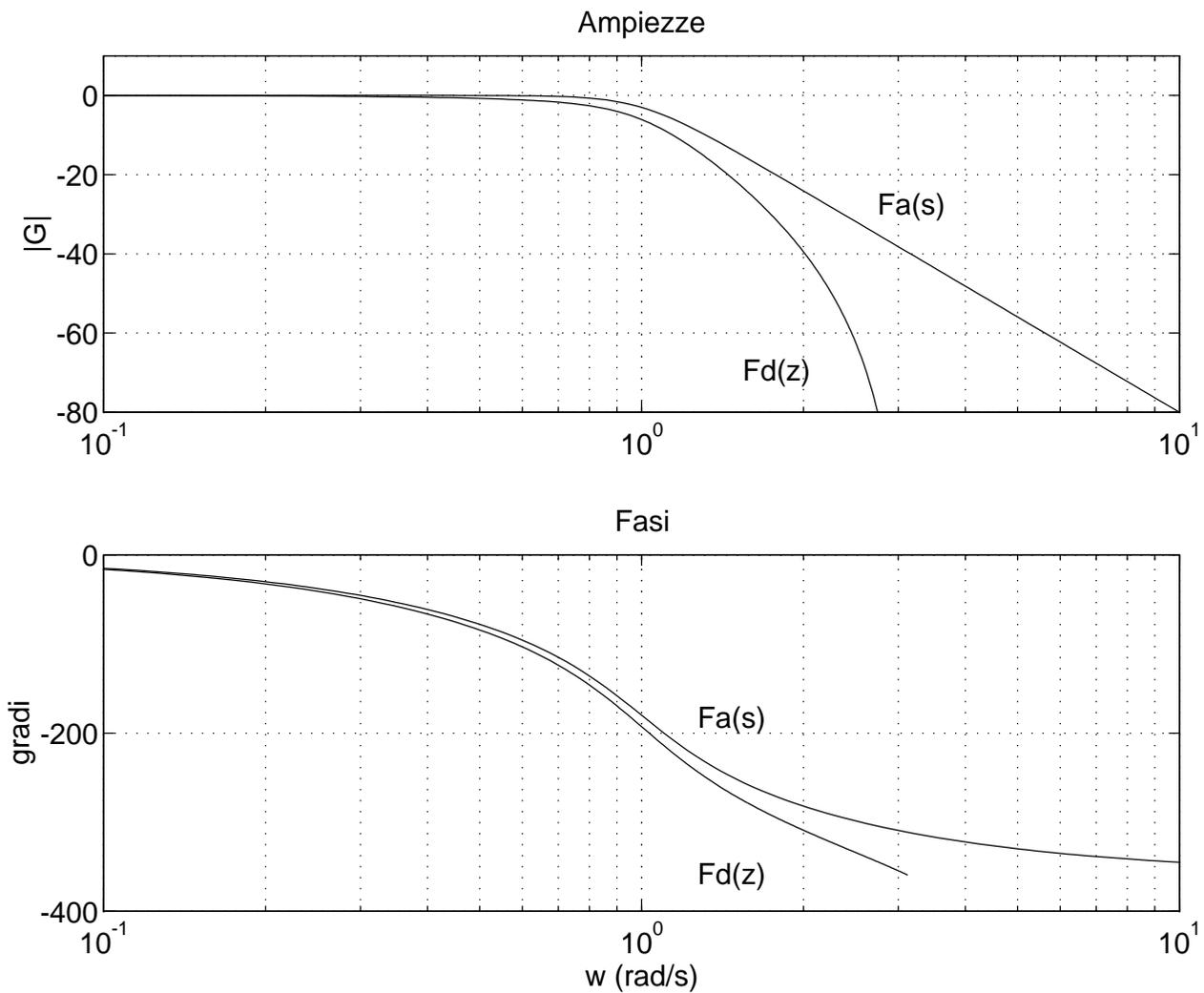
e dopo la discretizzazione del filtro mediante la corrispondenza poli/zeri

$$F_{B,d}(z) = \frac{0.01692(z+1)^4}{[(z-0.4112)^2 + 0.5443^2][(z-0.3683)^2 + 0.1482^2]}$$



