SISTEMI DIGITALI DI CONTROLLO

Prof. Alessandro De Luca

DIS, Università di Roma “La Sapienza”

deluca@dis.uniroma1.it

Lucidi tratti dal libro

C. Bonivento, C. Melchiorri, R. Zanasi: “Sistemi di Controllo Digitale”

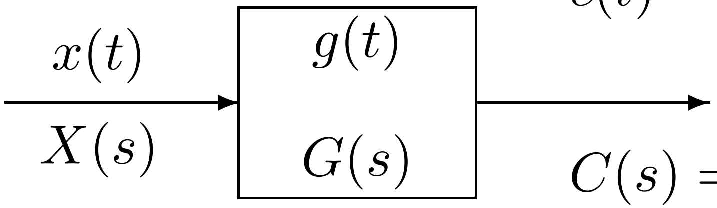
Capitolo 4: Sistemi a tempo discreto

Si ringraziano gli autori

Sistemi a tempo discreto

Sistemi a tempo continuo

risposta dallo stato zero = integrale di convoluzione di ingresso e risposta impulsiva

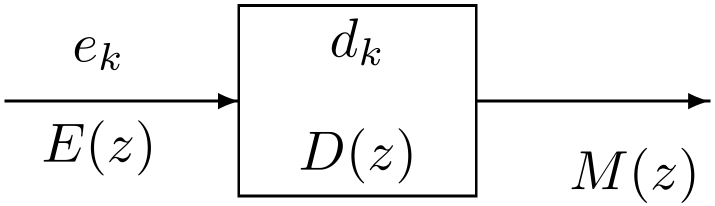


$$c(t) = \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t g(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$$

$$C(s) = G(s)\,X(s)$$

Sistemi a tempo discreto

risposta dallo stato zero = sommatoria di convoluzione di ingresso e sequenza “ponderatrice”

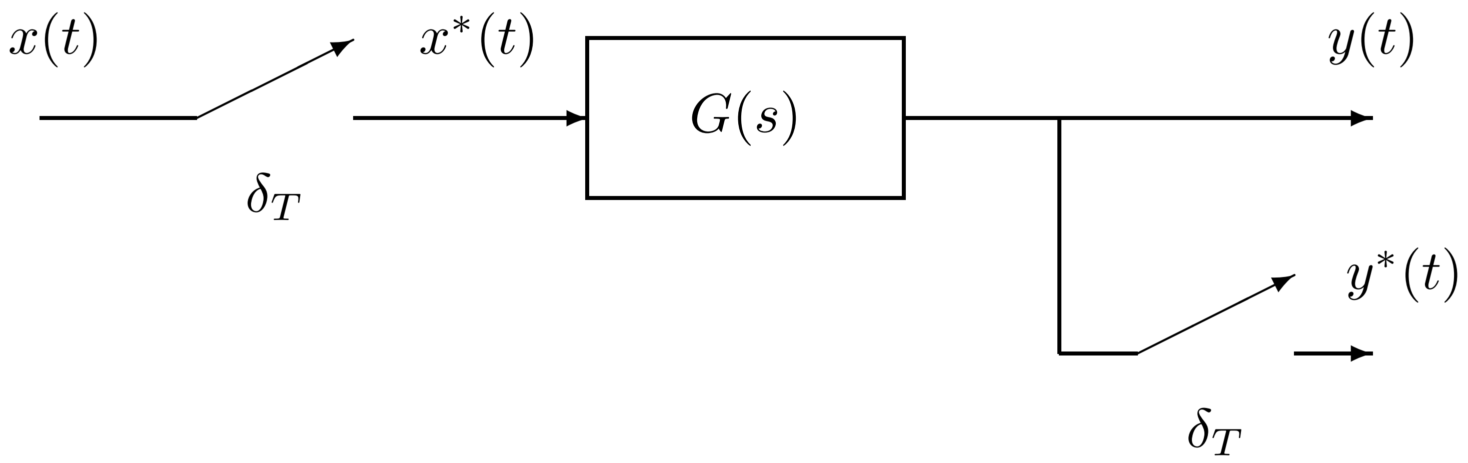


$$m_k = \sum_{i=0}^{k} d_i\, e_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} e_i\, d_{k-i}$$

$$M(z) = D(z)\,E(z)$$

La relazione in-out è comunque un prodotto algebrico nel dominio della trasformata

Sommatoria di convoluzione – 1



Poichè in ingresso c'è una sequenza (pesata) di impulsi di Dirac

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

la risposta $y(t)$ del sistema lineare $G(s)$ è la somma delle risposte ai singoli impulsi

$$y(t) = \begin{cases} g(t)x(0) & 0 \leq t < T \\ g(t)x(0) + g(t-T)x(T) & T \leq t < 2T \\ g(t)x(0) + g(t-T)x(T) + g(t-2T)x(2T) & \ldots \\ \vdots & \\ g(t)x(0) + g(t-T)x(T) + \ldots + g(t-kT)x(kT) & \end{cases}$$

Sommatoria di convoluzione – 2

Poichè $g(t) = 0,\ t < 0$, si ha

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t)x(0) + g(t-T)x(T) + \ldots + g(t-kT)x(kT) \\ &= \sum_{h=0}^{k} g(t-hT)x(hT) \qquad\qquad 0 \le t < (k+1)T \end{aligned}$$

Calcolando il valore di $y(t)$ negli istanti di campionamento $t = kT,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$ e tenendo conto che $g(kT - hT) = 0,\ h > k$, si ha

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{k} g(kT-hT)x(hT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT-hT)x(hT) = g(kT) * x(kT)$$

Se la $G(s)$ ha grado relativo $n - m = 1$, allora la risposta del sistema alla successione di impulsi $x^*(t)$ è discontinua negli istanti $t = 0, T, \ldots, kT$ e il valore fornito per $t = kT$ è da intendersi come $y(kT^+)$

Se invece $n - m \geq 2$, allora la risposta $y(t)$ è continua

Funzione di trasferimento discreta

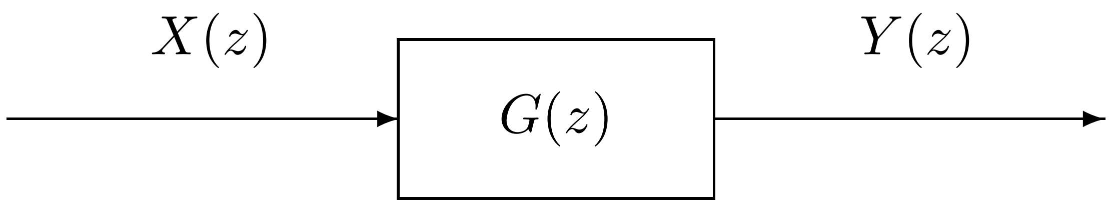
Dalla $\mathcal{Z}$-trasformata della sequenza in uscita

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT - hT)x(hT)$$

si ha

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} g((k-h)T)x(hT)z^{-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} g(mT)z^{-m} \sum_{h=0}^{\infty} x(hT)z^{-h} = G(z)X(z) \end{aligned}$$

da cui $G(z) = \dfrac{Y(Z)}{X(Z)}$. Analogamente al caso continuo, la funzione di trasferimento $G(z)$ è anche quello che si ottiene in uscita per un impulso discreto ($X(z) = 1$) in ingresso



$$X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)] = 1 \qquad \rightarrow \qquad Y(z) = G(z)$$

Funzione di trasferimento discreta – Esempi con integratori

1) $G_1(s) = \dfrac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad G_1(z) = \dfrac{z}{z-1}$ $\qquad G_2(s) = \dfrac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad G_2(z) = \dfrac{Tz}{(z-1)^2}$

La risposta continua di $G_1(s)$ al gradino $X_1(s) = \dfrac{1}{s}$ è $G_1(s)X_1(s) = \dfrac{1}{s^2}$

