SISTEMI DIGITALI DI CONTROLLO

Prof. Alessandro De Luca

DIS, Università di Roma "La Sapienza"

deluca@dis.uniroma1.it

Lucidi tratti dal libro

C. Bonivento, C. Melchiorri, R. Zanasi: "Sistemi di Controllo Digitale"

Capitolo 2: Strumenti Matematici

Si ringraziano gli autori

Equazioni alle differenze

$$u_k = f(e_0, e_1, \ldots, e_k; u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$$

Se $f(\cdot)$ è lineare e la dipendenza è da un numero finito di valori passati ($n \geq m$)

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - \ldots - a_n u_{k-n} + b_0 e_k + \ldots + b_m e_{k-m}$$

Esempio di ordine $n = 2$ ($m = 0$):

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} + b_0 e_k$$

ponendo (per u_k e, analogamente, e_k)

$$\begin{array}{rcl} u_k & = & u_k \\ \nabla u_k & = & u_k - u_{k-1} \\ \nabla^2 u_k & = & \nabla u_k - \nabla u_{k-1} = u_k - 2u_{k-1} + u_{k-2} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} u_k & = & u_k \\ u_{k-1} & = & u_k - \nabla u_k \\ u_{k-2} & = & u_k - 2\nabla u_k + \nabla^2 u_k \end{array}$$

si ottiene infatti un'equazione alle differenze

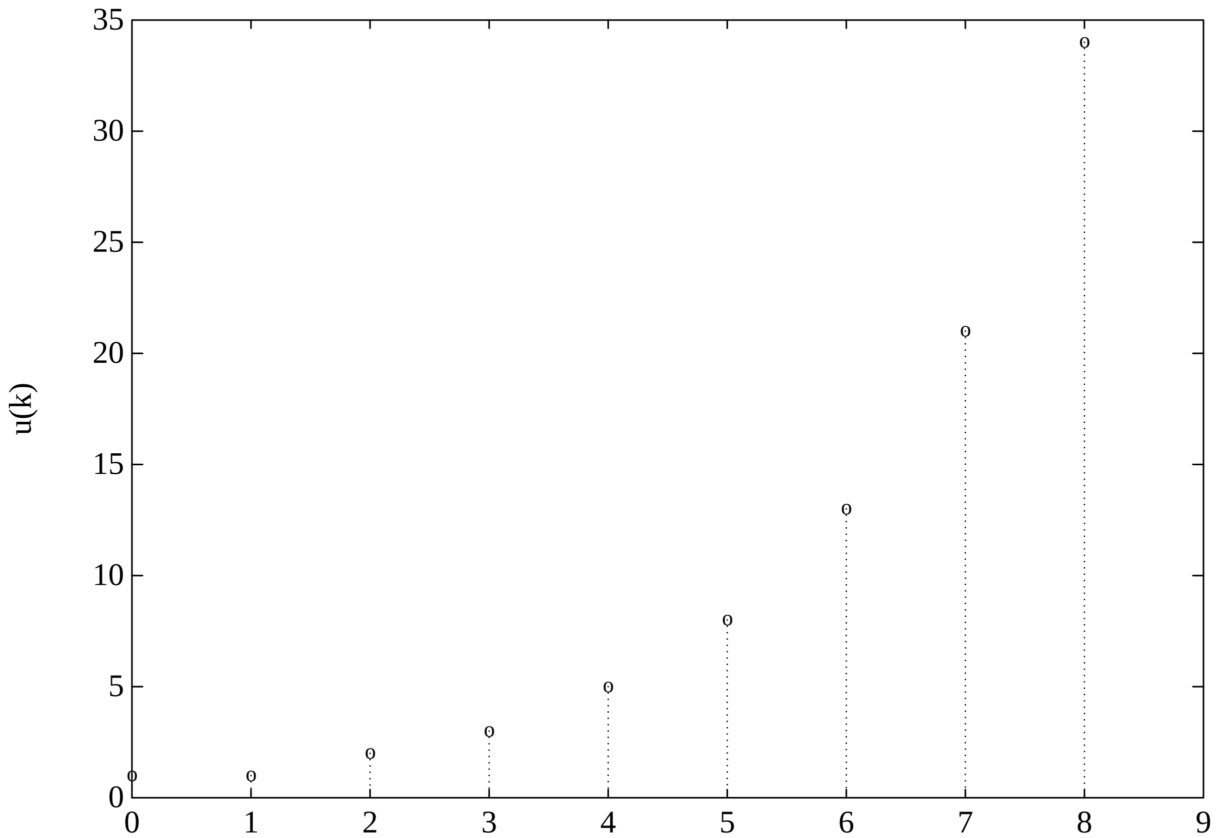
$$a_2 \nabla^2 u_k - (a_1 + 2a_2)\nabla u_k + (a_2 + a_1 + 1) u_k = b_0 e_k$$

Equazioni alle differenze – 1

Soluzione di equazioni alle differenze a coefficienti costanti

$$u_k = u_{k-1} + u_{k-2} \qquad\qquad k \geq 2$$

con $u_0 = u_1 = 1$



(serie di Fibonacci!)