Esempio di filtro di Butterworth – 2

Diagramma di Bode del filtro di Butterworth analogico e del suo equivalente digitale

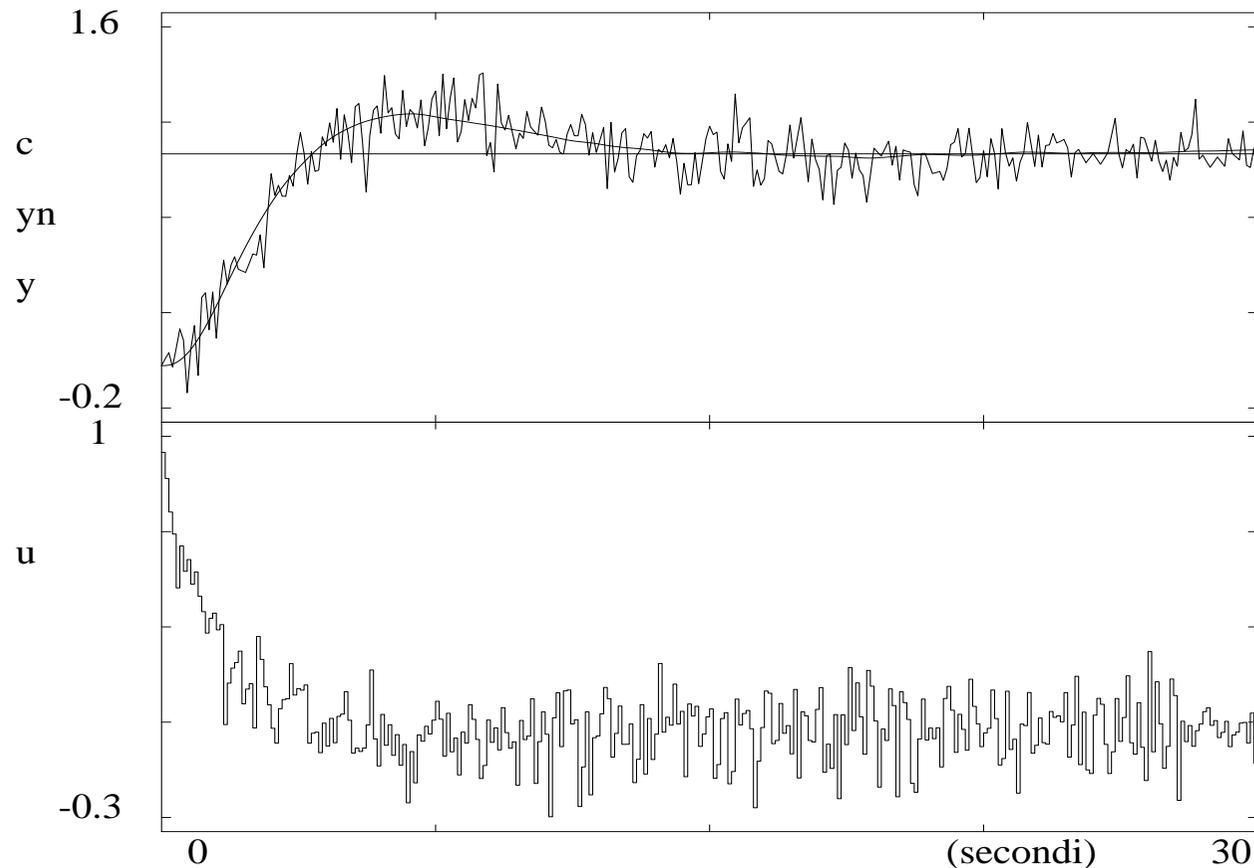


Esempio di filtraggio antialiasing – 1

Processo continuo e relativo regolatore digitale (rete correttiva a ritardo/anticipo)

