

SISTEMI DIGITALI DI CONTROLLO

Prof. Alessandro De Luca

DIS, Università di Roma “La Sapienza”

deluca@dis.uniroma1.it

Lucidi tratti dal libro

C. Bonivento, C. Melchiorri, R. Zanasi: “Sistemi di Controllo Digitale”

Capitolo 3: Campionamento e ricostruzione

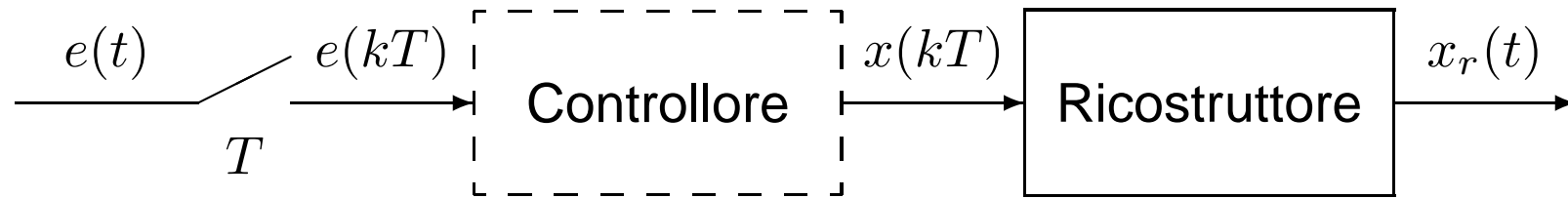
Si ringraziano gli autori

Campionamento e ricostruzione

I sistemi in retroazione con controllo digitale sono caratterizzati da una parte continua (il processo da controllare) e una parte discreta (il controllore digitale)

Sono quindi presenti sia variabili a tempo discreto sia variabili a tempo continuo

I dispositivi di **interfaccia** sono il **campionatore** e il **ricostruttore** (o organo di tenuta)



Il più semplice ricostruttore è quello di **ordine zero** (Zero-Order Hold = ZOH). Per

$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) [h(t - kT) - h(t - (k+1)T)] \quad (x(t) = 0, \forall t < 0)$$

$$X_r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left[\frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} \right] = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

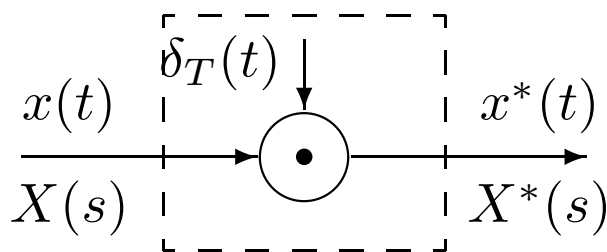
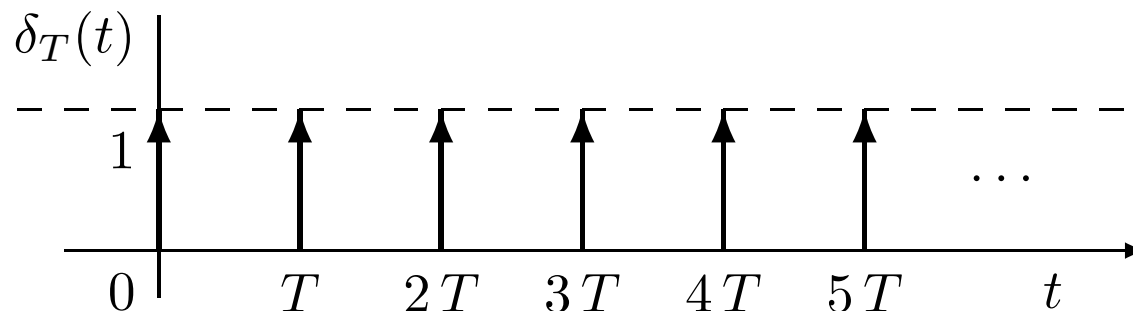
Campionamento impulsivo – 1

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

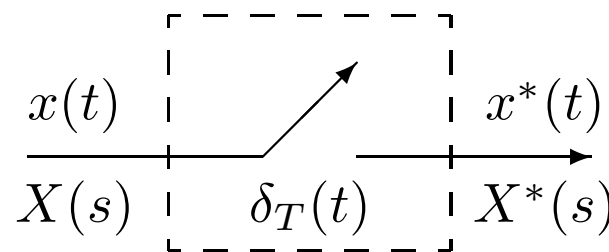
$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

$$x^*(t) = \mathcal{L}^{-1}[X^*(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) = x(t)\delta_T(t)$$

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$



↔

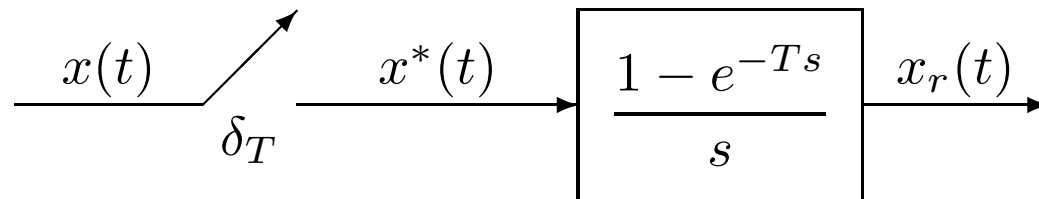
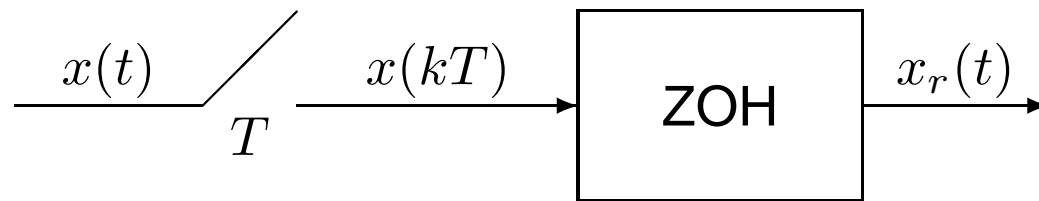


Campionamento impulsivo – 2

Il campionatore impulsivo è un modello **ideale** di quello reale (convertitore A/D, con sampling and hold) ed è adeguato alle esigenze di analisi/progetto di controllori digitali

L'uscita del ricostruttore di ordine zero vale

$$X_r(s) = H_0(s) X^*(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} X^*(s)$$



$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

$$z = e^{sT} \iff s = \frac{1}{T} \ln z \Rightarrow X^*(s) \Big|_{s = \frac{1}{T} \ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = X(z)$$

Campionamento impulsivo – 3

La trasformata \mathcal{Z} della sequenza $x(kT)$, anzichè la trasformata di Laplace del segnale $x^*(t)$, permette di operare con **funzioni razionali** fratte. Dalla

$$x^*(t) = x(t) \delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (x(t) = 0, \forall t < 0)$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t} \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

con $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ nello **sviluppo in serie di Fourier** del segnale periodico $\delta_T(t)$, segue

$$x^*(t) = x(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jn\omega_s t}$$

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[x(t) e^{jn\omega_s t}] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s - jn\omega_s)$$

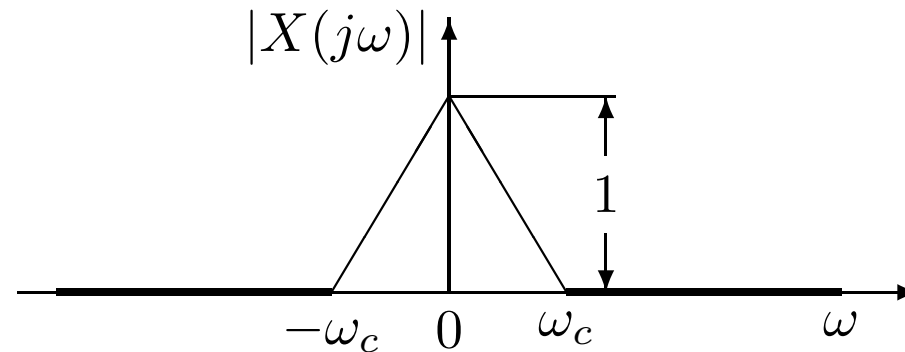
A meno della costante moltiplicativa $1/T$, la trasformata di Laplace $X^*(s)$ del segnale campionato si ottiene dalla somma degli infiniti termini $X(s - jn\omega_s)$, ciascuno dei quali si ottiene dalla $X(s)$ mediante traslazione di $jn\omega_s$ nel campo complesso

Campionamento impulsivo – 4

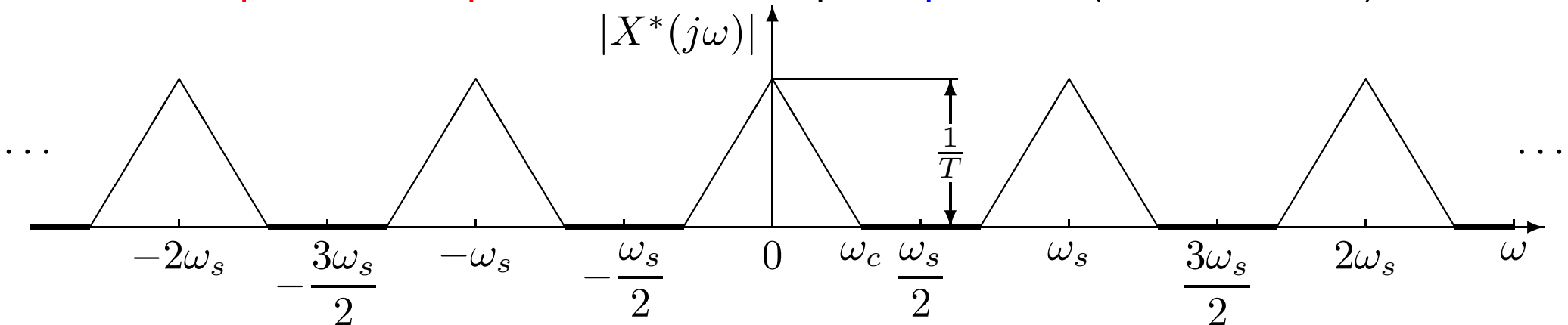
L'andamento spettrale (in frequenza) del segnale campionato è il seguente

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - j n\omega_s)$$

Per un segnale $x(t)$ **a banda limitata** (nessuna componente frequenziale oltre la pulsazione ω_c)



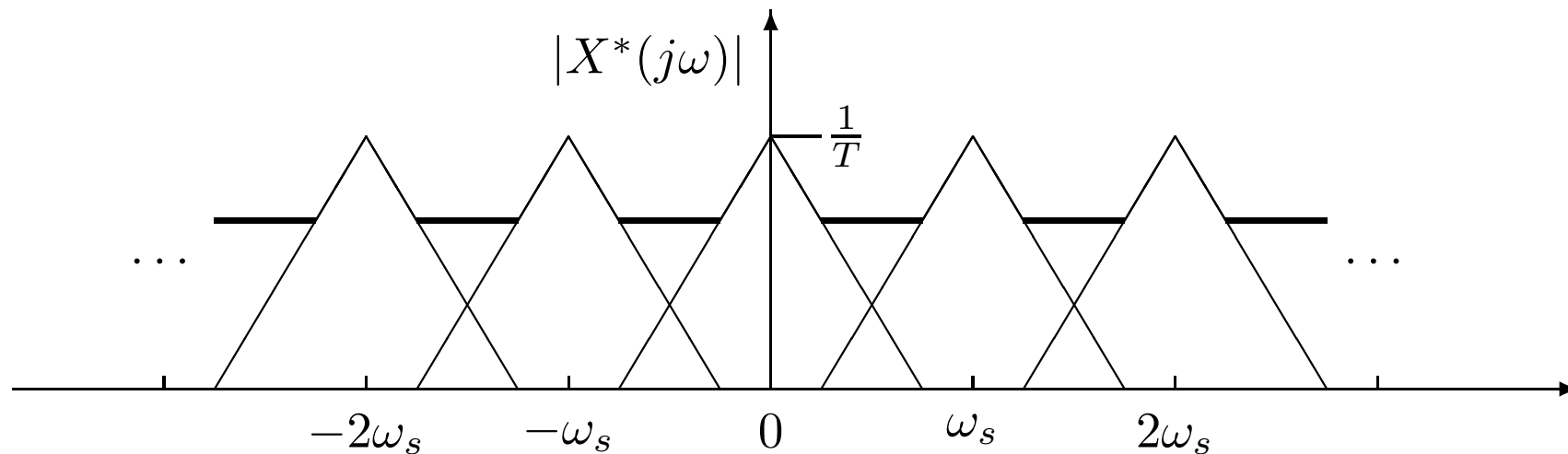
si hanno **componenti complementari** oltre a quella **primaria** (in banda base)