La risposta continua di $G_2(s)$ all'impulso $X_0(s) = 1$ è $G_2(s)X_0(s) = G_2(s) = \dfrac{1}{s^2}$
(identica alla precedente)

La risposta campionata $Y_1(z)$ di $G_1(s)$ al gradino campionato $X_1(z) = \dfrac{z}{z-1}$

$$Y_1(z) = G_1(z)X_1(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

è diversa dalla risposta campionata $Y_2(z)$ di $G_2(s)$ all'impulso discreto $X_0(z) = 1$

$$Y_2(z) = G_2(z)X_0(z) = G_2(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

Funzione di trasferimento discreta – Altro esempio

2) $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1}$

La sua risposta impulsiva e i relativi campioni a passo T sono

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right] = 1 - e^{-t} \quad \Rightarrow \quad g(kT) = 1 - e^{-kT} \quad k = 0, 1, \ldots$$

per cui la funzione di trasferimento discreta è

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT} z^{-k} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

che è anche la risposta campionata all'impulso discreto $X_0(z) = 1$

$$Y(z) = G(z)X_0(z) = G(z)$$

La $G(z)$ ha lo stesso numero di poli di $G(s)$ ma presenta uno zero aggiuntivo (nell'origine) dovuto al campionamento!

Funzione di trasferimento discreta – Presenza di uno ZOH

Si consideri una $G(s)$ in cascata a un organo di tenuta di ordine zero con fdt $H_0(s)$

La risposta campionata ad una sequenza discreta in ingresso con passo di campionamento T avente trasformata $X(z)$ si calcola come

$$\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)]X(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right]X(z) \\ &= \left(\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] - \mathcal{Z}\left[e^{-sT}\frac{G(s)}{s}\right]\right)X(z) \\ &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]X(z) \end{aligned}$$

per cui la funzione di trasferimento discreta associata a $G(s)H_0(s)$ è

$$[GH_0](z) = GH_0(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

che porta ad una procedura sistematica di calcolo

Funzione di trasferimento discreta – Esempi con ZOH

1$'$) Si riconsideri nell'esempio 1) il caso di $G_1(s)$. In presenza dell'organo di tenuta di ordine zero, la funzione di trasferimento discreta si calcola come segue

$$\frac{G_1(s)}{s} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{Z}\left[\frac{G_1(s)}{s}\right] = \frac{Tz}{(z-1)^2} \qquad \Rightarrow \qquad G_1H_0(z) = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[\frac{G_1(s)}{s}\right] = \frac{T}{(z-1)}$$

2$'$) Si riconsideri la $G(s)$ dell'esempio 2). La procedura fornisce

$$\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] = \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}}$$

da cui la funzione di trasferimento è

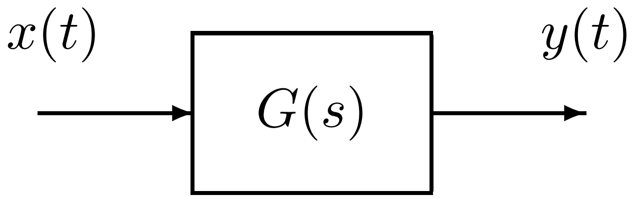
$$GH_0(z) = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \frac{T}{(z-1)} - 1 + \frac{z-1}{z-e^{-T}} = \frac{(T+e^{-T}-1)z - (Te^{-T}+e^{-T}-1)}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

con gli stessi poli del caso senza ZOH, ancora con uno zero aggiuntivo ma spostato

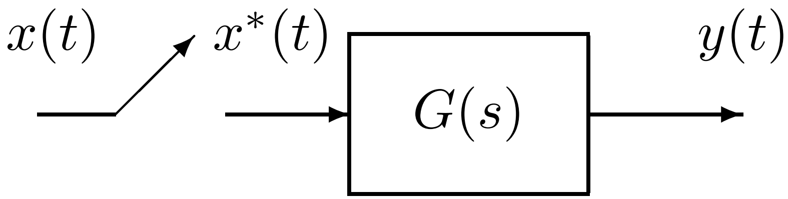
Nota: in generale, per la $GH_0(z)$ si otterranno sempre n poli, legati a quelli di $G(s)$ dal mapping $z = e^{sT}$, e n oppure $n-1$ zeri, quale che sia il loro numero in $G(s)$

Risposta a tempo discreto – Esempio di confronto

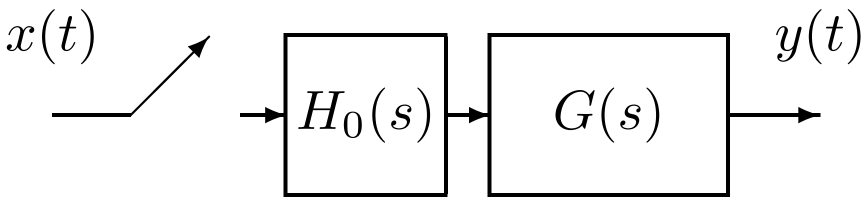
Siano $G(s) = \dfrac{1}{1+s}$, $x(t) = e^{-t}$, $T = 1$. Consideriamo tre situazioni:



(a)



(b)



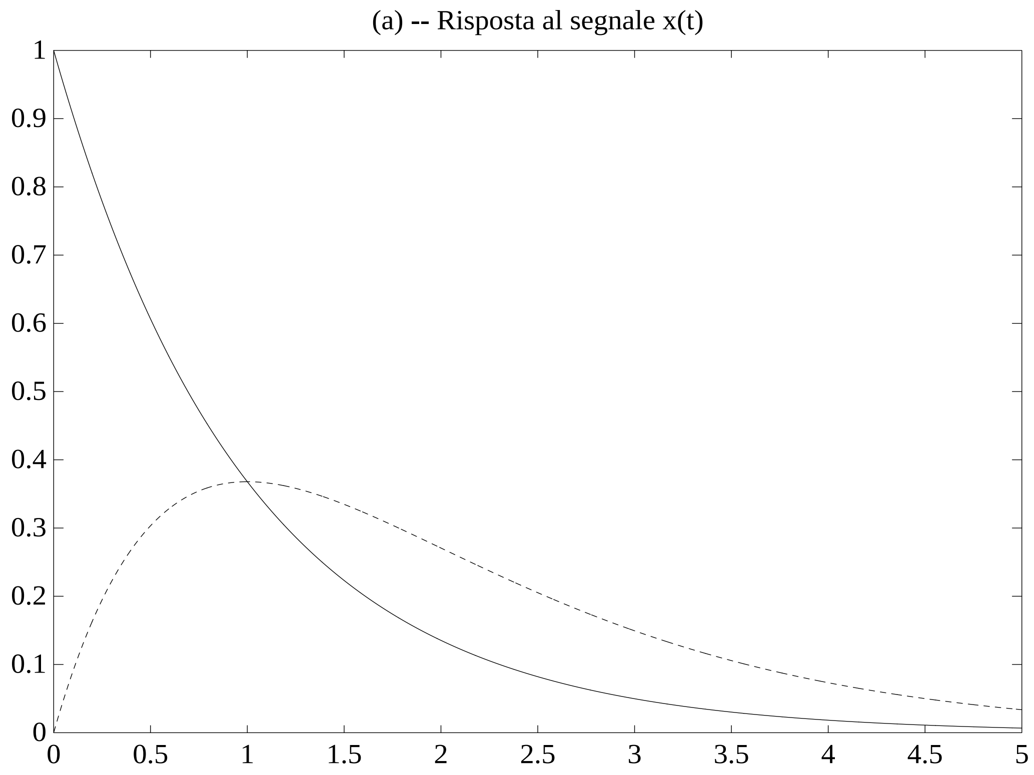
(c)

Esempio di confronto (cont)