Equazioni alle differenze – 2

Soluzione elementare tipo z^k (equivalente alla forma e^{st} nel tempo continuo):

$$cz^k = cz^{k-1} + cz^{k-2}$$

$$\cdot/cz^{k-2} \quad \Rightarrow \quad z^2 - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$$

quindi in generale la soluzione è della forma:

$$u_k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k$$

con c_1, c_2 determinate dalle condizioni iniziali per $k = 0,\ 1$. Infine si ha

$$u_k = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k$$

Andamento divergente $\Rightarrow$ il sistema è instabile

Se tutte le radici dell'equazione caratteristica sono dentro il cerchio unitario $\Rightarrow$
la corrispondente equazione alle differenze è asintoticamente stabile, cioè la sua soluzione convergerà a zero al crescere del tempo per ogni condizione iniziale limitata

Z-Trasformata – 1

Sia data una sequenza di valori $x_k \in \mathbb{R}$, definita per $k = 0, 1, 2, \ldots$ e nulla per $k < 0$. La $\mathcal{Z}$-trasformata (unilatera) della sequenza x_k è la funzione di variabile complessa z definita come

$$X(z) = \mathcal{Z}[x_k] \quad = \quad x_0 + x_1\, z^{-1} + \cdots + x_k\, z^{-k} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

Nel caso in cui la sequenza di valori x_k sia ottenuta campionando uniformemente con periodo T un segnale continuo descritto dalla funzione $x(t)$, $t \geq 0$, si avrà $x_k = x(kT)$ e

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

L'espressione estesa

$$X(z) = x(0) + x(T)\, z^{-1} + x(2\,T)\, z^{-2} + \cdots + x(k\,T)\, z^{-k} + \cdots$$

implica la specificazione del parametro periodo di campionamento T, da cui dipendono i valori dei campioni della sequenza, cioè i coefficienti della serie

Z-Trasformata – 2

Si scrive $X(z) = \mathcal{Z}[X(s)]$, intendendo $X(z) = \mathcal{Z}\Big[\Big\{\mathcal{L}^{-1}[X(s)]\Big|_{t=kT}\Big\}\Big]$

Nelle applicazioni ingegneristiche la funzione $X(z)$ assume in generale una espressione razionale fratta (o in forma poli/zeri) del tipo

$$X(z) = \frac{b_0\, z^m + b_1\, z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_n} = \frac{b_0(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_n)} \quad (m \leq n)$$

che si può esprimere anche in potenze di z^{-1} (operatore di ritardo)

$$\begin{aligned} X(z) \quad &= \quad \frac{z^n\,(b_0\, z^{-(n-m)} + b_1\, z^{-(n-m+1)} + \cdots + b_m\, z^{-n})}{z^n\,(1 + a_1\, z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n})} \\ &= \quad \frac{b_0\, z^{-(n-m)} + b_1\, z^{-(n-m+1)} + \cdots + b_m\, z^{-n}}{1 + a_1\, z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \end{aligned}$$

Esempio:

$$X(z) = \frac{z(z + 0.5)}{(z + 1)(z + 2)} = \frac{1 + 0.5\, z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2\, z^{-1})} = \frac{1 + 0.5\, z^{-1}}{(1 + 3z^{-1} + 2\, z^{-2})}$$

Z-Trasformate elementari – 1

Impulso discreto unitario. Sia data la funzione (detta anche di Kronecker) $\delta_0(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = 1 + 0\, z^{-1} + 0\, z^{-2} + 0\, z^{-3} + \cdots = 1$$

Gradino unitario. Sia data la funzione gradino unitario

$$x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad h(kT) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}[h(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ serie geometrica di ragione z^{-1} convergente per $|z| > 1$

Z-Trasformate elementari – 2

Rampa unitaria. Sia data la funzione rampa unitaria

$$x(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Poichè $x(kT) = kT, \; k = 0, 1, 2, \ldots,$ la $\mathcal{Z}$-trasformata è

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[t] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} k\, z^{-k} \\ &= T(z^{-1} + 2\,z^{-2} + 3\,z^{-3} + \cdots) \\ &= Tz^{-1}(1 + 2\,z^{-1} + 3\,z^{-2} + \cdots) \\ &= T\,\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = T\,\frac{z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

la serie converge per $|z| > 1$

Z-Trasformate elementari – 3

Funzione potenza a^k. Sia data la sequenza di campioni

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

con a costante reale o complessa. Dalla definizione di $\mathcal{Z}$-trasformata si ha che

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}\left[a^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \\ &= 1 + a\,z^{-1} + a^2\,z^{-2} + a^3\,z^{-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - a\,z^{-1}} = \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

la serie converge per $|z| > |a|$ (si noti che per $a = 1$ si ha il gradino unitario)

Z-Trasformate elementari – 4

Funzione esponenziale. Sia data la funzione

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

con a costante reale o complessa. Poichè $x(kT) = e^{-akT}, k = 0, 1, 2, \ldots,$ si ha