Ricostruttore di ordine zero e campionamento impulsivo

La condizione $\omega_s > 2\omega_c$ mantiene distinto lo spettro originario dalle componenti complementari per cui, mediante filtraggio, è possibile ricostruire completamente il segnale $x(t)$ a partire da quello campionato $x^*(t)$

Nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ **non** sia rispettata



lo spettro originario è parzialmente sovrapposto alle componenti complementari contigue per cui, mediante filtraggio, non è più possibile ricavare il segnale originario a partire dal segnale campionato

Teorema di Shannon – 1

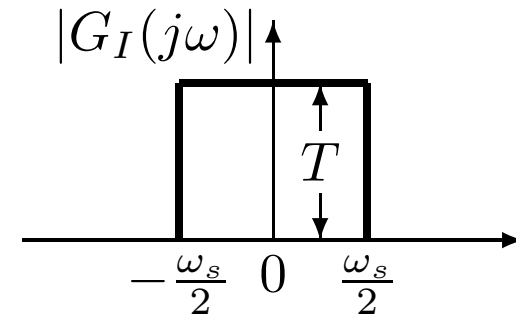
Sia $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ la pulsazione di campionamento ($T =$ periodo di campionamento) e sia ω_c la più alta componente spettrale del segnale a tempo continuo $x(t)$. Il segnale $x(t)$ è completamente ricostruibile a partire dal segnale campionato $x^*(t)$ **se e solo se** la pulsazione ω_s è maggiore del doppio della pulsazione ω_c

$$\omega_s > 2\omega_c$$



Ricostruzione mediante **filtro ideale**

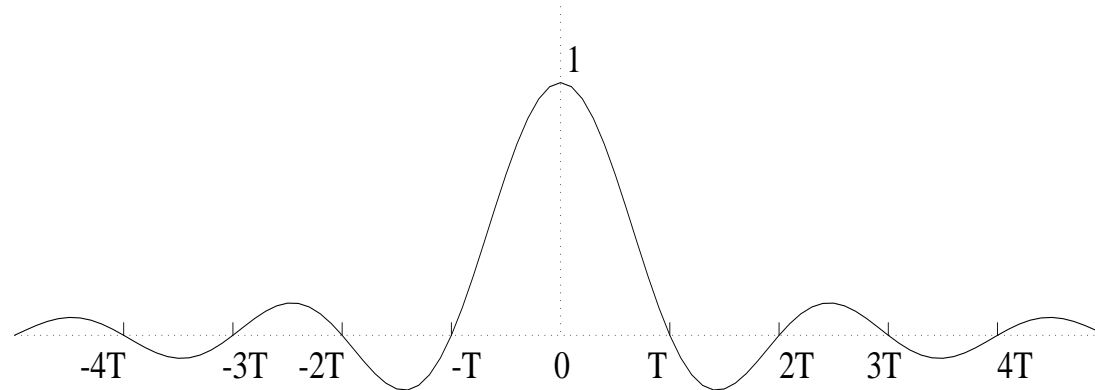
$$G_I(j\omega) = \begin{cases} T & -\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Teorema di Shannon – 2

Il filtro ideale $G_I(j\omega)$ non è fisicamente realizzabile. La sua risposta impulsiva è infatti **non causale** e vale (dalla trasformata inversa di Fourier)

$$\begin{aligned} g_I(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_I(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{\sin(\omega_s t/2)}{\omega_s t/2} \end{aligned}$$



Formula di ricostruzione (di Shannon)

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) g_I(t - \tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT) \frac{\sin(\omega_s(t - \tau)/2)}{\omega_s(t - \tau)/2} d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin(\omega_s(t - kT)/2)}{\omega_s(t - kT)/2} \end{aligned}$$

Occorrono quindi tutti i campioni $x(kT)$ **passati e futuri** ...

Si usano pertanto ricostruttori causali e facilmente realizzabili

Fenomeno dell'aliasing – 1

L'**aliasing** è il fenomeno per il quale, mediante campionamento, si generano **nuove** componenti spettrali (armoniche) alla stessa frequenza della componente spettrale di partenza, impedendo la corretta ricostruzione del segnale originario

Si può avere aliasing solo nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ del teorema di Shannon non sia verificata

Esempio 1: Si considerino i due segnali

$$\begin{cases} x(t) &= \sin(\omega_0 t + \theta) \\ y(t) &= \sin((\omega_0 + n\omega_s)t + \theta) \end{cases}$$

aventi stessa fase θ e pulsazione che differisce per un multiplo intero n di $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

Se i due segnali vengono campionati

$$\begin{cases} x(kT) &= \sin(\omega_0 kT + \theta) \\ y(kT) &= \sin((\omega_0 + n\omega_s)kT + \theta) \\ &= \sin(\omega_0 kT + 2k\pi n + \theta) \\ &= \sin(\omega_0 kT + \theta) \end{cases}$$

i valori dei campioni $x(kT) = y(kT)$ coincidono per ogni k

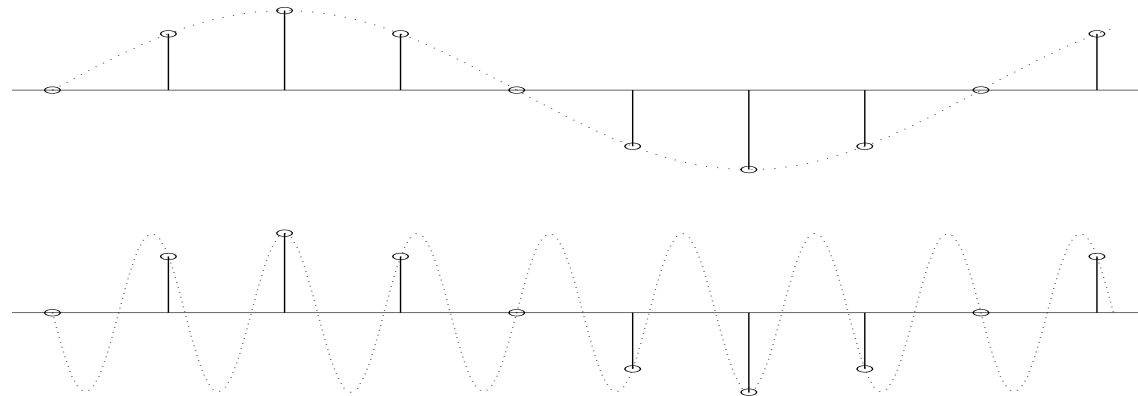
Fenomeno dell'aliasing – 2

Esempio 2: Si considerino due sinusoidi con pulsazioni ω_1 e ω_2 , $\omega_1 + \omega_2 = n\omega_s$, sfasati di π . Posto ad esempio $\omega_1 = \frac{1}{8}\omega_s$ e $\omega_2 = \omega_s - \omega_1 = \frac{7}{8}\omega_s$ ($n = 1$)

$$\begin{cases} x(t) = \sin(\omega_1 t) = \sin(\omega_s t/8) \\ y(t) = \sin(\omega_2 t) = \sin(7\omega_s t/8 + \pi) \end{cases}$$

campionando si ha

$$\begin{cases} x(kT) = \sin(\omega_s k T/8) = \sin(2k\pi/8) = \sin(k\pi/4) \\ y(kT) = \sin(7\omega_s k T/8 + \pi) = \sin(7k\pi/4 + \pi) = \sin(k\pi/4) \end{cases}$$



Per evitare fenomeni di aliasing si deve provvedere ad introdurre un opportuno filtraggio **passa-basso** prima del campionatore

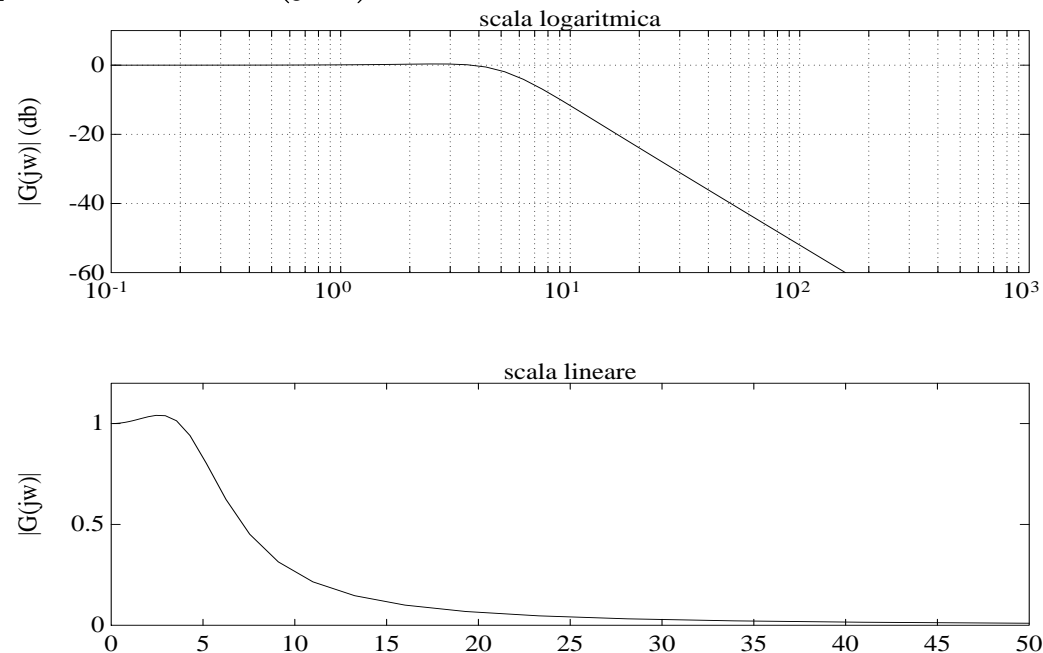
Fenomeno dell'aliasing – 3

Esempio 3: Campionamento della **risposta impulsiva** di un sistema del secondo ordine

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25} = \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{\omega_n} s + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2} \Rightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1} [G(s)] = \frac{25}{4} e^{-3t} \sin 4t$$

avente guadagno unitario, due poli complessi coniugati $p_{1,2} = -3 \pm j4$, pulsazione naturale $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$ e coefficiente di smorzamento $\delta = 3/5$

Diagramma delle ampiezze di $G(j\omega)$



Per $\omega > 10 \omega_n = 50 \text{ rad/s}$, l'ampiezza di $G(j\omega)$ è inferiore ad un centesimo (-40 db) del valore in continua (guadagno statico)

Fenomeno dell'aliasing – 4

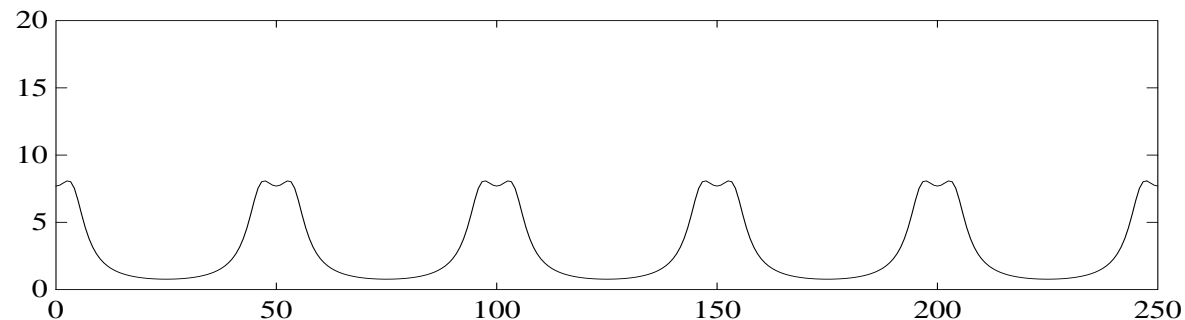
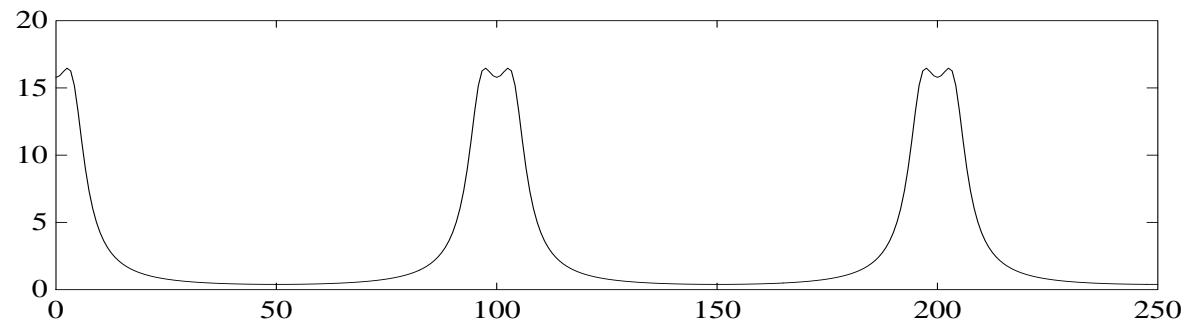
Esempio 3 (continua). Lo spettro, pur essendo a banda teoricamente illimitata, risulta praticamente trascurabile per pulsazioni maggiori di $\bar{\omega} = 50$ rad/s