Caso (a) campioni della risposta a tempo continuo

$$Y_a(s) = G(s)X(s) = \frac{1}{s+1}\,\frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y_a(kT) = \left(\mathcal{L}^{-1}\left[Y_a(s)\right]\right)\Big|_{t=kT} = \left(t\,e^{-t}\right)\Big|_{t=kT} = kT\,e^{-kT} \qquad (\text{con } T = 1)$$



Esempio di confronto (cont)

Caso (b) campioni della risposta alla sequenza di campioni dell'ingresso

$$y_b(t) = \begin{cases} g(t)x(0) & 0 \le t < T \\ g(t)x(0) + g(t-T)x(T) & T \le t < 2T \\ \vdots & \\ g(t)x(0) + g(t-T)x(T) + \ldots + g(t-kT)x(kT) & kT \le t < (k+1)T \end{cases}$$

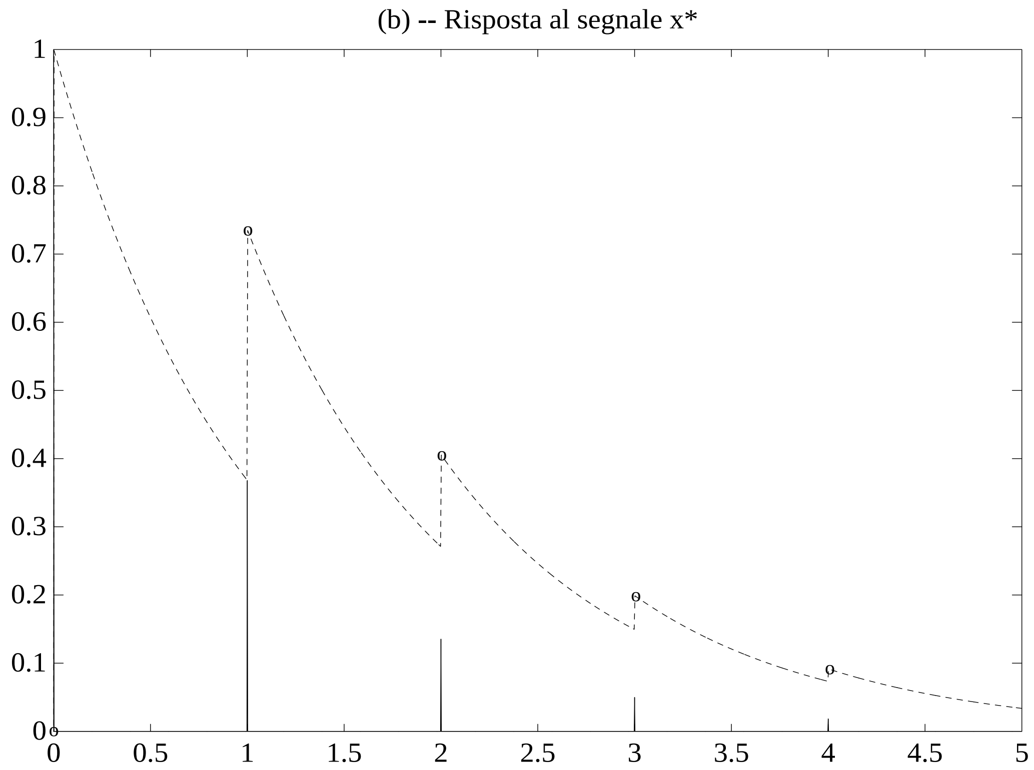
In questo caso, $g(t) = e^{-t}$ (anti-trasformata di $G(s)$) e quindi

$$y_b(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \le t < T \\ e^{-t} + e^{-(t-T)}e^{-T} = 2e^{-t} & T \le t < 2T \\ \vdots & \\ e^{-t} + \ldots + e^{-(t-kT)}e^{-kT} = (k+1)e^{-t} & kT \le t < (k+1)T \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_b(kT) = (k+1)e^{-kT} \qquad (\text{con } T = 1)$$

Esempio di confronto (cont)

Caso (b)



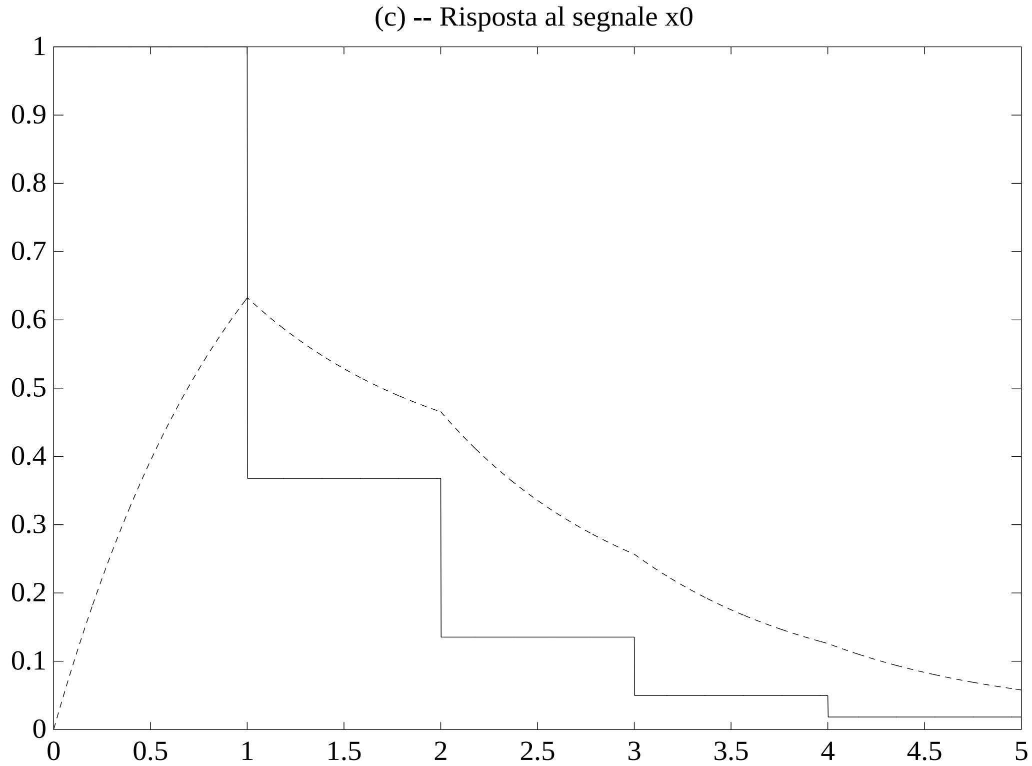
grado relativo di $G(s)$ pari a $n - m = 1 \Rightarrow$ discontinuità negli istanti $t = kT$
$\Rightarrow y_b(kT) = y_b(kT^+)$

Esempio di confronto (cont)

Caso (c) campioni della risposta a sequenza di campioni dell'ingresso tenuta con ZOH

$$Y_c(z) = G_{H_0}(z)X(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\,\frac{1}{s+1}\right]\mathcal{Z}\left[e^{-t}\right] = \frac{1-e^{-T}}{e^{-T}}\,\frac{e^{-T}z^{-1}}{(1-e^{-T}z^{-1})^2}$$

con $T = 1 \quad \Rightarrow \quad y_c(kT) = 1.7181\,k\,e^{-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$



l'uscita del processo è continua in questo caso

Funzione di risposta armonica discreta

Data una $G(z)$, la risposta armonica discreta è definita ponendo $z = e^{j\omega T}$

$$G(e^{j\omega T}) \qquad\qquad \text{definita per } \; 0 \le \omega \le \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2}$$

essendo periodica (nella pulsazione ω) per multipli di ω_s

$$G(e^{j(\omega + k\omega_s)T}) = G(e^{j\omega T})$$

e, per $\omega \le 0$, con valori complessi coniugati rispetto al caso $\omega \ge 0$

$$G(e^{j(-\omega)T}) = G^*(e^{j\omega T})$$

Nota: la risposta armonica discreta è una funzione trascendente in ω

$\Rightarrow$ non è possibile tracciarne i diagrammi di Bode con le regole del caso continuo