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}\left[e^{-at}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \\ &= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

che converge per $|z| > e^{-Re(a)T}$ (si noti che per $a = 0$ si ha il gradino unitario)

Z-Trasformate elementari – 5

Funzione sinusoidale. Sia data la sinusoide

$$x(t) = \begin{cases} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Dalle formule di Eulero è noto che

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad X(z) &= \mathcal{Z}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T}\, z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T}\, z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{z^{-1}\sin \omega T}{1 - 2z^{-1}\cos \omega T + z^{-2}} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z\cos \omega T + 1} \end{aligned}$$

(la serie sottintesa è convergente per $|z| > 1$)

Funzione cosinusoidale. Sia data la cosinusoide

$$x(t) = \begin{cases} \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[\cos \omega t] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T}) z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{1 - z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \\ &= \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \qquad |z| > 1 \end{aligned}$$

Z-Trasformate elementari – 7

Funzione cosinusoidale smorzata. Sia data la funzione

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
X(z) &= \mathcal{Z}\left[e^{-at} \cos \omega t\right] = \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left[(e^{-at} e^{j\omega t} + e^{-at} e^{-j\omega t})\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{-(a-j\omega)T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-(a+j\omega)T} z^{-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{2 - (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T})e^{-aT} z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}} \\
&= \frac{1 - e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} z^{-2}} \\
&= \frac{z(z - e^{-aT} \cos \omega T)}{z^2 - 2e^{-aT} z \cos \omega T + e^{-2aT}} \qquad |z| > e^{-aT}
\end{aligned}$$

Z-Trasformate elementari – 8

Funzione sinusoidale smorzata. Data la funzione

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}\sin\omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}\left[e^{-at}\sin\omega t\right] \\ &= \frac{e^{-aT}z^{-1}\sin\omega T}{1 - 2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T + e^{-2aT}z^{-2}} \\ &= \frac{e^{-aT}z\sin\omega T}{z^2 - 2e^{-aT}z\cos\omega T + e^{-2aT}} \qquad |z| > e^{-aT} \end{aligned}$$

Le trasformate delle funzioni di maggior interesse sono solitamente riportate in tabelle

Tabella Z-Trasformate – 1 (include quella modificata)

$f(t)$	$\mathcal{L}[s]$	Trasformata $\mathcal{Z}$	Trasformata $\mathcal{Z}$ modificata
$h(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\dfrac{1}{z-1}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$	$\dfrac{mT}{z-1}+\dfrac{T}{(z-1)^2}$
$\dfrac{t^2}{2}$	$\dfrac{1}{s^3}$	$\dfrac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\dfrac{T^2}{2}\left[\dfrac{m^2}{z-1}+\dfrac{2m+1}{(z-1)^2}+\dfrac{2}{(z-1)^3}\right]$
t^{k-1}	$\dfrac{(k-1)!}{s^k}$	$\lim\limits_{a\to 0}(-1)^{k-1}\dfrac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left[\dfrac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$\lim\limits_{a\to 0}(-1)^{k-1}\dfrac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left[\dfrac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right]$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$	$\dfrac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	$\dfrac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$\dfrac{Te^{-amT}\left[e^{-aT}+m(z-e^{-aT})\right]}{(z-e^{-aT})^2}$

Tabella Z-Trasformate – 2 (include quella modificata)

$f(t)$	$\mathcal{L}[s]$	Trasformata $\mathcal{Z}$	Trasformata $\mathcal{Z}$ modificata
$t^k e^{-at}$	$\dfrac{k!}{(s+a)^{k+1}}$	$(-1)^k \dfrac{\partial^k}{\partial a^k}\left[\dfrac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$(-1)^k \dfrac{\partial^k}{\partial a^k}\left[\dfrac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right]$
$1-e^{-at}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$	$\dfrac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	$\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
$t-\dfrac{1-e^{-at}}{a}$	$\dfrac{a}{s^2(s+a)}$	$\dfrac{z[(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]}{a(z-1)^2(z-e^{-aT})}$	$\dfrac{T}{(z-1)^2}+\dfrac{amT-1}{a(z-1)}+\dfrac{e^{-amT}}{a(z-e^{-aT})}$
$1-(1+at)e^{-at}$	$\dfrac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-e^{-aT}}-\dfrac{aTe^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$	$\dfrac{1}{z-1}-\left[\dfrac{1+amT}{z-e^{-aT}}+\dfrac{aTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\dfrac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$	$\dfrac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}-\dfrac{e^{-bmT}}{z-e^{-bT}}$
$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$\dfrac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$	$\dfrac{z\sin amT+\sin(1-m)aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\dfrac{z(z-\cos aT)}{z^2-2z\cos aT+1}$	$\dfrac{z\cos amT-\cos(1-m)aT}{z^2-2z\cos aT+1}$

Uso delle Z-Trasformate elementari

Esempio elementare

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Prima tecnica:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}\left[1 - e^{-t}\right] = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T} z^{-1}} \\ &= \frac{(1 - e^{-T}) z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T} z^{-1})} = \frac{(1 - e^{-T}) z}{(z - 1)(z - e^{-T})} \end{aligned}$$