Applicando la \mathcal{Z} -trasformata si ha

$$G(z) = \frac{25}{4} \frac{e^{-3T} \sin(4T) z}{z^2 - 2e^{-3T} \cos(4T) z + e^{-6T}}$$

La risposta spettrale è data da $G^*(j\omega) = G(z)|_{z=e^{j\omega T}} \quad (0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T})$

Spettro di $G^*(j\omega)$ quando $T = \frac{\pi}{50}$ ($\omega_s = 20\omega_n$) oppure (più lento) $T = \frac{\pi}{25}$ ($\omega_s = 10\omega_n$)



Tipici ricostruttori di segnale – 1



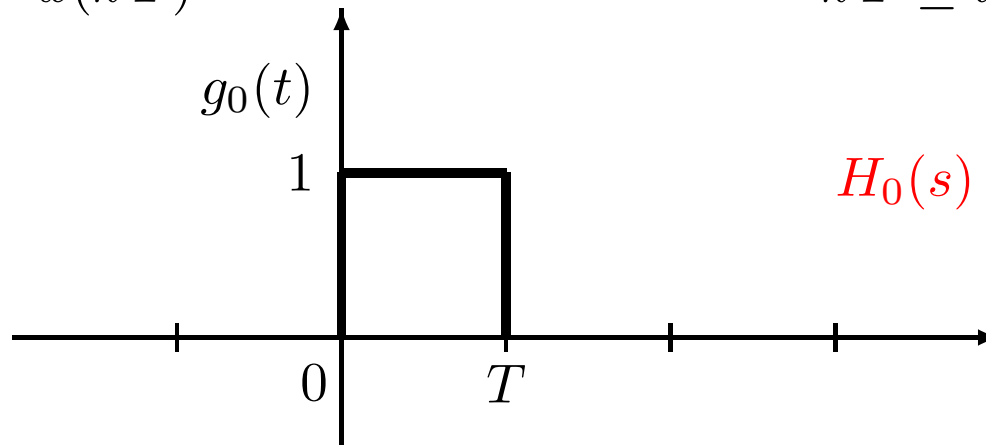
$$x(t) = x(kT) + \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=kT} (t - kT) + \left. \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right|_{t=kT} \frac{(t - kT)^2}{2!} + \dots$$

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=kT} \simeq \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \quad \dots$$

Ricostruttore di ordine zero (**ZOH**) — solo il termine di ordine **zero** nell'espansione di Taylor

$$x_0(t) = x(kT)$$

$$kT \leq t < (k+1)T$$

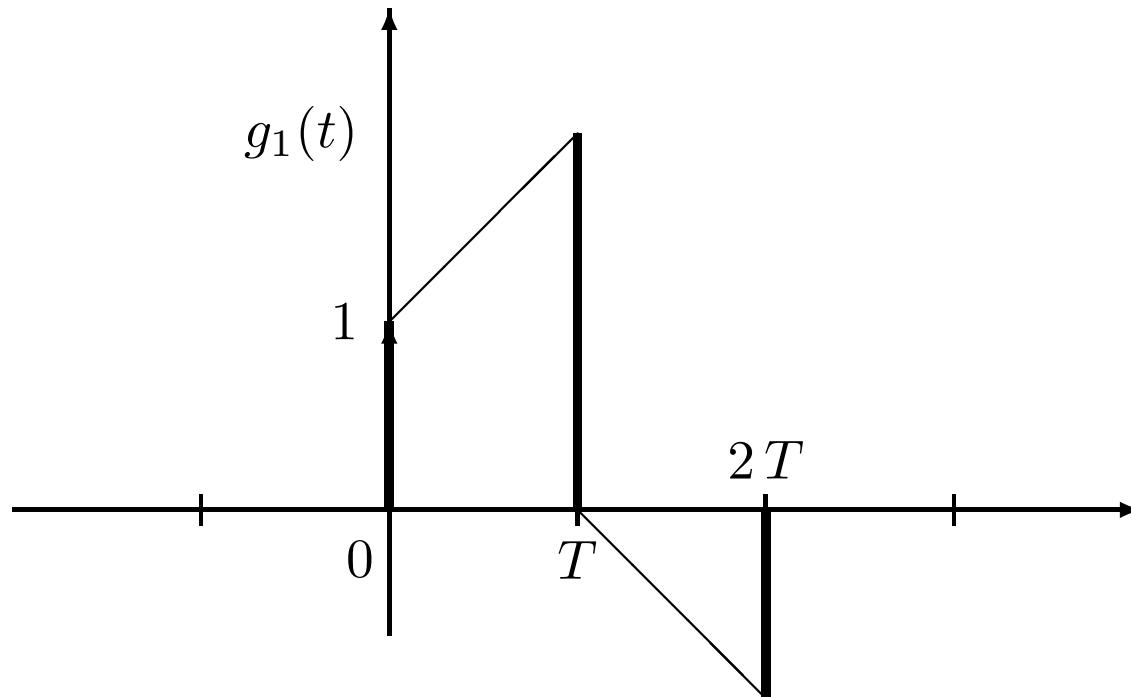


$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

Tipici ricostruttori di segnale – 2

Ricostruttore di ordine uno (**FOH**) —anche il termine di ordine **uno** nell'espansione di Taylor

$$x_1(t) = x(kT) + \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}(t - kT)$$



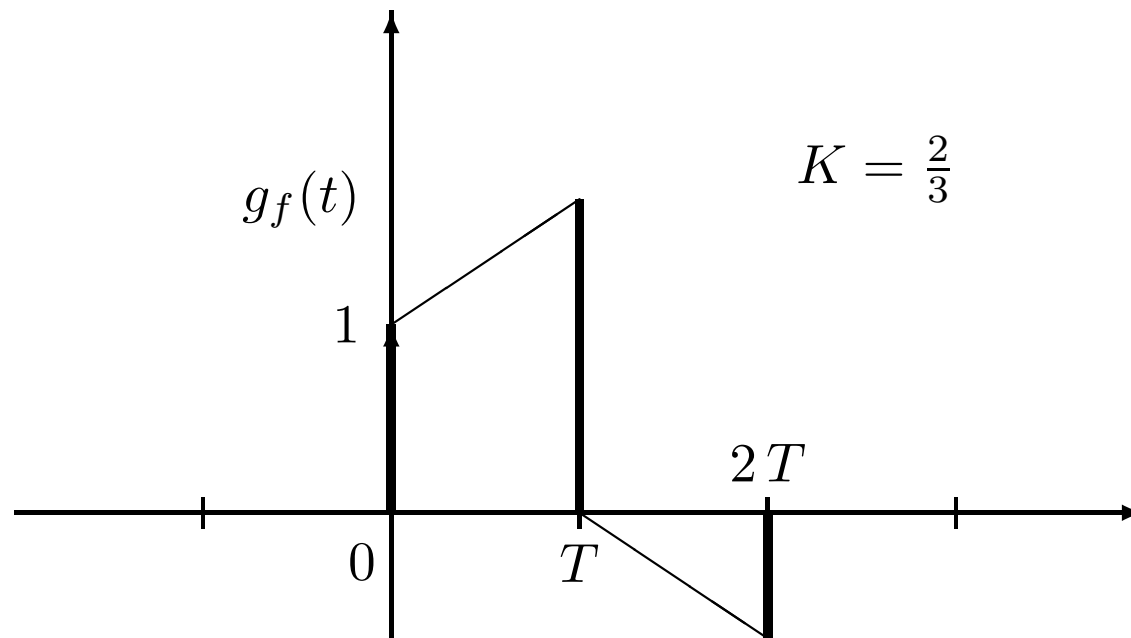
$$g_1(t) = h(t) + r(t) - 2h(t - T) - 2r(t - T) + h(t - 2T) + r(t - 2T)$$

$$\Rightarrow H_1(s) = \frac{1 + Ts}{T} \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)^2$$

Tipici ricostruttori di segnale – 3

Ricostruttore di ordine **frazionario**

$$x_f(t) = x(kT) + K \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} (t - kT), \quad 0 \leq K \leq 1$$



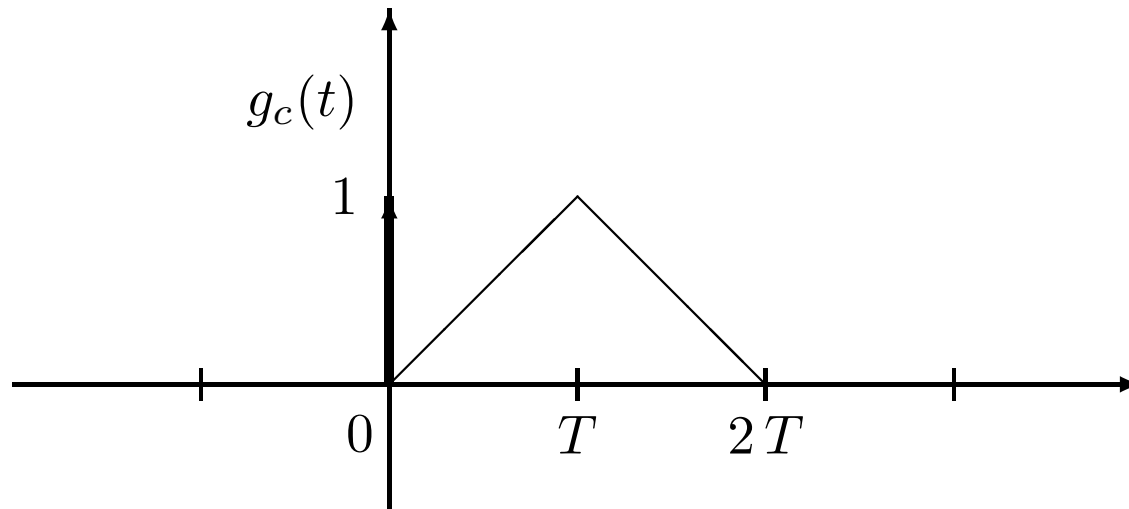
$$H_f(s) = \frac{K + Ts}{T} \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)^2 + (1 - K) \frac{(1 - e^{-sT})}{s} e^{-sT}$$

al limite, per $K = 0$ e $K = 1$ si ritrovano ...