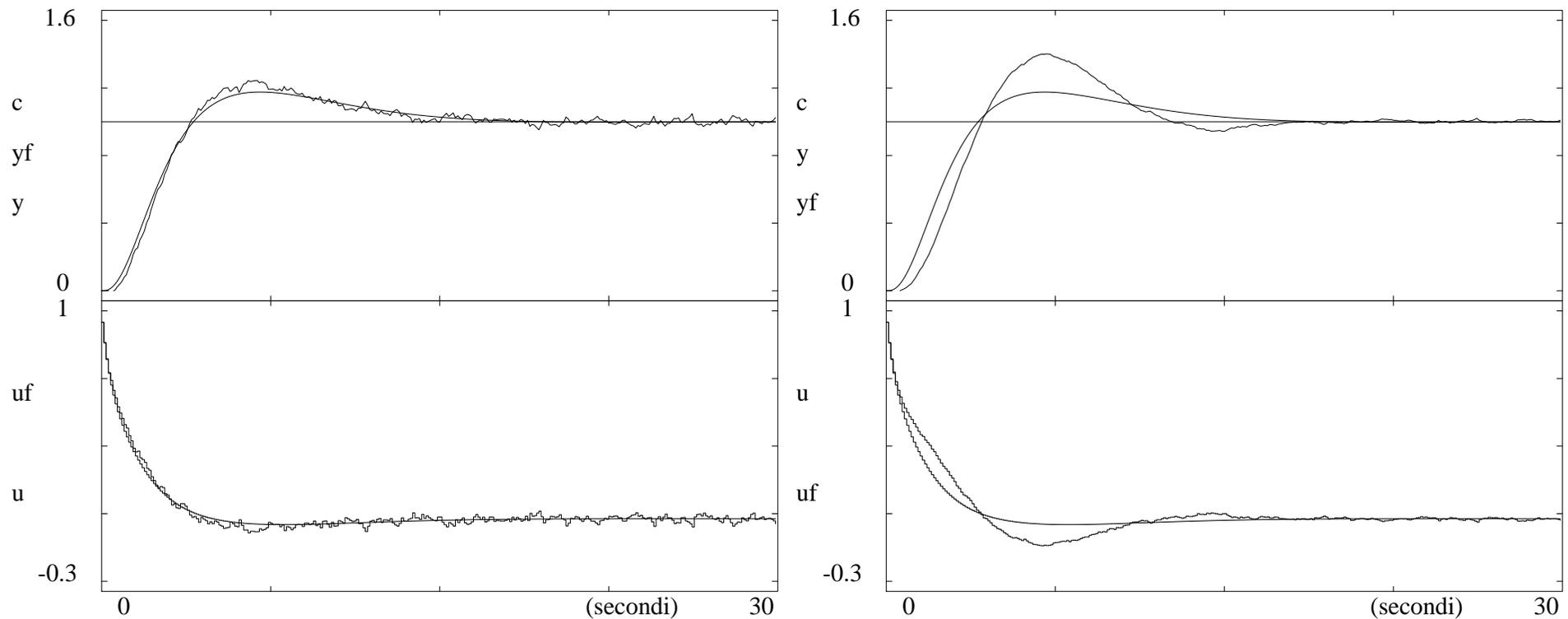
$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \quad D(z) = \frac{0.94527(z-0.97884)(z-0.92433)}{(z-0.80687)(z-0.99216)}$$

Risposta a gradino senza filtri antialiasing, con un rumore gaussiano (varianza 0.1)



Esempio di filtraggio antialiasing – 2

Si introduce un filtro passa basso del primo ordine, con pulsazione di taglio in $1/\tau = 5$ rad/s oppure in $1/\tau = 2$ rad/s