$\Rightarrow$ si usa una particolare trasformazione conforme (dal piano z al piano w) per riottenere una rappresentazione razionale

Significato fisico della risposta armonica discreta

E' analogo al caso continuo: dato un sistema $G(z)$ asintoticamente stabile, la risposta a regime permanente ai campioni di un ingresso sinusoidale $\sin(\omega kT)$ di ampiezza unitaria è ancora una sinusoide $A\sin(\omega kT+\varphi)$, con ampiezza A e φ fase

$$A = |G(e^{j\omega T})| \qquad\qquad \varphi = Arg[G(e^{j\omega T})]$$

Infatti, dalla trasformata del segnale sinusoidale

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[\sin(\omega t)] = \frac{z\sin\omega T}{z^2-(2\cos\omega T)z+1} \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{z}{z-e^{j\omega T}}\right) \end{aligned}$$

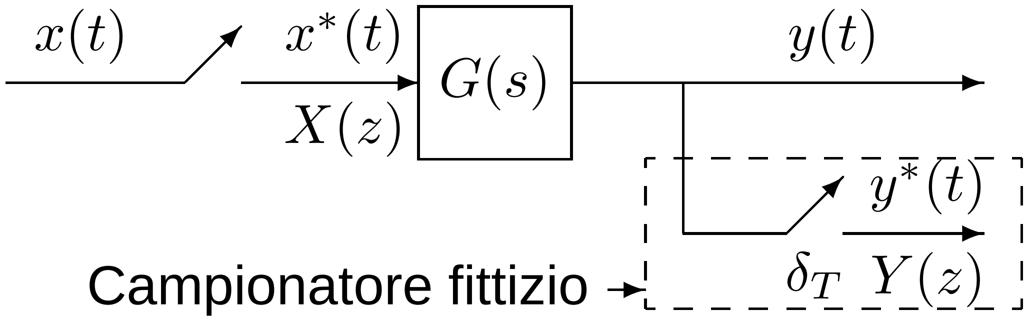
si ha

$$Y(z) = G(z)\,X(z) = Y_0(z) + \frac{|G(e^{j\omega T})|}{2j}\left(\frac{e^{j\varphi}z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{e^{j\varphi}z}{z-e^{-j\omega T}}\right)$$

$=$ termine transitorio $Y_0(z)$ che si annulla asintoticamente, dato dai poli stabili di $G(z)$
$+$ termine permanente sinusoidale di ampiezza $A=|G(e^{j\omega T})|$ e fase $\varphi = Arg[G(e^{j\omega T})]$

Composizione di schemi a blocchi

Caso 1)

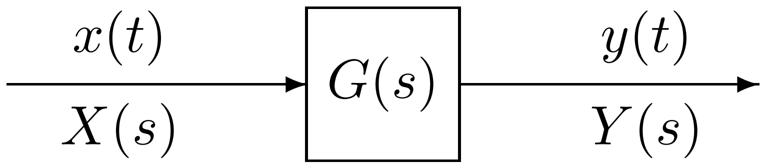


$$Y(s) = G(s)X^*(s)$$

$$Y^*(s) = [G(s)X^*(s)]^* = G(s)^*X^*(s)$$ (teorema della convoluzione)

$$Y(z) = G(z)X(z)$$

Caso 2)

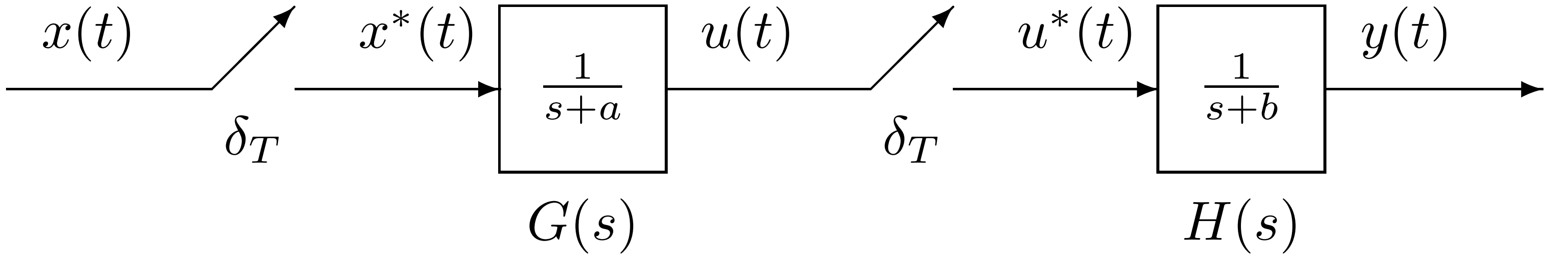


$$Y(s) = G(s)X(s)$$

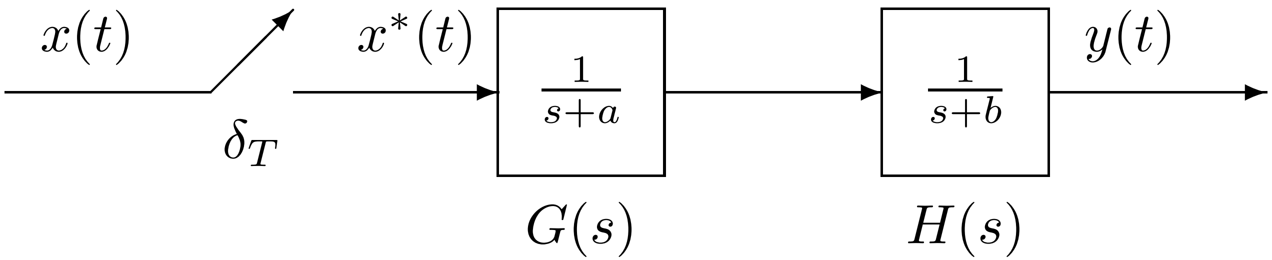
$Y^*(s) = [G(s)X(s)]^*$ (non si definisce la $X(z)$ mancando il suo campionamento)

$Y(z) = \mathcal{Z}[G(s)X(s)] = GX(z) \neq G(z)\,X(z)$ (del caso precedente)

Blocchi in cascata con/senza campionatore intermedio



(a)



(b)

Caso (a)

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z)\,H(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+a}\right]\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+b}\right]$$

Caso (b)

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \mathcal{Z}[G(s)\,H(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+a}\,\frac{1}{s+b}\right]$$

Esempio

Sia $a = b = 0$ a p. 18 $\Rightarrow$ doppio integratore con/senza campionamento intermedio

Nel caso (a)

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s}\right]\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s}\right] = \left(\frac{z}{z-1}\right)^2$$

Nel caso (b)

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

Se, nel caso (b), si aggiunge un organo ZOH in ingresso (dopo il campionatore), si ha

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \ldots \text{tabelle} \ldots = \frac{z-1}{z}\,\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2}$$

Ritroviamo ora quest'ultimo risultato facendo riferimento a un caso di natura cinematica e alle relative equazioni alle differenze