Tipici ricostruttori di segnale – 4

Ricostruttore ad uscita **continua**

$$x_c(t) = x((k-1)T) + \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}(t - kT)$$

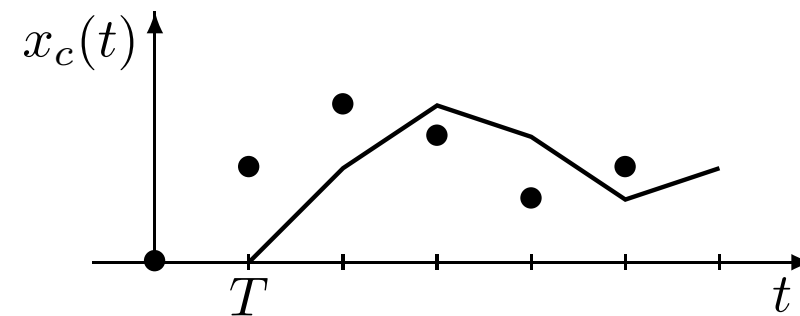
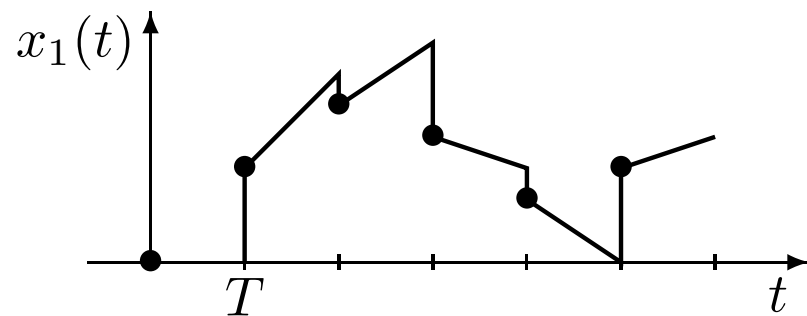
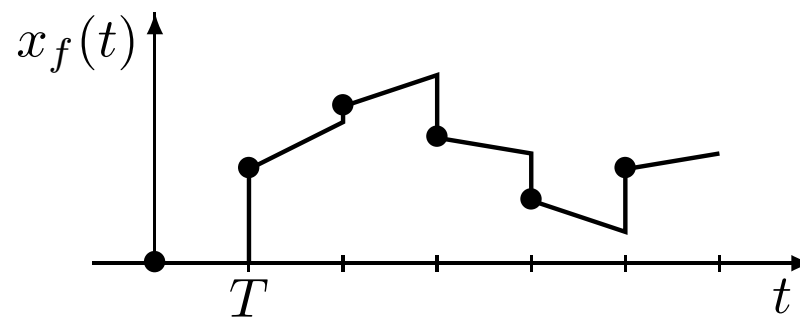
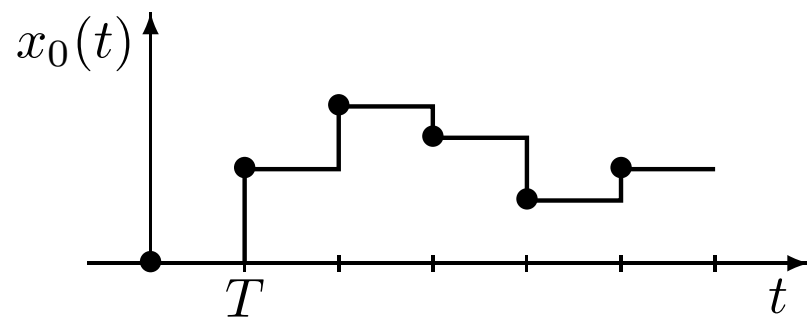


$$g_c(t) = \frac{r(t)}{T} - \frac{2r(t-T)}{T} + \frac{r(t-2T)}{T}$$

$$\Rightarrow H_c(s) = \frac{1}{T} \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)^2$$

nel controllo, scelta utile se non si desidera sollecitare eccessivamente l'attuatore

Confronto tra ricostruttori di segnale



Per la sua semplicità realizzativa, lo ZOH è il ricostruttore **più usato** nelle applicazioni

Ricostruttore di ordine zero

La risposta frequenziale del ricostruttore di ordine zero è (ponendo $s = j\omega$)

$$\begin{aligned} H_0(j\omega) &= \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2 e^{-j\omega T/2}}{\omega} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} \\ &= T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2} \end{aligned}$$

Modulo

$$|H_0(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|$$

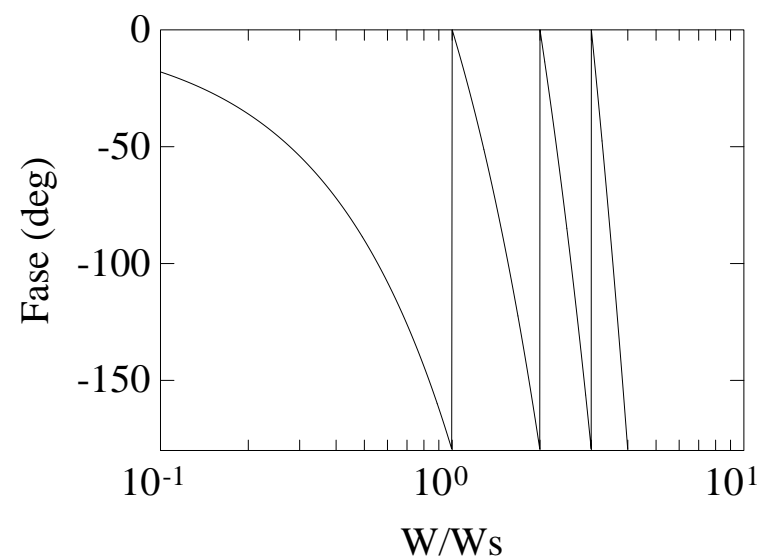
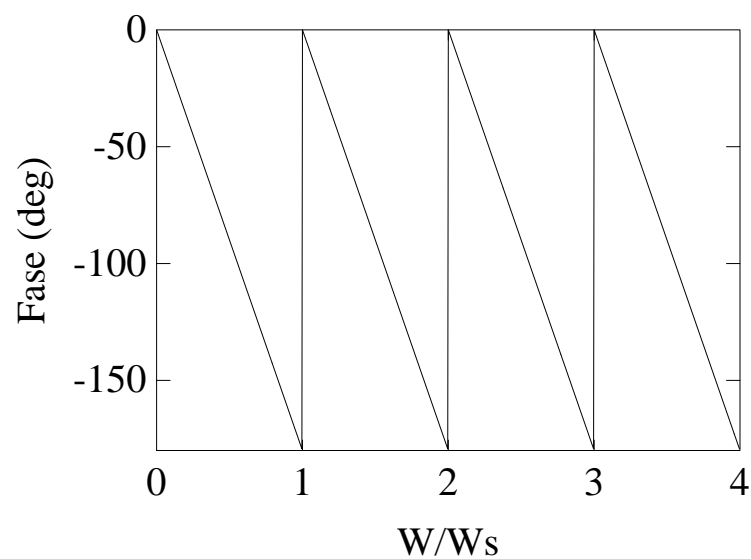
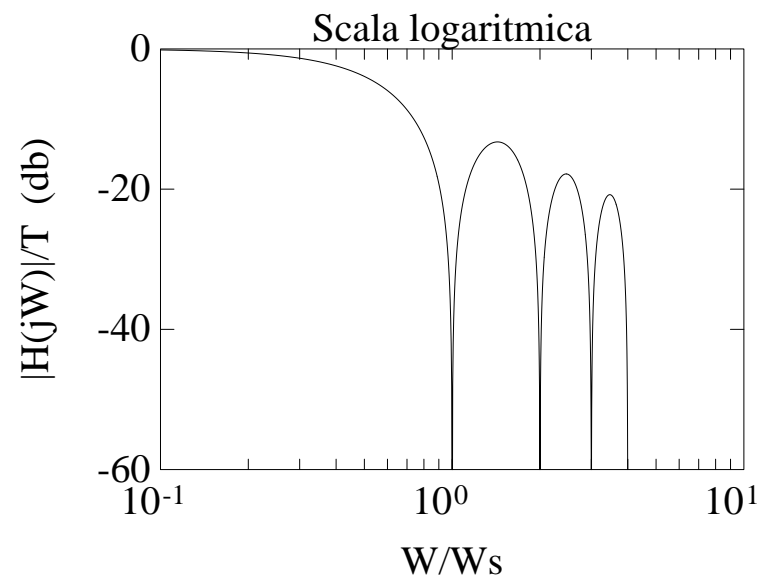
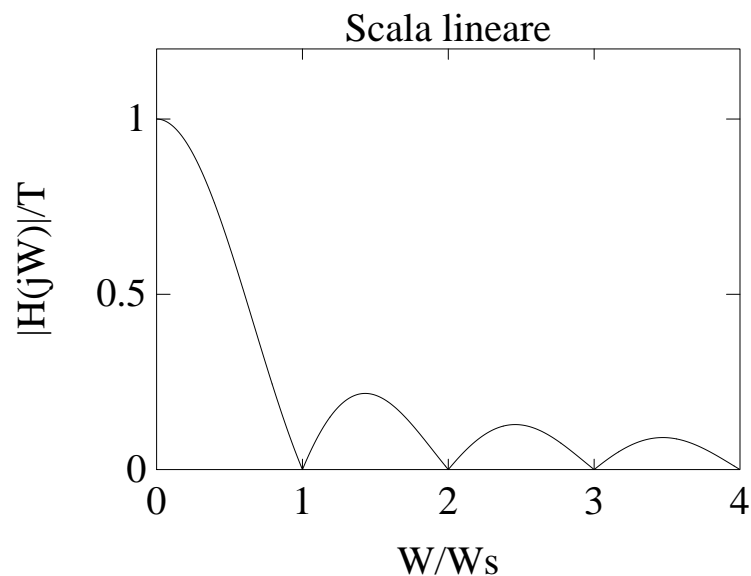
si annulla per $\omega = \frac{2k\pi}{T} = k\omega_s$

Fase

$$\text{Arg} [H_0(j\omega)] = \text{Arg} \left[\sin \frac{\omega T}{2} \right] - \frac{\omega T}{2}$$

ha delle discontinuità di π in corrispondenza a $\omega = k\omega_s$

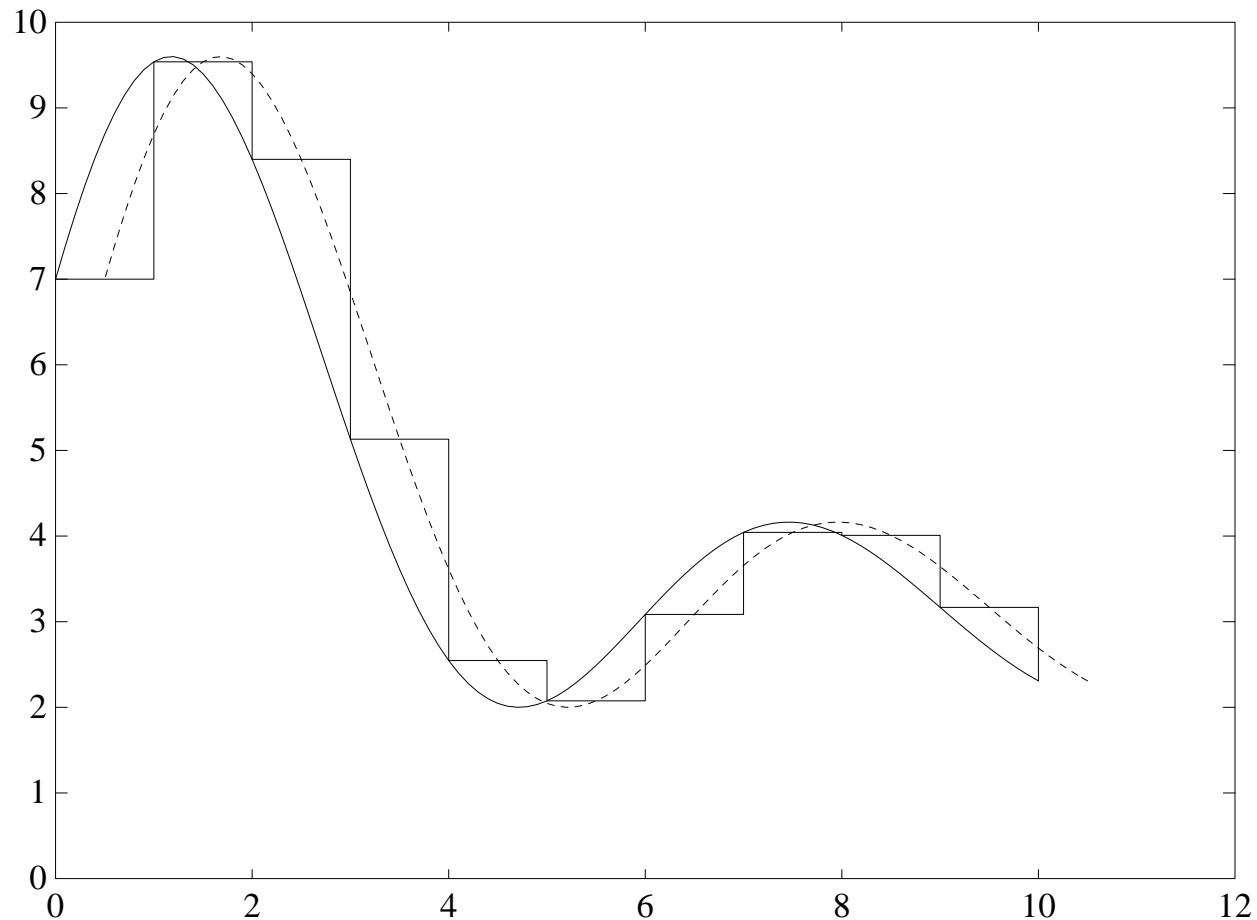
Risposta frequenziale del ricostruttore di ordine zero



scala delle frequenze angolari normalizzata rispetto a ω_s

Approssimazione del ricostruttore di ordine zero come ritardo

Sarà utile in seguito considerare l'effetto dello ZOH come quello dovuto a un ritardo $\frac{T}{2}$



$$H_0(j\omega) \simeq T e^{-j\omega T/2} \quad \text{per } \frac{\omega T}{2} \ll 1$$