Seconda tecnica:

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{1+s}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T} z^{-1}} = \ldots \text{idem}$$

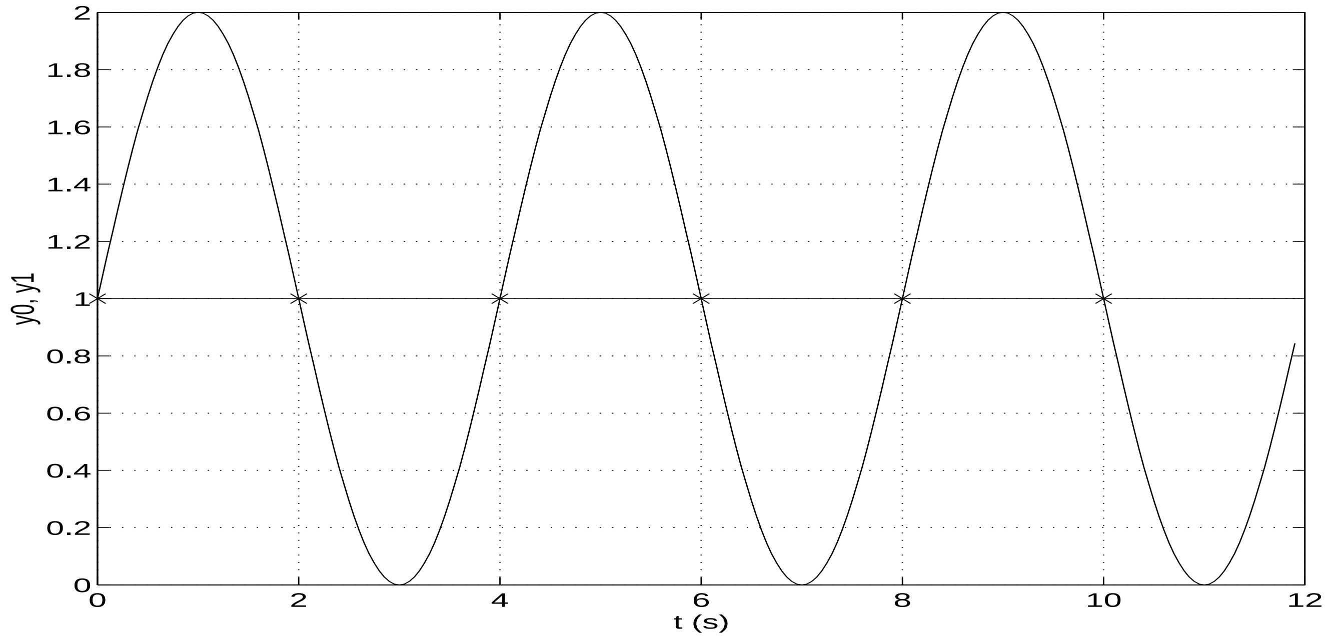
Cautela con la Z-Trasformata

La $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ e la sua sequenza corrispondente $x(k)$ sono legate da una corrispondenza biunivoca

Questo non avviene in genere tra la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ e la sua “inversa” $x(t)$

Data una $X(z)$ si possono in genere avere $x(t)$ multiple che la generano

Infatti, diverse funzioni a tempo continuo possono avere gli stessi valori campionati $x(k)$, ad es. gradino unitario e sinusoide con $\omega = \pi/2$, campionate con $T = 4$ s



Questa ambiguità non sussiste se sono verificate le condizioni restrittive su T dettate dal Teorema di Shannon

Proprietà e teoremi della Z-Trasformata – 1

- Linearità

$$x(k) = af(k) + bg(k)$$

$$X(z) = aF(z) + bG(z)$$

- Moltiplicazione per a^k

Sia $X(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata di $x(t)$, a una costante

$$\mathcal{Z}\left[a^k x(k)\right] = X(a^{-1}z)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[a^k x(k)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)(a^{-1}z)^{-k} \\ &= X(a^{-1}z) \end{aligned}$$

Proprietà e teoremi della Z-Trasformata – 2

- Teorema della traslazione nel tempo

Se $x(t) = 0, t < 0$ e $X(z) = \mathcal{Z}[x(t)]$, si ha per $n = 1, 2, \ldots,$

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n} X(z) \qquad \text{(ritardo)}$$

$$\mathcal{Z}[x(t + nT)] = z^{n} \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right] \qquad \text{(anticipo)}$$

Operativamente

$$z^{-1} x(k) = x(k-1)$$

$$z^{-2} x(k) = x(k-2)$$

$$z\, x(k) = x(k+1)$$

e così via

Proprietà e teoremi della Z-Trasformata – 3

- Dimostrazione nel caso di ritardo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x(t-nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT)z^{-k} \\
&= z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} x((k-n)T)z^{-(k-n)}
\end{aligned}
$$

da cui, ponendo $m = k - n$,

$$
\mathcal{Z}[x(t-nT)] = z^{-n}\sum_{m=-n}^{\infty} x(mT)z^{-m}
$$

e poichè $x(mT) = 0$ per $m < 0$, allora si può scrivere

$$
\mathcal{Z}[x(t-nT)] = z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} x(mT)z^{-m} = z^{-n}X(z) \qquad \text{q.e.d.}
$$