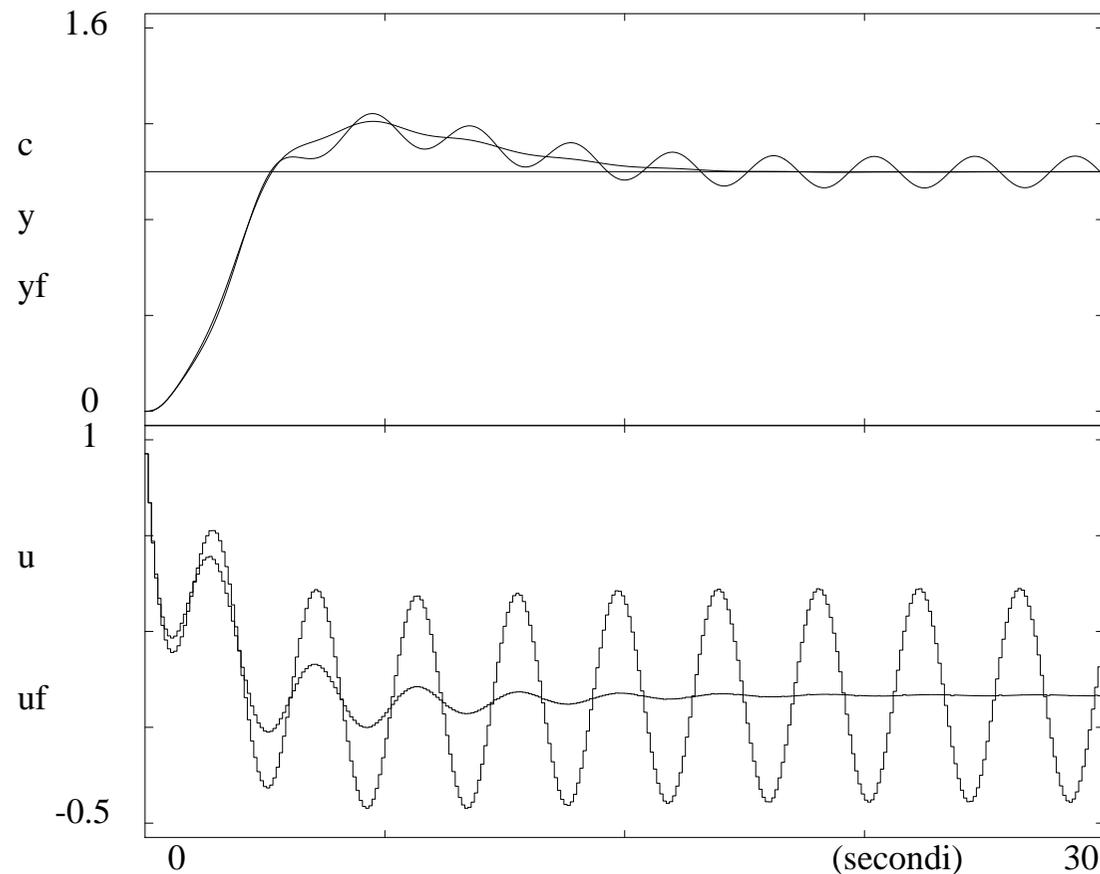


Nel secondo caso si ha un maggior effetto filtrante complessivo, pagato però in termini di minor prontezza e maggior sovraelongazione della risposta indiciale del sistema