Ricostruttore di ordine uno

La risposta frequenziale del ricostruttore di ordine uno è (ponendo $s = j\omega$)

$$\begin{aligned} H_1(j\omega) &= \left(\frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \right)^2 \frac{1 + j\omega T}{T} \\ &= T \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2 (1 + j\omega T) e^{-j\omega T} \end{aligned}$$

Modulo

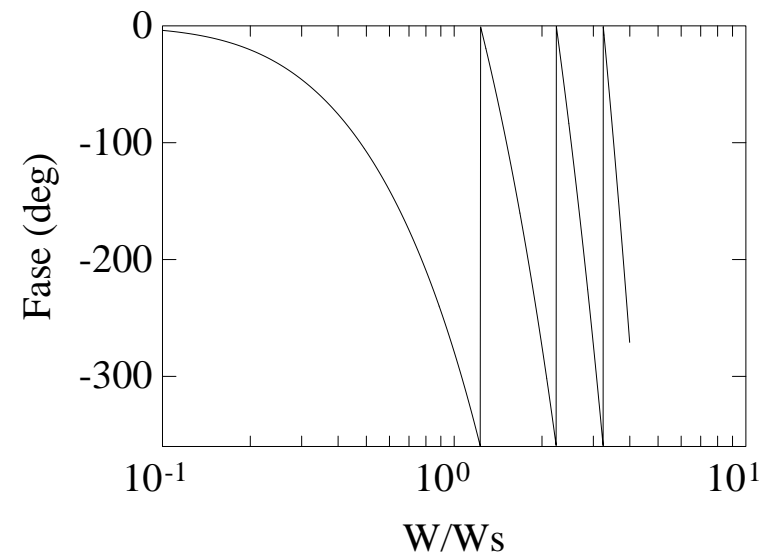
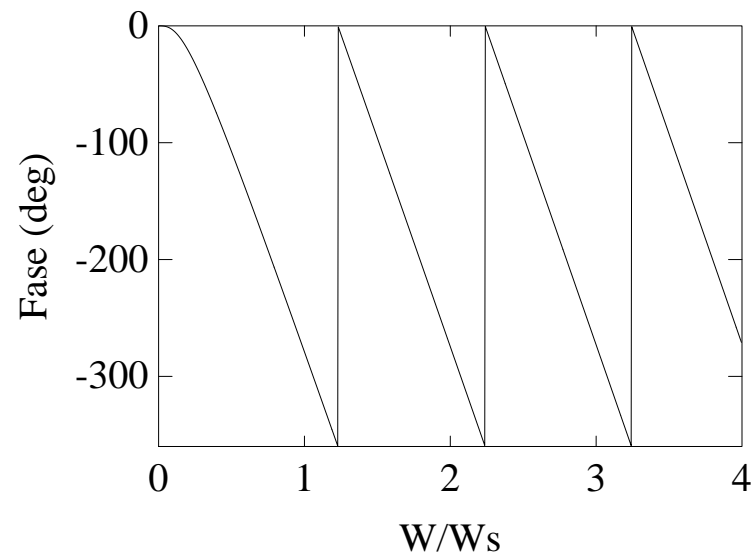
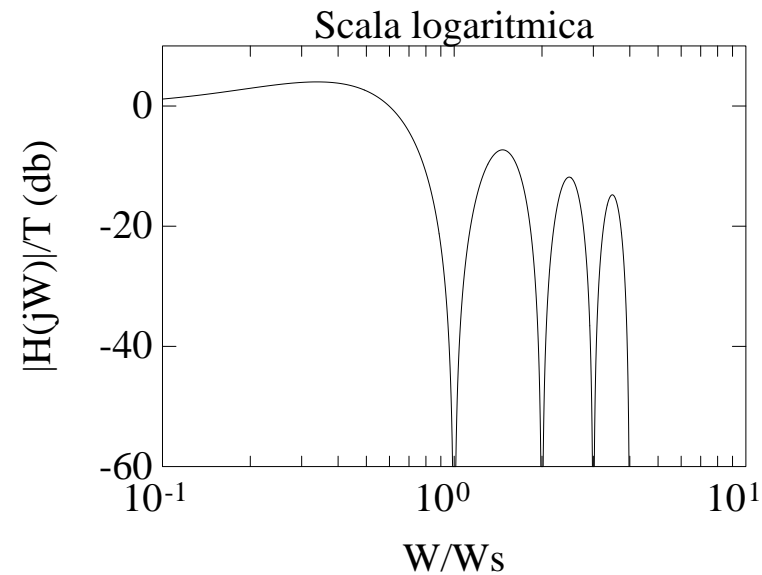
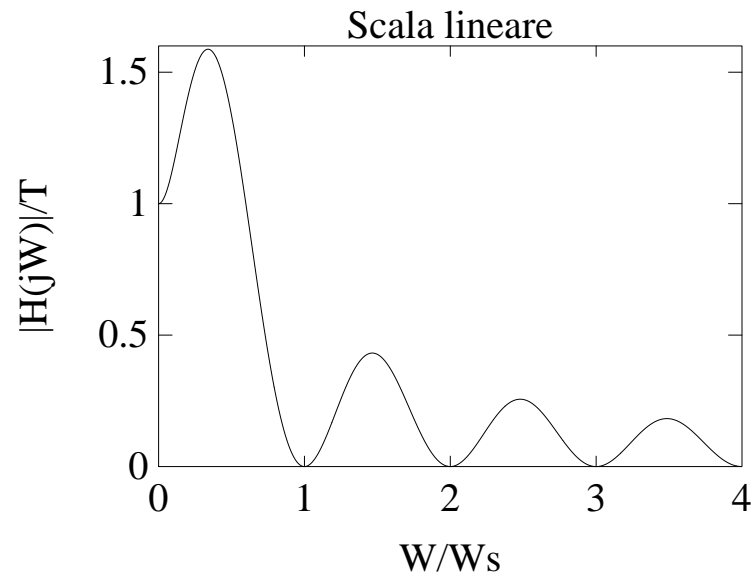
$$|H_1(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|^2 \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

con guadagno statico $H_1(j0) = T$ e stessi punti di annullamento della $H_0(j\omega)$

Fase

$$\text{Arg}[H_1(j\omega)] = \arctan \omega T - \omega T$$

Risposta frequenziale del ricostruttore di ordine uno



scala delle frequenze angolari normalizzata rispetto a ω_s

Corrispondenza tra piano s e piano z – 1

Si può stabilire una corrispondenza tra il piano complesso s e il piano complesso z . Poiché

$$X^*(s) = X(z)|_{z=e^{sT}}$$

le variabili s e z sono legate dalla relazione $z = e^{sT}$. Posto $s = \sigma + j\omega$ si ha

$$z = e^{T(\sigma+j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{jT(\omega + \frac{2k\pi}{T})}$$

e ogni punto del piano z è in corrispondenza con infiniti punti del piano s

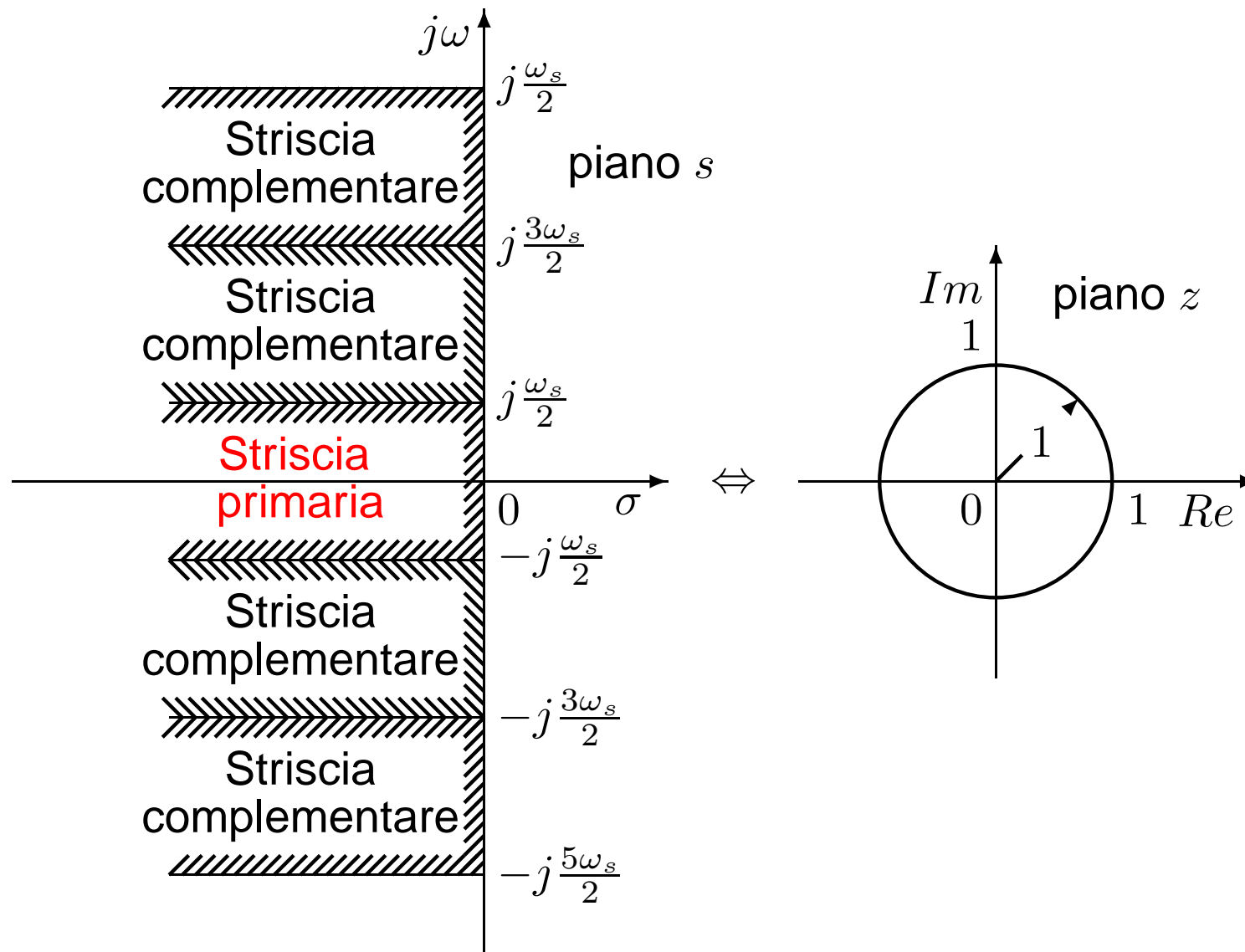
I punti del piano s a parte reale negativa ($\sigma < 0$) sono in corrispondenza con i punti del piano z all'interno del cerchio unitario

$$|z| = e^{T\sigma} < 1$$

I punti sull'asse immaginario ($\sigma = 0$) vengono mappati sul cerchio unitario ($|z| = 1$), mentre quelli a parte reale positiva ($\sigma > 0$) vengono mappati all'esterno del cerchio unitario ($|z| > 1$)

La striscia di piano s delimitata dalle rette orizzontali $s = j\omega_s/2$ e $s = -j\omega_s/2$ prende il nome di **striscia primaria**