Proprietà e teoremi della Z-Trasformata – 4

- Dimostrazione nel caso di anticipo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x(t+nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT)z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} x((k+n)T)z^{-(k+n)} \\
&= z^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} x((k+n)T)z^{-(k+n)} + \sum_{m=0}^{n-1} x(mT)z^{-m} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right] \\
&= z^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right] \\
&= z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right] \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

Proprietà e teoremi della Z-Trasformata – 5

- Teorema del valore iniziale

Se $X(z)$ è la $\mathcal{Z}$-trasformata di $x(t)$ e se esiste il

$$\lim_{z \to \infty} X(z)$$

allora il valore iniziale $x(0)$ di $x(t)$ è dato da

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Infatti, si noti che

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \cdots$$

Proprietà e teoremi della Z-Trasformata – 6

- Teorema del valore finale

Siano tutti i poli di $X(z)$ interni al cerchio unitario, con al più un polo semplice per $z = 1$ (nel qual caso, si ponga $X(z) = X'(z)/(z-1)$). Allora

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}\left[(1 - z^{-1})X(z)\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{z-1}{z}X(z)\right]$$

Infatti

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} = X(z) - z^{-1}X(z)$$

e quindi

$$\lim_{z\to 1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left[x(k) - x(k-1)\right]$$

$$= [x(0) - x(-1)] + [x(1) - x(0)] + [x(2) - x(1)] + \cdots$$

$$= \lim_{k\to\infty} x(k) \begin{cases} = x(\infty) = X'(1) & \text{se presente polo semplice in } z = 1 \\ = 0 & \text{else} \end{cases}$$

Proprietà e teoremi della Z-Trasformata – 7

Esempio: Si consideri la trasformata di un segnale $x(t)$, campionato con T, data dalla

$$X(z) = \frac{Tz(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)} \qquad \left(X'(z) = \frac{Tz(z+1)}{2(z-0.5)} \right)$$

Il valore iniziale della sequenza $x(kT)$ è quindi dato da (usando due volte de L'Hospital)

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = \frac{T}{2}$$

mentre il valore finale è dato da

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} x(kT) &= \lim_{z\to 1} (1-z^{-1}) \frac{Tz(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)} \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{T(z+1)}{2(z-0.5)} = 2T \quad (= X'(1)) \end{aligned}$$

Proprietà e teoremi della Z-Trasformata – 8

- Differenziazione (nel dominio complesso)

$$\mathcal{Z}[k\, x(k)] = -z \frac{d}{d\, z} X(z)$$

$$\mathcal{Z}[k^m\, x(k)] = \left(-z \frac{d}{d\, z}\right)^m X(z)$$ (la $(\ldots)$ va intesa come operatore)

Esempio: Essendo la $\mathcal{Z}$-trasformata del gradino unitario

$$\mathcal{Z}[h(k)] = \frac{1}{1 - z^{-1}} \; \left(= \frac{z}{z-1}\right)$$

per ottenere la trasformata del segnale rampa unitaria

$$x(k) = kT, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mathcal{Z}[kT\, h(k)] = -T z \frac{d}{d\, z} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right) = T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \; \left(= T \frac{z}{(z-1)^2}\right)$$

Proprietà e teoremi della Z-Trasformata – 9

- Integrazione (nel dominio complesso)

Si consideri la sequenza

$$g(k) = \frac{x(k)}{k}$$

dove $x(k)/k$ è finito per $k = 0$, e sia $\mathcal{Z}[x(k)] = X(z)$

La $\mathcal{Z}$-trasformata di $x(k)/k$ è data da

$$\mathcal{Z}\left[\frac{x(k)}{k}\right] = \int_z^{\infty} \frac{X(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \lim_{k\to 0} \frac{x(k)}{k}$$

- Teorema della convoluzione (nel dominio reale, ossia del tempo)

Siano date due funzioni $x_1(t), x_2(t)$, con $x_1(t) = x_2(t) = 0,\ t < 0$, e relative $\mathcal{Z}$-trasformate $X_1(z), X_2(z)$. Allora

$$X_1(z)X_2(z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT - hT)\right]$$

Per la dimostrazione, si noti che

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(h)x_2(k-h)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{k} x_1(h)x_2(k-h)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} x_1(h)x_2(k-h)z^{-k}$$

in quanto $x_2(k-h) = 0,\ h > k$. Definendo $m = k - h$, si ha

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(h)x_2(k-h)\right] = \sum_{h=0}^{\infty} x_1(h)z^{-h}\sum_{m=0}^{\infty} x_2(m)z^{-m}$$

q.e.d.