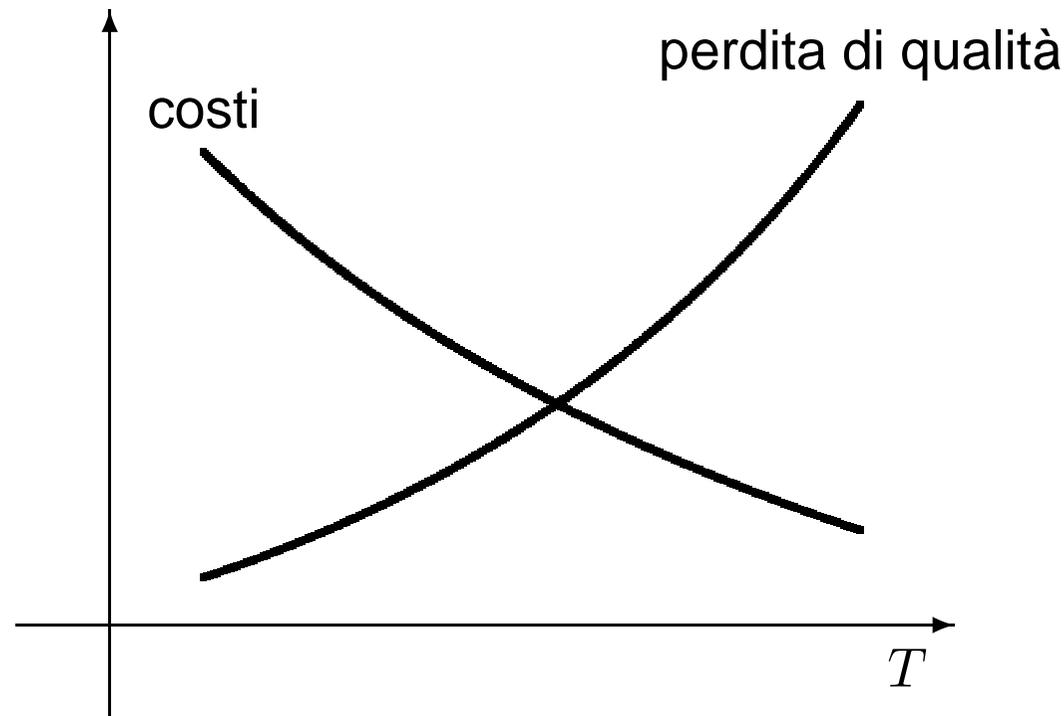
Esempio di filtraggio antialiasing – 3

Nello stesso esempio, si consideri la presenza di un disturbo sinusoidale di ampiezza pari a 0.5 e di frequenza $f = 0.3183 \text{ Hz} = 2 \text{ rad/s}$

Con il filtro notch $F(s) = \frac{s^2 + 4}{s^2 + 0.4s + 4}$, centrato in $\omega = 2 \text{ rad/s}$ e molto selettivo, si ottiene un miglioramento sia sull'uscita controllata che sull'ingresso di controllo



Scelta del periodo di campionamento



Prestazioni (valutazione qualità del controllo)

- inseguimento del riferimento/set-point
- reiezione dei disturbi
- energia di controllo
- ritardi e stabilità
- robustezza a variazioni parametriche

Costi di realizzazione

- uso esclusivo delle capacità di calcolo
- velocità richiesta per la conversione
- velocità richiesta per l'elaborazione
- precisione nella memorizzazione dei parametri e delle variabili

Scelta del periodo di campionamento

Influenza di T sulle prestazioni

- l'effetto di destabilizzazione cresce al crescere di T
- la perdita di informazione sui segnali cresce al crescere di T
- l'accuratezza dell'algoritmo, ottenuto per discretizzazione, cresce al diminuire di T
- l'effetto del rumore di quantizzazione cresce al diminuire di T

La scelta migliore è quindi **il più elevato valore di $T (= 2\pi/\omega_c)$ che garantisca tutte le specifiche** di prestazione assegnate, ossia tale che

- 1) eviti perdita di informazione $\omega_c > 2\omega_b$ (banda passante del sistema ad anello chiuso)
- 2) fornisca una dinamica dolce e senza ritardi $6 < \frac{\omega_c}{\omega_b} < 20$
- 3) sia efficace nella risposta ai disturbi $\omega_c > 2\omega_r$ (max pulsazione disturbi da regolare)
- 4) sia insensibile a variazioni dei parametri $\omega_c < \omega_h$ (dipende dalla realizzazione di $D(z)$)
- 5) gestisca l'effetto di inserimento di filtri $G_f(s)$ anti-aliasing $\frac{\omega_c}{\omega_b} \geq 20$
(il processo finale sarà $G'(z) = \mathcal{Z}[G(s)G_f(s)]$, con pulsazione di filtraggio ω_f tale che $\omega_f/\omega_b = 2 \dots$)

Alcune regole che si trovano nella letteratura tecnica e sono usate nelle applicazioni

a) $T \leq \frac{\tau_{dom}}{10}$ (costante di tempo dominante ad anello aperto)

b) $T \leq \frac{\theta}{4}$ (ritardo finito presente del processo)

c) $T < \frac{T_a}{10}$ (tempo di assestamento nella risposta indiciale)

d) $\frac{2\pi}{T} = \omega_c > 10 \omega_n$ (pulsazione naturale dei poli dominanti ad anello chiuso)