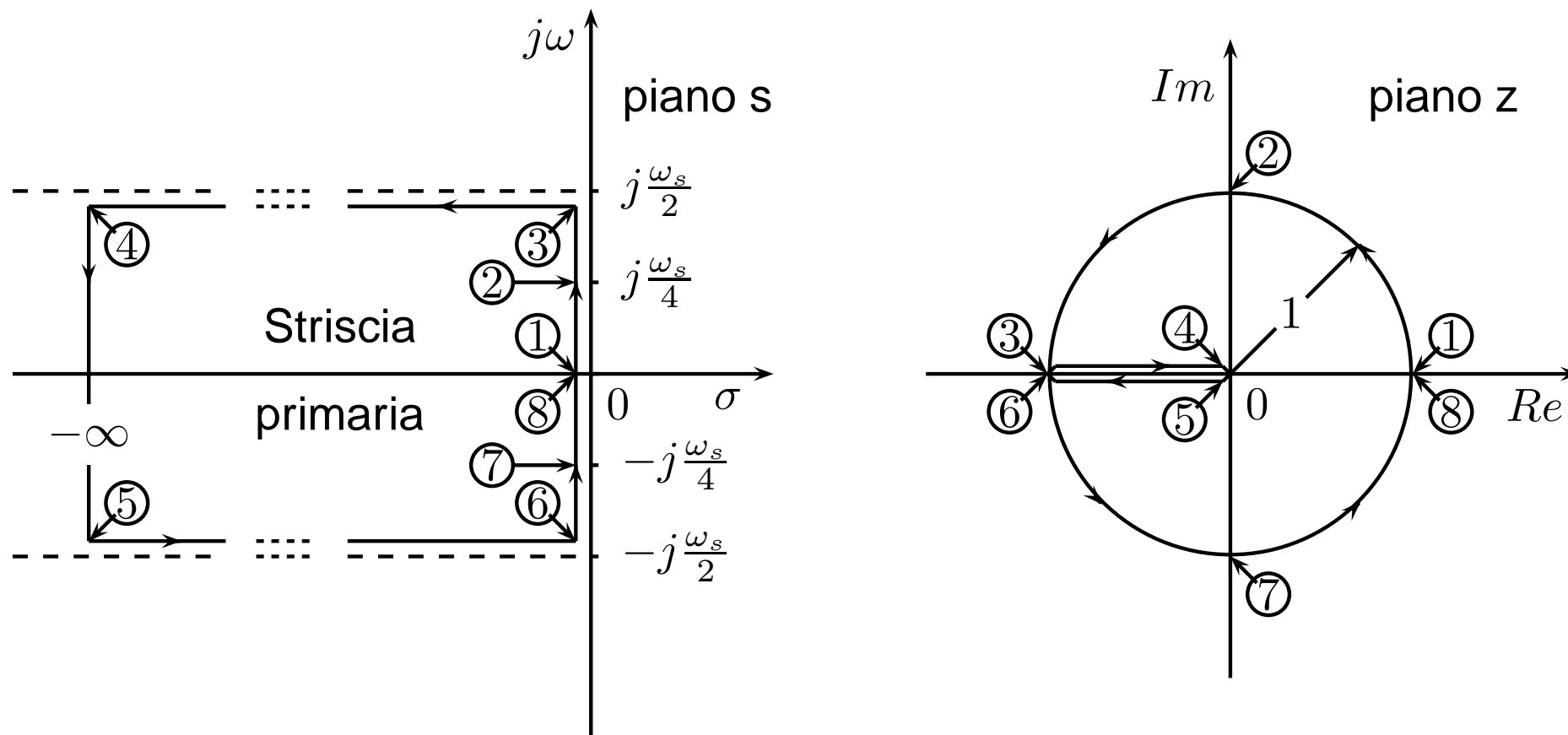
Corrispondenza tra piano s e piano z – 2



Corrispondenza tra piano s e piano z – 3

$$z = e^{sT} \Rightarrow z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} \quad \left(0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}\right)$$

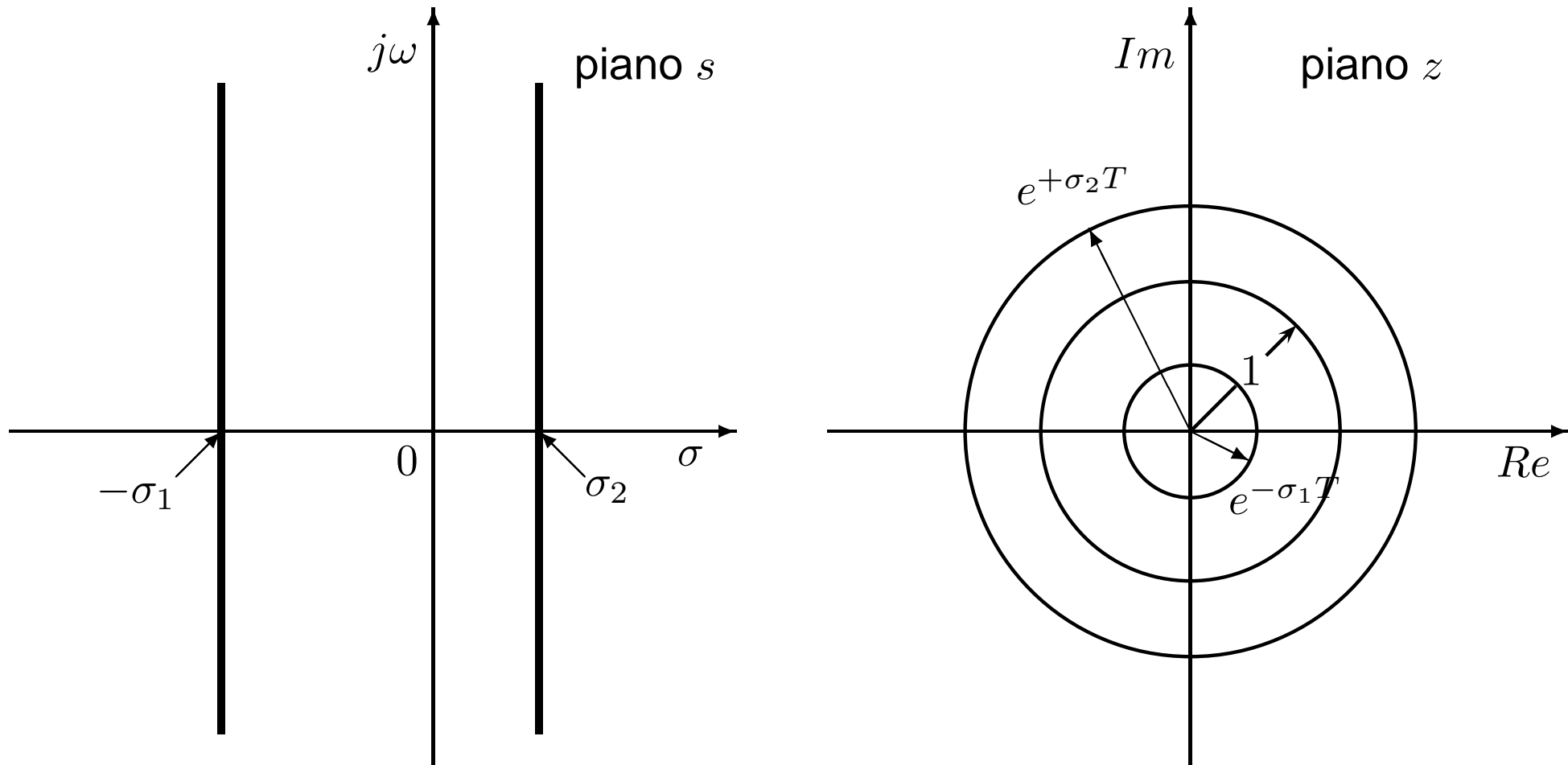
Dettaglio della trasformazione (biunivoca!) tra **striscia primaria** e **piano z**



$$s = 0 \leftrightarrow z = 1 \quad s = \sigma \leq 0 \leftrightarrow z = e^{-|\sigma|T} \in (0, 1] \quad s = \sigma \geq 0 \leftrightarrow z = e^{\sigma T} \in [1, +\infty)$$

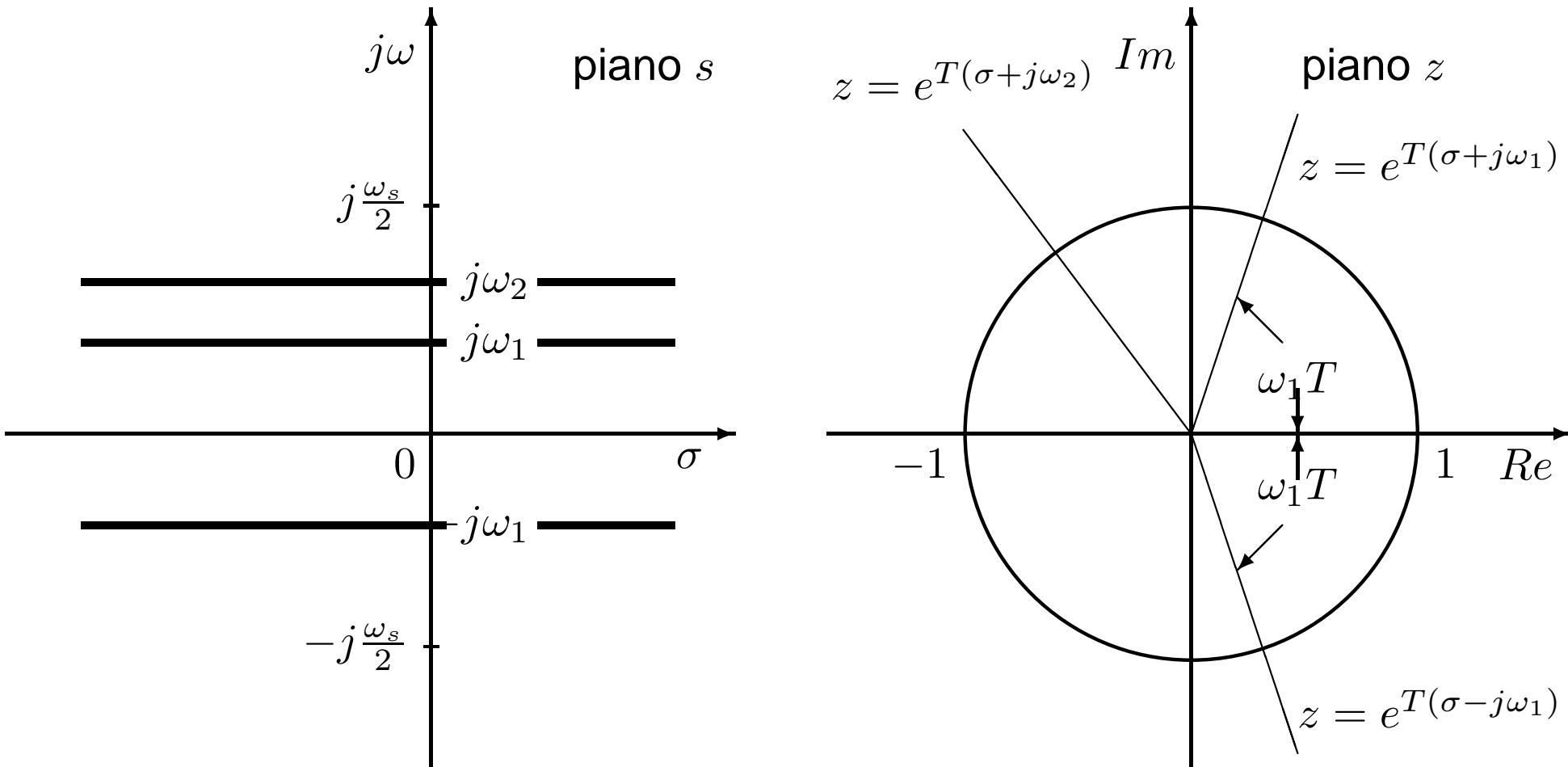
Particolari corrispondenze tra piano s e piano $z - 1$

Luoghi a decadimento/crescita esponenziale costante (ovvero dell'involuppo di una risposta esponenziale pseudo-periodica)