Proprietà e teoremi della Z-Trasformata – 11

- Teorema della convoluzione (nel dominio complesso, ossia della trasformata $\mathcal{Z}$)

Siano date due successioni $x_1(k), x_2(k)$, nulle per $k < 0$. Siano $X_1(z)$ e $X_2(z)$ le trasformate delle due successioni e R_1, R_2 i rispettivi raggi di convergenza. Allora la $\mathcal{Z}$-trasformata del prodotto $x_1(k)x_2(k)$ è data da

$$\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \zeta^{-1}X_2(\zeta)X_1(\zeta^{-1}z)d\zeta, \quad \text{dove } R_2 < |\zeta| < |z|/R_1 \ (*)$$

- Teorema di Parseval

Nelle stesse ipotesi precedenti, se $|z| = 1$ verifica $(*)$, allora si ha

$$[\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)]]_{|z|=1} = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)x_2(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \zeta^{-1}X_2(\zeta)X_1(\zeta^{-1}z)d\zeta$$

Per $x_1(k) = x_2(k) = x(k)$, si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^2(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \zeta^{-1}X(\zeta)X(\zeta^{-1})d\zeta = \frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-1}X(z)X(z^{-1})dz$$

Proprietà e teoremi della Z-Trasformata – 12

- Trasformazione di funzioni periodiche

Sia data una successione $x_p(k)$ periodica di periodo pT e sia $x(k)$ la successione dei campioni del primo periodo e nulla per $k > p$

$$x(k) = \begin{cases} x_p(k) & k = 0, \ldots, p \\ 0 & k > p \end{cases}$$

Se $X(z)$ è la $\mathcal{Z}$-trasformata di $x(k)$, allora vale

$$X_p(z) = \mathcal{Z}[x_p(k)] = \frac{z^p}{z^p - 1} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-p}} X(z)$$

Antitrasformata Z

Permette di passare da una $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ alla corrispondente sequenza x_k e possibilmente alla funzione continua $x(t)$ cui corrisponde per campionamento la sequenza x_k

$$X(z) \quad \xleftrightarrow[\text{biunivoca}]{\qquad\qquad} \quad x(k) \quad \xleftarrow[\text{non biunivoca}]{\qquad\qquad} \quad x(t)$$

Se è soddisfatto il Teorema di Shannon sul campionamento, la funzione continua $x(t)$ può essere univocamente determinata a partire dalla sequenza x_k

Diversi metodi per antitrasformare una funzione $X(z)$

1. Metodo della lunga divisione
2. Metodo computazionale
3. Metodo della scomposizione in fratti semplici
4. Metodo dell'integrale di inversione

Antitrasformata Z: Metodo della lunga divisione – 1

Poiché la $X(z)$ è espressa come serie di potenze

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots$$

si divide il polinomio $N(z)$ a numeratore di $X(z)$ per il polinomio $D(Z)$ a denominatore con la nota regola (di Eulero)

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots$$

da cui si ricava che

$$x(0) = q_0, \qquad x(T) = q_1, \qquad x(2\,T) = q_2, \qquad \dots$$

Antitrasformata Z: Metodo della lunga divisione – 2

Esempio:

$$X(z) = \frac{3}{(1-z^{-1})^2(1-0.5\,z^{-1})} = \frac{6}{2-5\,z^{-1}+4\,z^{-2}-z^{-3}} = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{h=0}^{\infty} q_h z^{-h}$$

$$\begin{array}{rllllll|l}
N(z) = & 6 & & & & & & \underline{D(z)} \\
 & 6 & -15z^{-1} & +12z^{-2} & -3z^{-3} & & & 3 = q_0 \\
R_0(z) = & & +15z^{-1} & -12z^{-2} & +3z^{-3} & & & \\
 & & +15z^{-1} & -37.5z^{-2} & +30z^{-3} & -7.5z^{-4} & & 7.5 = q_1 \\
R_1(z) = & & & +25.5z^{-2} & -27z^{-3} & +7.5z^{-4} & & \\
 & & & +25.5z^{-2} & -63.75z^{-3} & +51z^{-4} & -12.75z^{-5} & 12.75 = q_2 \\
R_2(z) = & & & & +36.75z^{-3} & -43.5z^{-4} & +12.75z^{-5} & \\
 & & & & & & \ldots & \ldots
\end{array}$$

trovando i quozienti q_i in sequenza e procedendo con la divisione dei resti $R_i(z)$, si ottiene

$$X(z) = 3 + 7.5\,z^{-1} + 12.75\,z^{-2} + 18.375\,z^{-3} + \ldots$$

$$x(0) = 3, \qquad x(1) = 7.5, \qquad x(2) = 12.75, \qquad x(3) = 18.375, \qquad \ldots$$