Interpretazione cinematica dell'esempio

Nel caso (b) con ZOH, sia l'uscita y del secondo integratore una posizione $p(t)$, l'uscita del primo integratore una velocità $v(t)$ e l'ingresso x un'accelerazione di comando $a(t)$ che varia solo negli istanti di campionamento $t = kT$. Posizione e velocità iniziali sono $p(0) = p_0$ e $v(0) = v_0$. Grazie allo ZOH, si ha in ingresso al primo integratore

$$a(t) = a(kT) = a_k \qquad\qquad t \in [kT, (k+1)T)$$

Si avrà

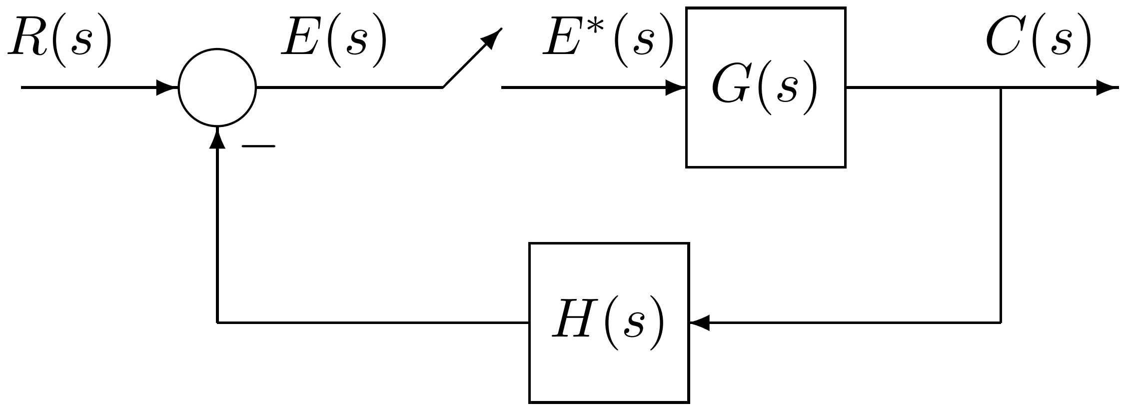
$$\begin{aligned} v_{k+1} &= v((k+1)T) = v_k + \int_{kT}^{(k+1)T} a(t)dt = v_k + a_k T \\ p_{k+1} &= p((k+1)T) = p_k + \int_{kT}^{(k+1)T} v(t)dt = p_k + v_k T + \frac{1}{2} a_k T^2 \end{aligned}$$

da cui, tenendo conto del teorema della traslazione in avanti

$$\mathcal{Z}[V(z) - v_0] = V(z) + A(z)T \quad \Rightarrow \quad V(z) = \frac{T}{z-1} A(z) + \frac{z v_0}{z-1}$$

$$\mathcal{Z}[P(z) - p_0] = P(z) + V(z)T + \frac{1}{2} A(z) T^2 \;\Rightarrow\; P(z) = \frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2} A(z) + \frac{z v_0 T + p_0 z(z-1))}{(z-1)^2}$$

Composizione di blocchi con retroazione – 1



$$
\begin{aligned}
E(s) &= R(s) - H(s)\,C(s) \qquad C(s) = G(s)\,E^*(s) \\
E(s) &= R(s) - H(s)\,G(s)\,E^*(s)
\end{aligned}
$$

campionando C fuori dall'anello $\left\{ \begin{aligned} E^*(s) &= R^*(s) - GH^*(s)\,E^*(s) \\ C^*(s) &= G^*(s)\,E^*(s) \end{aligned} \right.$

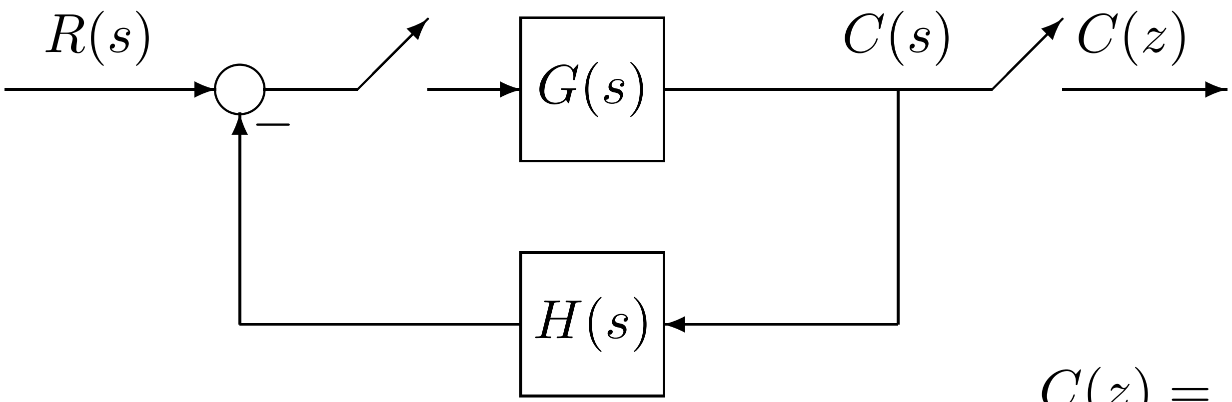
$$
C^*(s) = \frac{G^*(s)\,R^*(s)}{1 + GH^*(s)} \qquad \Rightarrow \qquad C(z) = \frac{G(z)\,R(z)}{1 + GH(z)}
$$

La funzione di trasferimento discreta del sistema in retroazione è

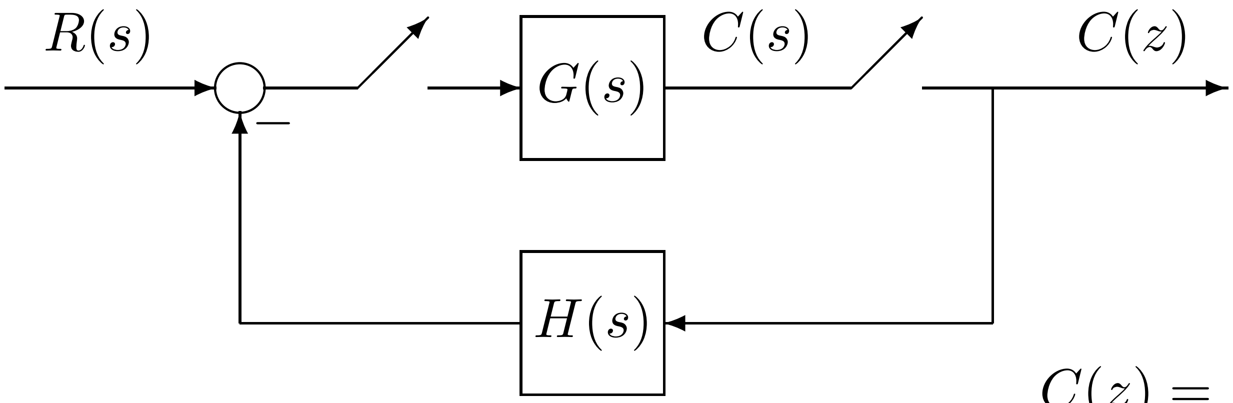
$$
\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}
$$