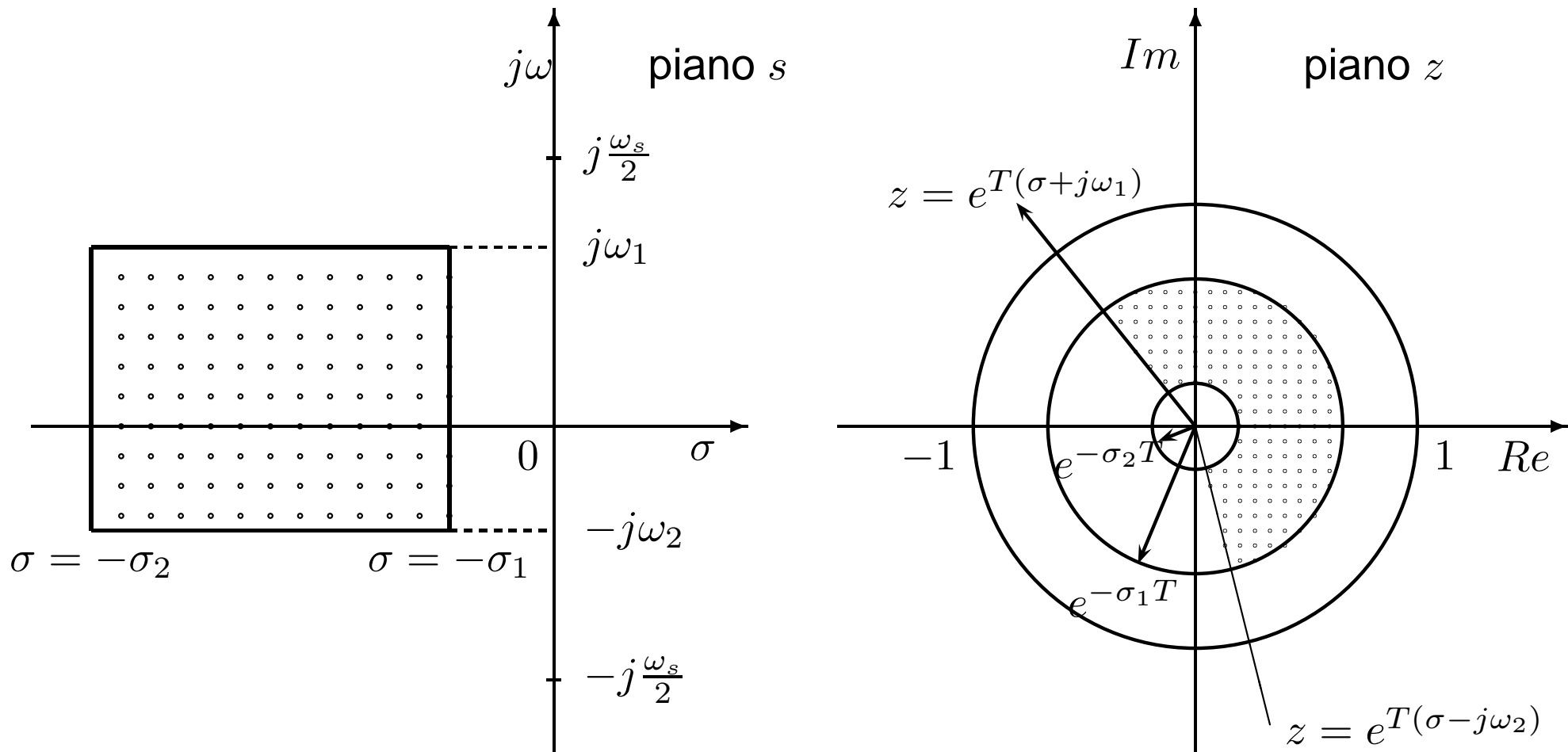
Particolari corrispondenze tra piano s e piano z – 2

Luoghi a pulsazione costante



Particolari corrispondenze tra piano s e piano z – 3

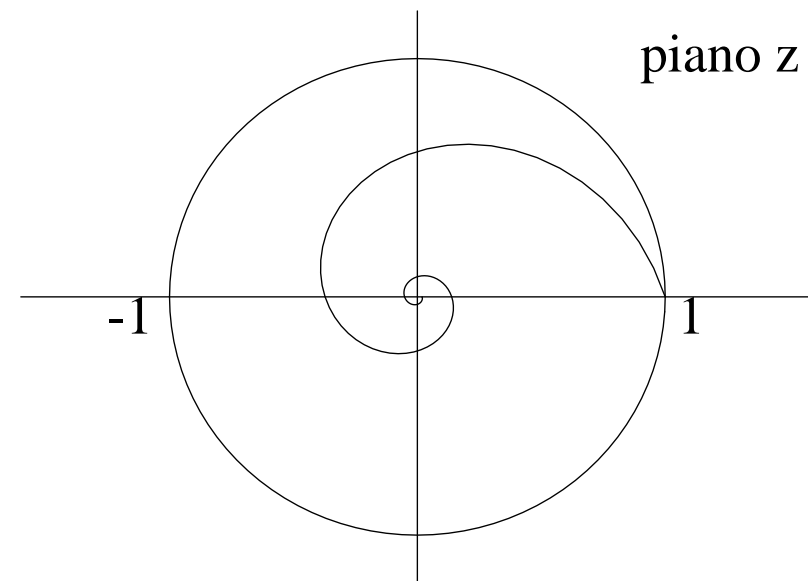
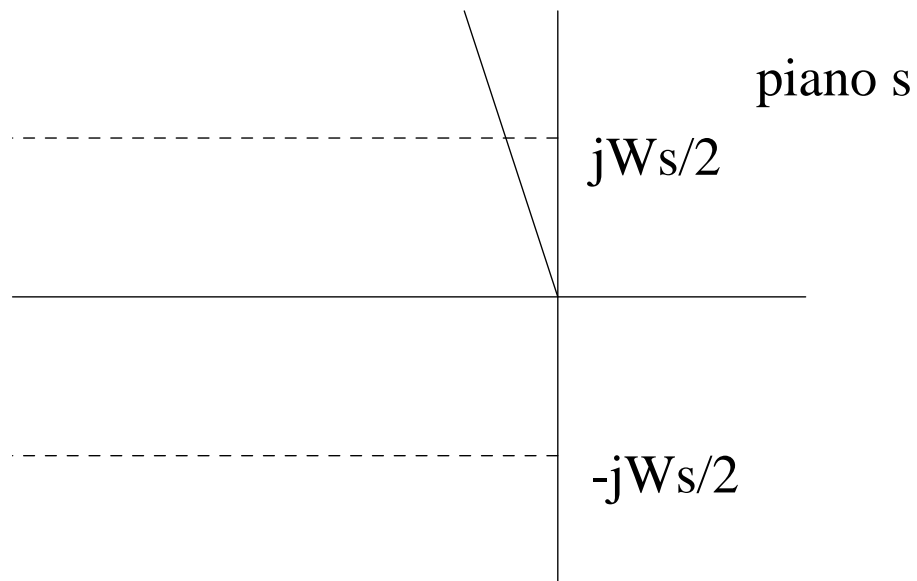
Un esempio di corrispondenza fra due regioni del piano s e del piano z



Particolari corrispondenze tra piano s e piano z – 4

Luogo dei punti a coefficiente di smorzamento δ costante

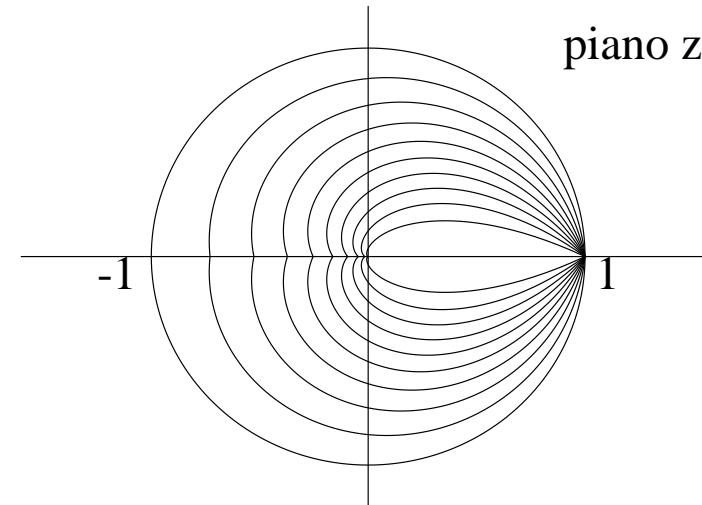
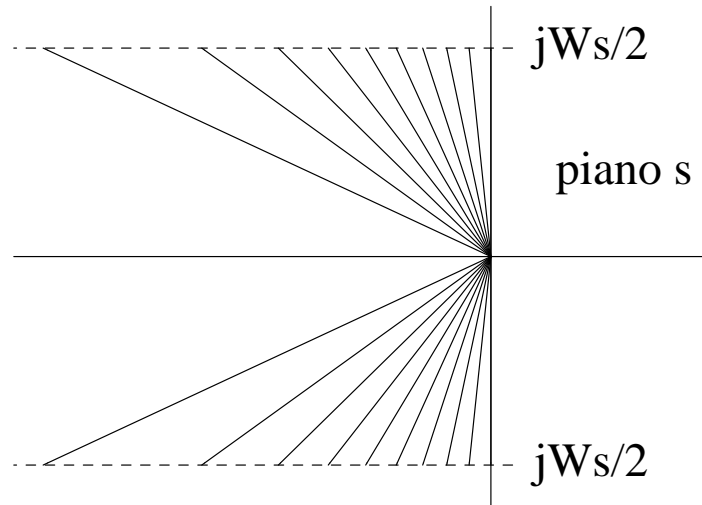
$$s = -\omega \tan \beta + j\omega = -\omega \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} + j\omega \quad (\beta = \arcsin \delta)$$



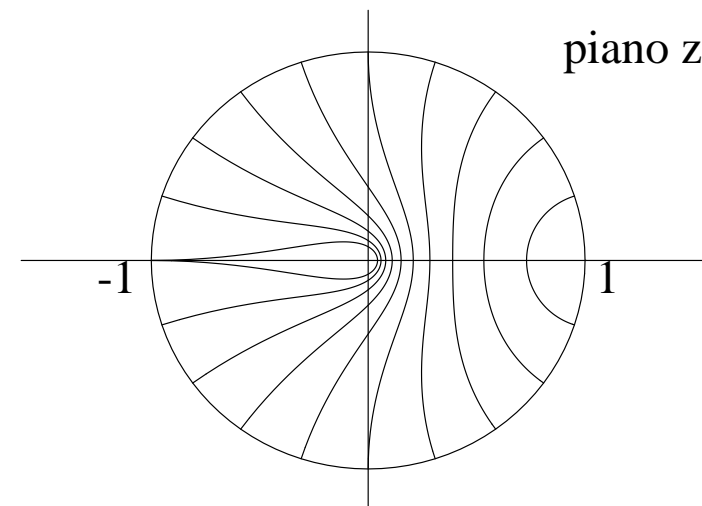
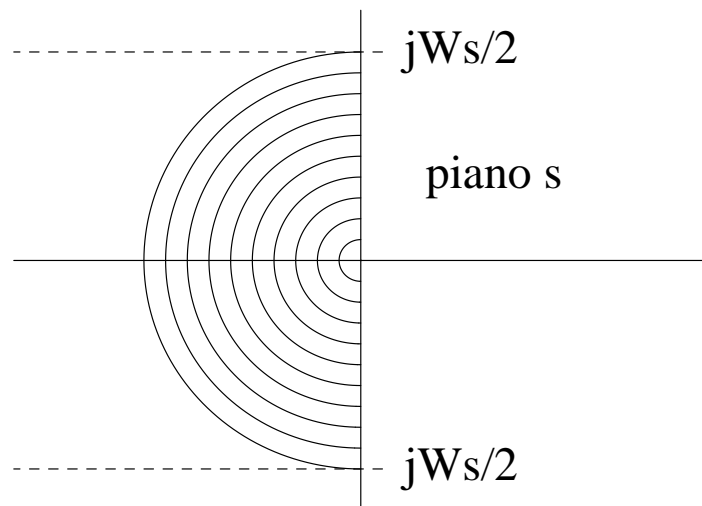
$$z = e^{sT} = e^{(-\omega \tan \beta + j\omega)T} = e^{-\varphi \tan \beta} e^{j\varphi} \quad \varphi = \omega T$$

Particolari corrispondenze tra piano s e piano z – 5

Luoghi a **coefficiente di smorzamento** δ costante (nella striscia primaria del piano s)
 \Rightarrow **cardiodi** nel piano z