Antitrasformata Z: Metodo computazionale

Valori numerici ottenuti in successione da un programma di calcolo. Esempio:

$$X(z) = \frac{3}{-0.5z^{-3} + 2z^{-2} - 2.5z^{-1} + 1} \qquad (\cdot\, U(z) = 1 \text{ impulso discreto unitario})$$

$$X(z) = \frac{3}{-0.5z^{-3} + 2z^{-2} - 2.5z^{-1} + 1} U(z)$$

$$X(z) \left(1 - 2.5z^{-1} + 2z^{-2} - 0.5z^{-3}\right) = 3\, U(z)$$

$$x(k) = 2.5\, x(k-1) - 2\, x(k-2) + 0.5\, x(k-3) + 3\, u(k)$$

Posto $u(0) = 1$ e $u(k) = 0$ per $k > 0$, ed essendo $x(-1) = x(-2) = x(-3) = 0$, si ha in modo ricorsivo (equazione alle differenze)

$$\begin{aligned}
x(0) &= 3 \\
x(1) &= 2.5\, x(0) = 7.5 \\
x(2) &= 2.5\, x(1) - 2\, x(0) = 12.75 \\
x(3) &= 2.5\, x(2) - 2\, x(1) + 0.5\, x(0) = 18.375 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Antitrasformata Z: Metodo della scomposizione in fratti semplici

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}, \qquad m < n \quad \text{(perché se } m = n, \ldots\text{)}$$

Caso 1: Se tutti i poli sono semplici, si pone

$$X(z) = \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z-p_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{z-p_i}$$

dove i coefficienti c_i, detti residui, vengono calcolati come $c_i = \left[(z-p_i)X(z)\right]_{z=p_i}$

Se inoltre nella espressione di $X(z)$ compare almeno uno zero nell'origine, si utilizza la funzione $X(z)/z$ e quindi

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z-p_1} + \cdots + \frac{c_n}{z-p_n} \qquad \Leftrightarrow \quad c_i = \left[(z-p_i)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_i}$$

Quando sono presenti poli complessi coniugati, i coefficienti c_i sono anch'essi complessi e si ricorre alle formule di Eulero per ottenere funzioni trigonometriche. L'espressione finale cercata è allora

$$x(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, p_i^k$$

Antitrasformata Z: Metodo della scomposizione in fratti semplici

Esempio: Antitrasformare la funzione

$$X(z) = \frac{2z^2 - 1.6z}{z^2 - 1.6z + 0.6} = \frac{z(2z - 1.6)}{(z-1)(z-0.6)} \qquad \left(\text{o anche} = 2 + \frac{1.6z - 1.2}{(z-1)(z-0.6)}\right)$$

Si ha che

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-0.6} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-0.6}$$

da cui

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-0.6}$$

e dalle tabelle

$$x(k) = 1 + 0.6^k \quad \Rightarrow \quad x(0) = 2,\ x(1) = 1.6,\ x(2) = 1.36,\ \ldots$$

Allo stesso risultato si sarebbe ovviamente arrivati dividendo e lavorando con il resto (funzione razionale strettamente propria)

Antitrasformata Z: Metodo della scomposizione in fratti semplici

Caso 2: Se $X(z)$, ovvero $X(z)/z$, ha h poli p_i ognuno di molteplicità $r_i \geq 1$, con $r_j > 1$ per almeno un indice $j \in \{1, \ldots, h\}$ e $\sum_{i=1}^{h} r_i = n$

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)^{r_1} (z - p_2)^{r_2} \cdots (z - p_h)^{r_h}}$$

allora si può porre

$$X(z) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{c_{ik}}{(z - p_i)^{r_i - k + 1}}$$

dove i residui generalizzati c_{ik} si calcolano come

$$c_{ik} = \left[\frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - p_i)^{r_i} X(z) \right]_{z = p_i}$$

$$i = 1, \ldots, h; \;\; k = 1, \ldots, r_i$$

Antitrasformata Z: Metodo della scomposizione in fratti semplici

Esempio di scomposizione: Si consideri la funzione

$$X(z) = \frac{1}{z^4 + 6z^3 + 13z^2 + 12z + 4} = \frac{1}{(z+2)^2(z+1)^2}$$

Si ha

$$X(z) = \frac{c_{11}}{(z+2)^2} + \frac{c_{12}}{z+2} + \frac{c_{21}}{(z+1)^2} + \frac{c_{22}}{z+1}$$

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \left[(z+2)^2 X(z)\right]_{z=-2} = 1 \\
c_{12} &= \left[\frac{d}{dz}(z+2)^2 X(z)\right]_{z=-2} = 2 \\
c_{21} &= \left[(z+1)^2 X(z)\right]_{z=-1} = 1 \\
c_{22} &= \left[\frac{d}{dz}(z+1)^2 X(z)\right]_{z=-1} = -2
\end{aligned}$$

Antitrasformata Z: Metodo della scomposizione in fratti semplici

Esempio: Antitrasformare la funzione

$$X(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 2.1z^{-1} + 1.2z^{-2} - 0.1z^{-3}} = \frac{z}{z^3 - 2.1z^2 + 1.2z - 0.1} = \frac{z}{(z-0.1)(z-1)^2}$$