Composizione di blocchi con retroazione – 2

Alcune configurazioni tipiche di sistemi di controllo discreti in retroazione

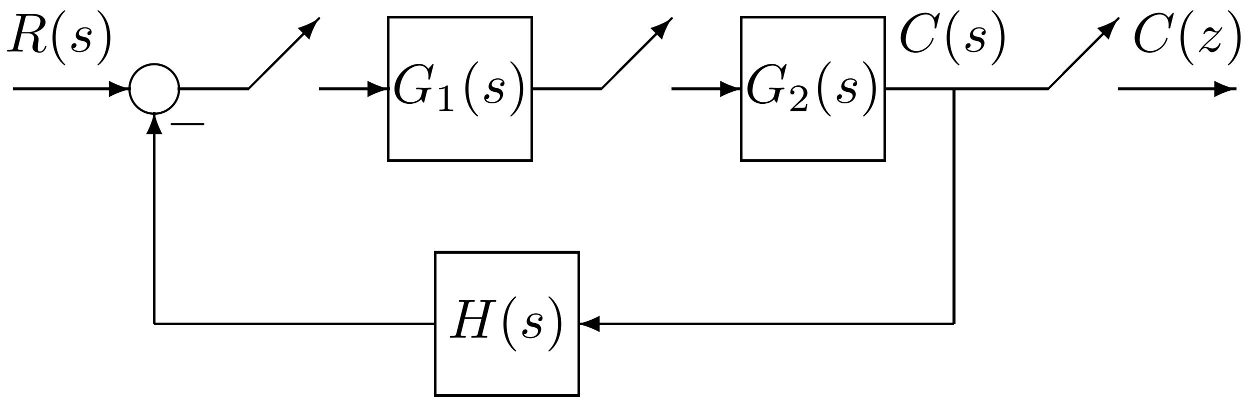


$$C(z) = \frac{G(z)\,R(z)}{1 + GH(z)}$$

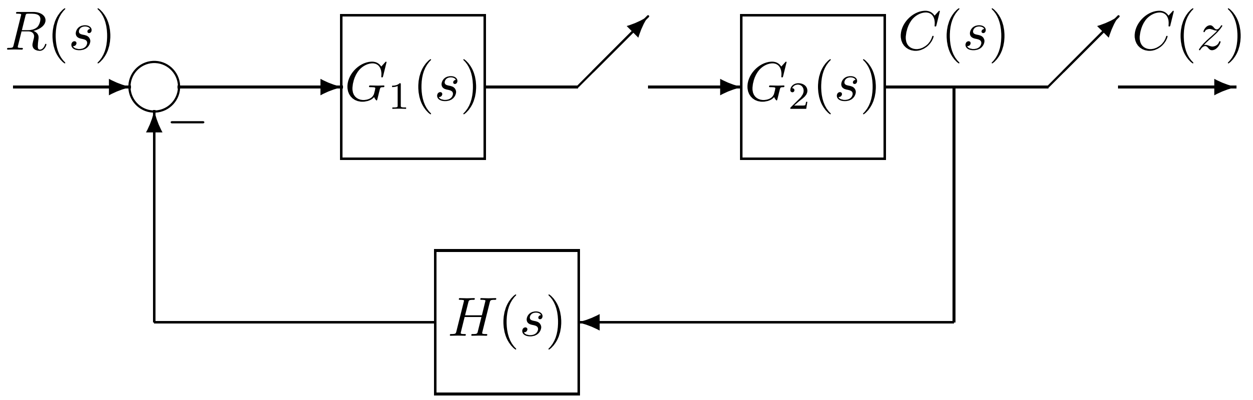


$$C(z) = \frac{G(z)\,R(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

Composizione di blocchi con retroazione – 3

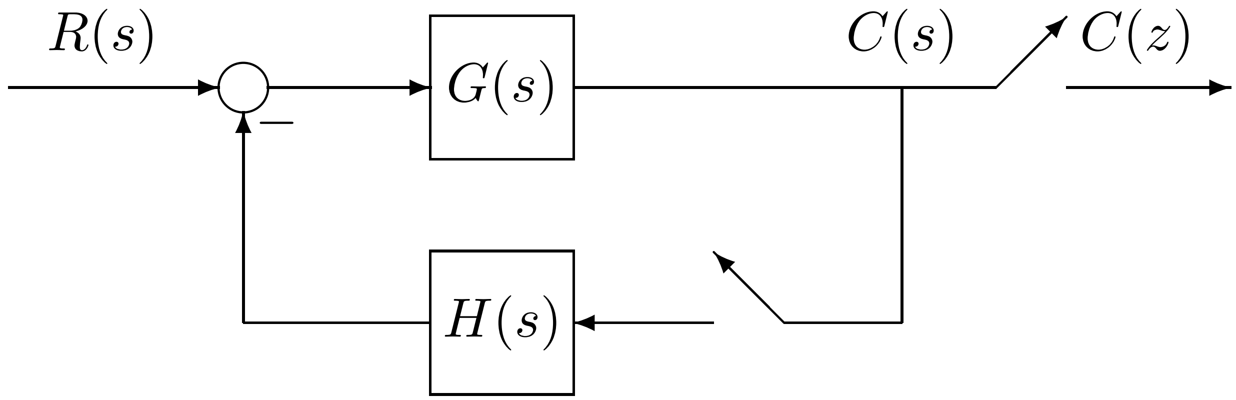


$$C(z) = \frac{G_1(z)\, G_2(z)\, R(z)}{1 + G_1(z)\, G_2H(z)}$$



$$C(z) = \frac{G_2(z)\, G_1R(z)}{1 + G_1G_2H(z)}$$

Composizione di blocchi con retroazione – 4



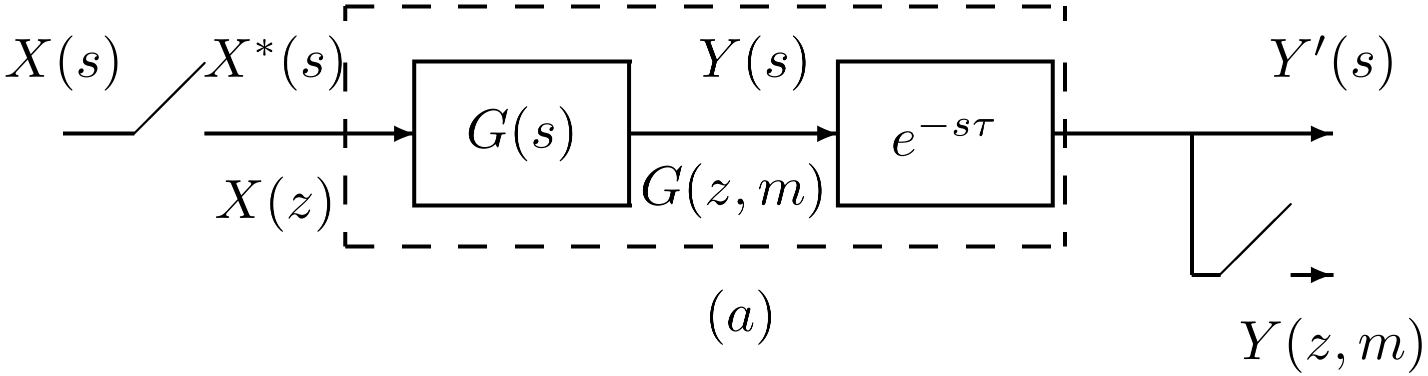
$$C(z) = \frac{GR(z)}{1 + GH(z)}$$

Conclusioni:

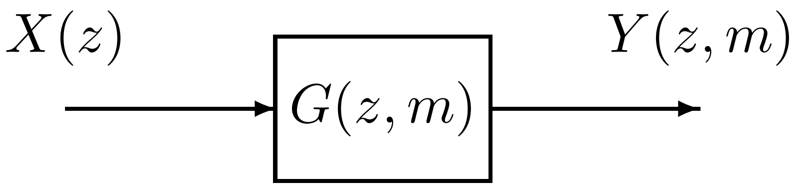
- in tutti gli esempi precedenti, è sempre possibile calcolare l'espressione dell'uscita $C(z)$ in termini di $\mathcal{Z}$-trasformata.
- negli ultimi due esempi, non si può definire una funzione di trasferimento discreta $C(z)/R(z)$ (in assenza del campionamento in ingresso su $R(s)$ a monte o a valle dell'organo di confronto)

Z-Trasformata modificata – 1

Serve a continuare a operare nel dominio della $\mathcal{Z}$-trasformata anche quando è presente un ritardo finito $\tau < T \pmod T$ nel processo, o quando questo ritardo viene introdotto dall'elaborazione della legge di controllo digitale



(a)