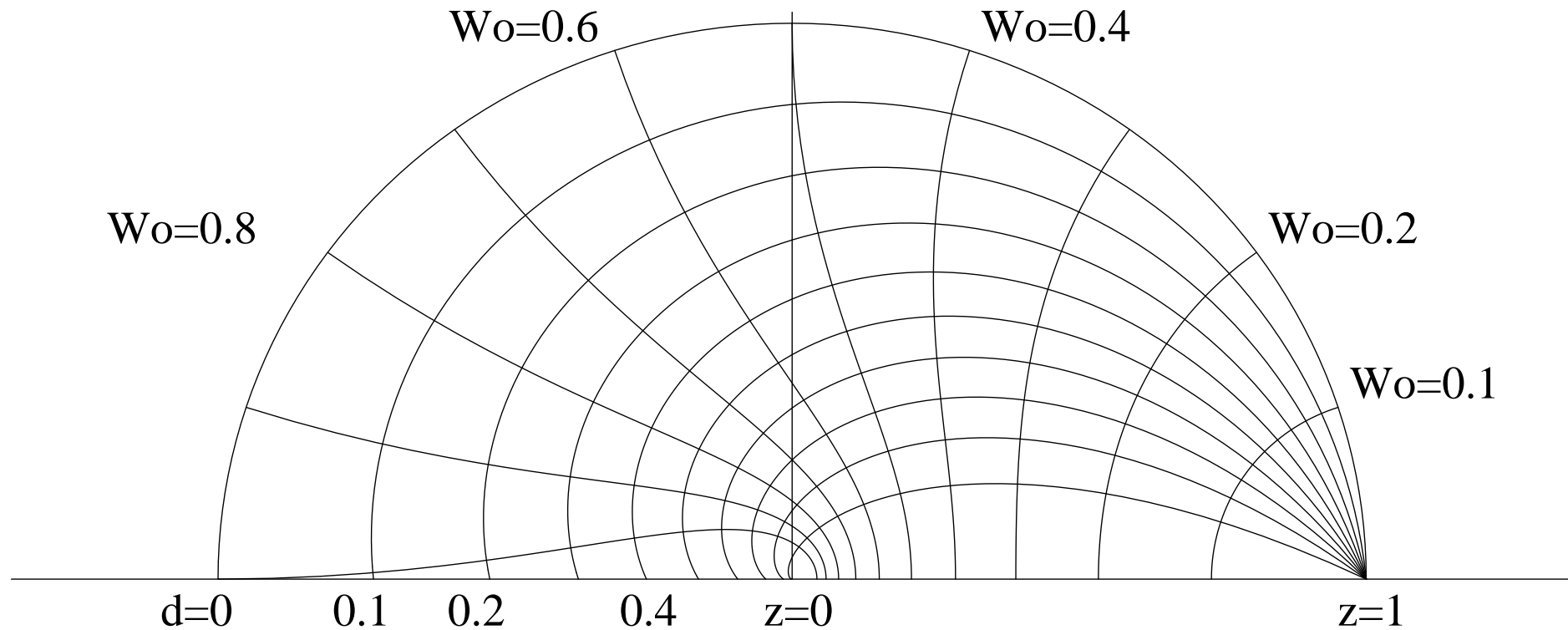


Luoghi a **pulsazione naturale** ω_n costante (nella striscia primaria del piano s)



Particolari corrispondenze tra piano s e piano z – 6

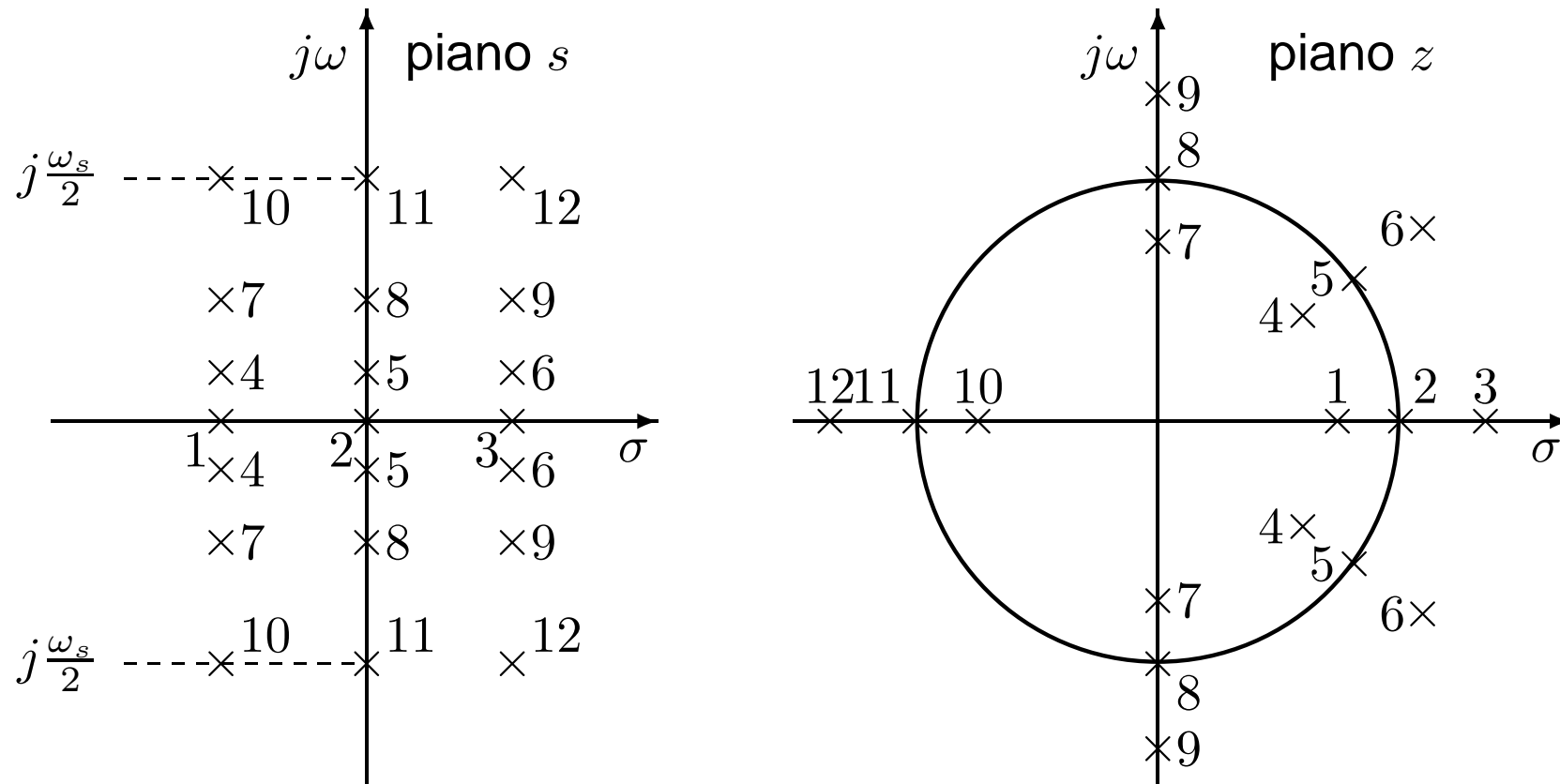
Luoghi del **piano** z corrispondenti a valori δ e ω_n costanti



con pulsazione normalizzata $\omega_0 = \frac{\omega_n}{\omega_s/2}$

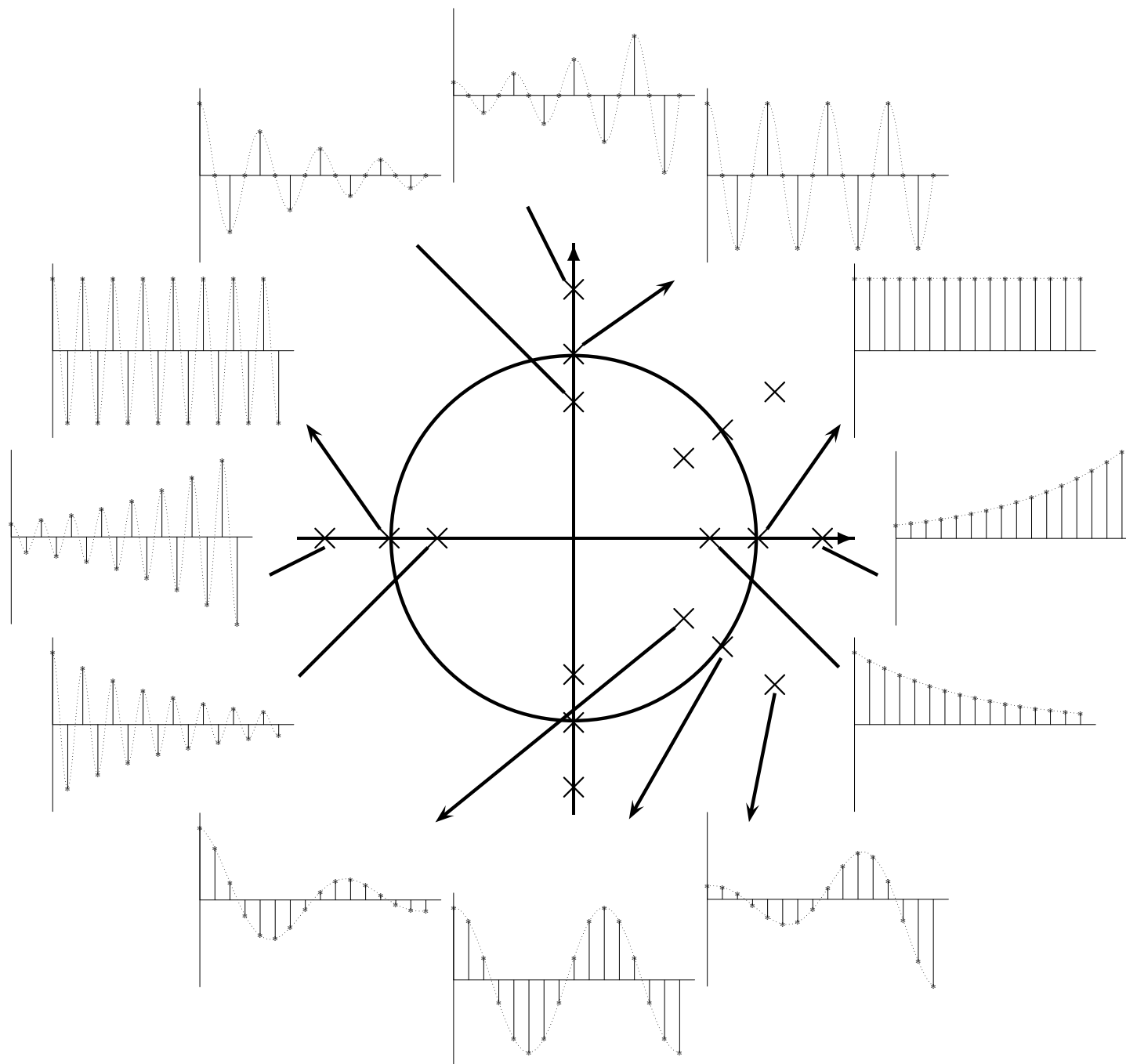
Interpretazione come relazione tra poli di $F(s)$ e poli di $F(z)$

I punti del piano s e del piano z , legati dalla relazione $z = e^{sT}$, possono considerarsi come **poli corrispondenti** delle trasformate $F(s)$ e $F(z)$, con $F(z)$ calcolata “campionando” $F(s)$ (meglio, campionando il segnale temporale la cui trasformata . . .)



Notare che poli **semplici reali non positivi** in z **non** sono in corrispondenza con nessuna localizzazione di poli in s !!

Posizione dei poli e andamenti delle risposte transitorie – 1



Posizione dei poli e andamenti delle risposte transitorie – 2

Caso di una coppia di poli complessi coniugati a parte reale negativa nel piano s .
La risposta transitoria è del tipo $A e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ e dopo il campionamento

$$z = e^{sT} \Big|_{s=\sigma \pm j\omega} = e^{\sigma T} e^{\pm j\omega T} = r e^{\pm j\theta}$$

$$A e^{\sigma kT} \cos(\omega kT + \phi) = A r^k \cos(k\theta + \phi)$$

si hanno $\frac{2\pi}{\omega T} = \frac{2\pi}{\theta}$ campioni per pseudo-periodo

Pertanto, per una funzione di trasferimento del secondo ordine del tipo

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{con poli in } p_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$$

si hanno i seguenti **legami utili** (nota la posizione (r, θ) del polo nel piano z e T, \dots)

$$z = e^{sT} \Big|_{s=p_{1,2}} = e^{-\delta\omega_n T} e^{\pm j\omega_n T \sqrt{1 - \delta^2}} = r e^{\pm j\theta}$$

$$\delta = -\frac{\ln r}{\sqrt{\ln^2 r + \theta^2}} \quad \omega_n = \frac{1}{T} \sqrt{\ln^2 r + \theta^2} \quad \tau = \frac{1}{\delta\omega_n} = -\frac{T}{\ln r}$$