Si ha che

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z-0.1} + \frac{c_{21}}{(z-1)^2} + \frac{c_{22}}{z-1}$$

$$c_1 = \left[(z-0.1)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=0.1} = \frac{1}{0.81} = 1.234567$$

$$c_{21} = \left[(z-1)^2\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = \frac{10}{9} = 1.111111 \qquad c_{22} = \left[\frac{d}{dz}(z-1)^2\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = -\frac{1}{0.81}$$

quindi

$$X(z) = \frac{1.234567z}{z-0.1} + \frac{1.111111z}{(z-1)^2} - \frac{1.234567z}{z-1}$$

e dalle tabelle

$$x(k) = 1.234567\left((0.1)^k - 1\right) + 1.111111\,k$$

Antitrasformata Z: Metodo dell'integrale di convoluzione

Inversione basata sull'integrale di convoluzione (il metodo formale più generale)

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Si può applicare il teorema dei residui ($C =$ curva che racchiude tutti i poli di $X(Z)$)

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = \sum_{i=1}^{m} k_i$$

Per poli (di $X(z)z^{k-1}$) semplici

$$k_i = \lim_{z \to p_i} \left[(z - p_i) X(z) z^{k-1} \right]$$

Per poli (di $X(z)z^{k-1}$) aventi molteplicità r_i

$$k_i = \frac{1}{(r_i - 1)!} \lim_{z \to p_i} \frac{d^{r_i - 1}}{dz^{r_i - 1}} \left[(z - p_i)^{r_i} X(z) z^{k-1} \right]$$

- È un metodo conveniente se $X(z)z^{k-1}$ non ha poli nell'origine

Antitrasformata Z: Metodo dell'integrale di convoluzione

Esempio 1 (poli semplici): Calcolare $x(kT)$ da

$$X(z) = \frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

$$\Rightarrow \qquad X(z)z^{k-1} = \frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

$$x(kT) = \sum_{i=1}^{2}\left[\text{residuo di } \frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})} \text{ in } z = p_i\right] = k_1 + k_2$$

dove i residui sono

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})}\right] = 1 \\ k_2 &= \lim_{z\to e^{-aT}}\left[(z-e^{-aT})\frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})}\right] = -e^{-akT} \end{aligned}$$

Antitrasformata Z: Metodo dell'integrale di convoluzione

Esempio 2 (poli multipli): Calcolare $x(kT)$ da $X(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$

$$\Rightarrow \quad X(z)z^{k-1} = \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$$

$$x(kT) = \sum_{i=1}^{2}\left[\text{residuo di } \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})} \text{ in } z = p_i\right] = k_1 + k_2$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= \lim_{z \to e^{-aT}} \left[(z-e^{-aT})\frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}\right] = \frac{e^{-a(k+1)T}}{(1-e^{-aT})^2} \\
k_2 &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z \to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}\right] \\
&= \frac{k+1}{1-e^{-aT}} - \frac{1}{(1-e^{-aT})^2}
\end{aligned}$$

Antitrasformata Z: Metodo dell'integrale di convoluzione

Esempio 3 (assenza di zeri in $z = 0$): Antitrasformare la funzione

$$X(z) = \frac{10}{(z-1)(z-2)}$$

Si noti che ora la funzione

$$X(z)z^{k-1} = \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}$$

per $k = 0$, ha 3 poli (semplici) in $z = 0, z = 1, z = 2$

$$X(z)z^{k-1}\Big|_{k=0} = \frac{10}{z(z-1)(z-2)}$$

mentre per $k > 0$, ha solo 2 poli in $z = 1, z = 2$

Questi due casi vanno quindi considerati separatamente

Antitrasformata Z: Metodo dell'integrale di convoluzione

Esempio 3 (continua)

Caso $k = 0$. Si ottiene

$$x(0) = \sum_{i=1}^{3} \left[\text{residuo di } \frac{10}{z(z-1)(z-2)} \text{ nel polo } z = p_i \right]$$

dove i residui valgono

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{z \to 0} \left[z \, \frac{10}{z(z-1)(z-2)} \right] = 5 \\ k_2 &= \lim_{z \to 1} \left[(z-1) \frac{10}{z(z-1)(z-2)} \right] = -10 \\ k_3 &= \lim_{z \to 2} \left[(z-2) \frac{10}{z(z-1)(z-2)} \right] = 5 \end{aligned}$$

e quindi

$$x(0) = k_1 + k_2 + k_3 = 5 - 10 + 5 = 0$$

Esempio 3 (continua)

Caso $k > 0$. Si ottiene ora

$$x(k) = \sum_{i=1}^{2} \left[\text{residuo di } \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \text{ nel polo } z = p_i \right]$$

dove i residui valgono

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{z\to 1} \left[(z-1)\frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \right] = -10 \\ k_2 &= \lim_{z\to 2} \left[(z-2)\frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \right] = 10(2^{k-1}) \end{aligned}$$

e quindi

$$x(k) = k_1 + k_2 = -10 + 10(2^{k-1}) = 10(2^{k-1} - 1)$$

In definitiva, si ottiene

$$x(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 10(2^{k-1} - 1) & k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$