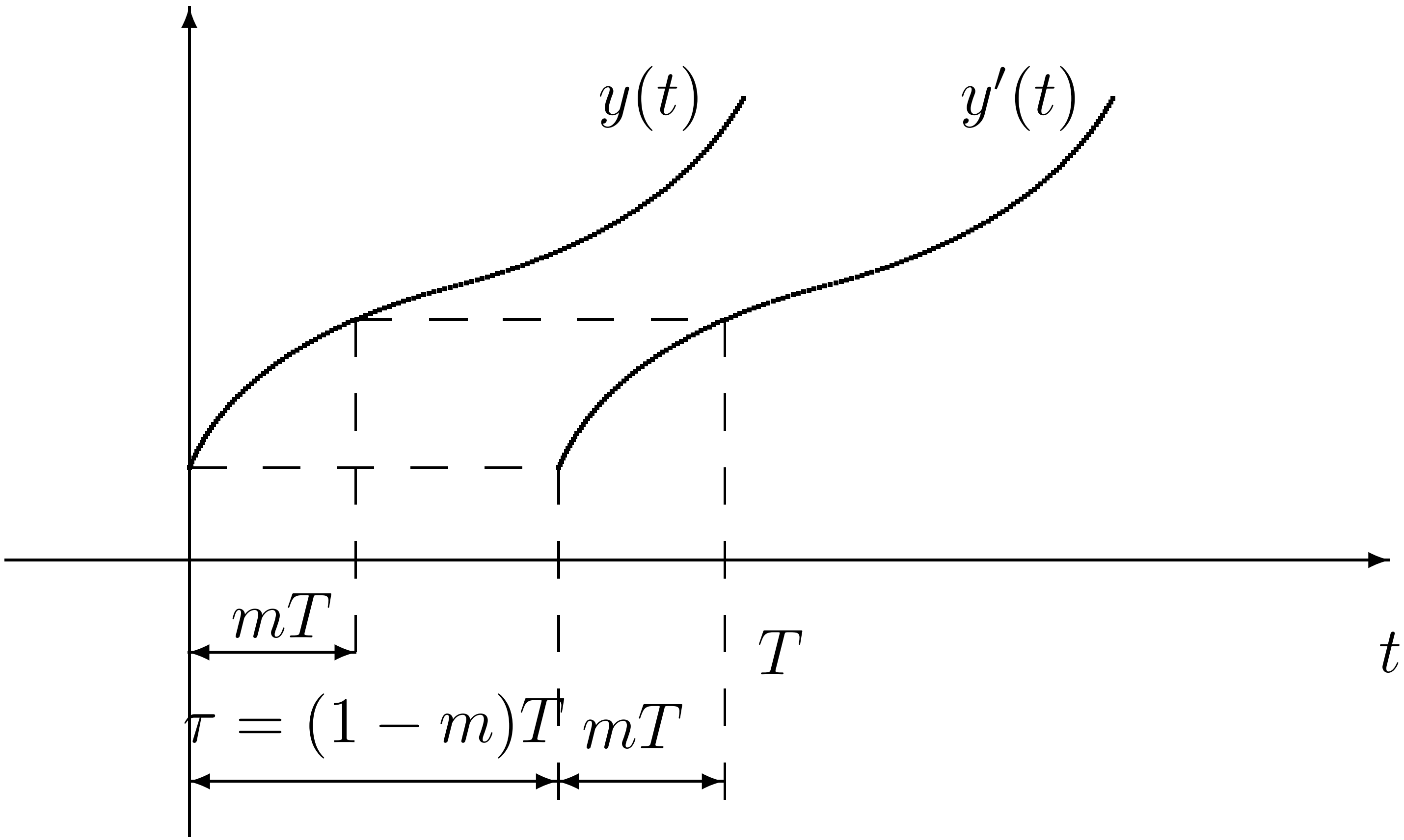
(b)

Si introduce il parametro

$$m = 1 - \frac{\tau}{T} \qquad \text{con } 0 < m \leq 1 \qquad (\tau = (1-m)T)$$

Z-Trasformata modificata – 2

L'uscita $y'(t)$ ritardata di $\tau = (1-m)T$ al tempo $t = kT$ è uguale all'uscita non ritardata $y(t)$ all'istante $t = kT - (1-m)T,\ k = 1, 2, 3, \ldots$



Z-Trasformata modificata – 3

Ricordando che

$$G^*(s) = \mathcal{L}[g^*(t)] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} g(kT)\delta(t-kT)\right]$$

si definisce la funzione di trasferimento discreta modificata $G(z,m)$ come

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_m[G(s)] = G(z,m) &= G^*(s,m)|_{s=\frac{1}{T}\ln z} \\
&= \mathcal{L}[g^*(t-(1-m)T)]|_{s=\frac{1}{T}\ln z} \\
&= \mathcal{L}[g^*(t-T+mT)]|_{s=\frac{1}{T}\ln z} \\
&= z^{-1}\mathcal{L}[g^*(t+mT)]|_{s=\frac{1}{T}\ln z}
\end{aligned}$$

Per $m \to 0$ si ha quindi che

$$G(z) = \lim_{m\to 0} z\,G(z,m)$$

Z-Trasformata modificata – 4

Vale la proprietà

$$\begin{aligned} Y(z,m) &= G(z,m)X(z) \\ &= y_0(mT)z^{-1} + y_1(mT)z^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

dove il valore $y_k(mT)$ vale

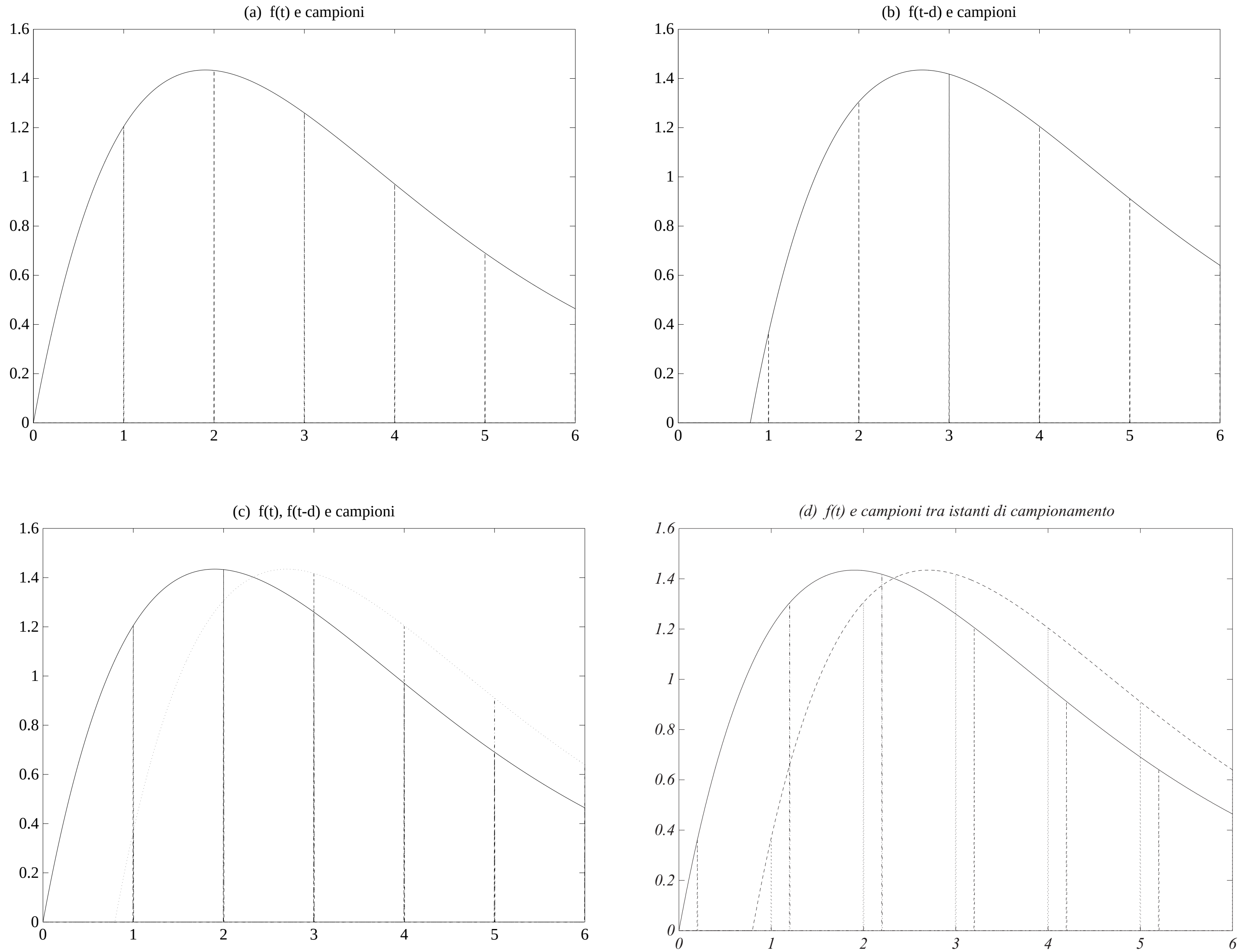
$$y_k(mT) = y((k+m)T)$$

Esempio: $f(t) = e^{-at}$

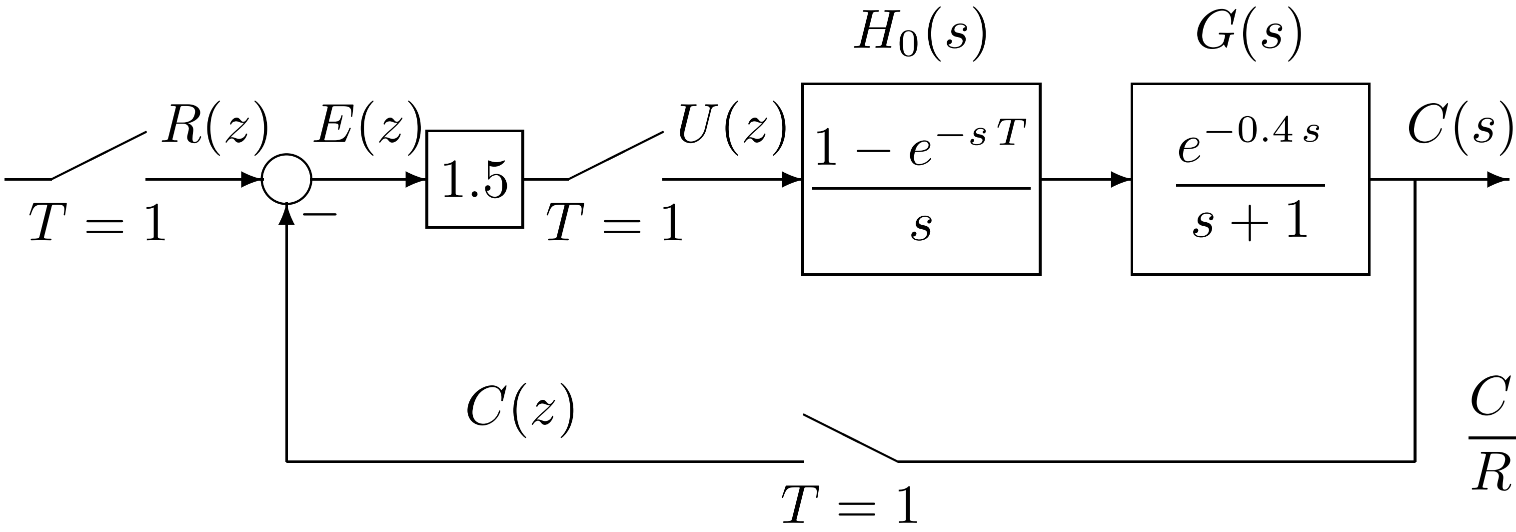
$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_m[e^{-a\,t}] &= \mathcal{Z}\left[e^{-a(t-\tau)}\,h(t-\tau)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a(k\,T-\tau)}\,h(k\,T-\tau)\,z^{-k} \qquad (\,\tau = (1-m)T\,) \\ &= e^{-a\,m\,T} z^{-1}\left(1 + e^{-a\,T} z^{-1} + e^{-2a\,T} z^{-2} + \ldots\right) + \cdots \\ &= \frac{e^{-a\,m\,T} z^{-1}}{1 - e^{-a\,T} z^{-1}} \end{aligned}$$

Z-Trasformata modificata – 5

Verifica grafica su una generica $f(t)$, con $T = 1$ s, $\tau = 0.8$ s (quindi, $m = 0.2$)



Esempio di uso della Z-Trasformata modificata



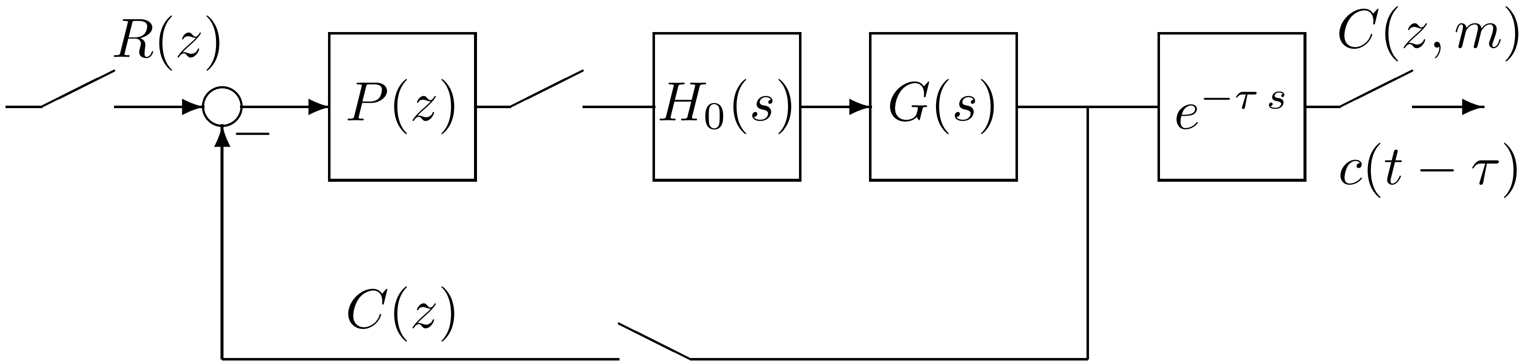
$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{1.5\ H_0G(z)}{1+1.5\ H_0G(z)}$$

$$\begin{aligned}
H_0G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\,\frac{e^{-0.4\,s}}{s+1}\right] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{e^{-0.4\,s}}{s(s+1)}\right] \\
&= (1-z^{-1})\mathcal{Z}_m\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] \qquad\qquad m = 1-\frac{\tau}{T} = 0.6 \\
&= (1-z^{-1})\left[\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{e^{-mT}z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}\right] \\
&= \frac{z^{-1}(0.450+0.182\,z^{-1})}{1-0.368\,z^{-1}} = \frac{C(z)}{U(z)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad c_n = 0.368\,c_{n-1} + 0.45\,u_{n-1} + 0.182\,u_{n-2}$$

Calcolo dell'uscita tra istanti di campionamento – 1

Esempio



Con $P(z) = 1.5$, $G(s) = \dfrac{1}{s+1}$ e $T = 1$ s, si ha

$$\frac{C(z,m)}{R(z)} = \frac{P(z)\; H_0G(z,m)}{1 + P(z)\; H_0G(z)}$$

$$H_0G(z,m) = \frac{z^{-1}\left[(1-e^{-m\,T}) + (e^{-m\,T} - e^{-T})z^{-1}\right]}{1 - e^{-T} z^{-1}}$$

$$H_0G(z) = \frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{1 - e^{-T} z^{-1}}$$

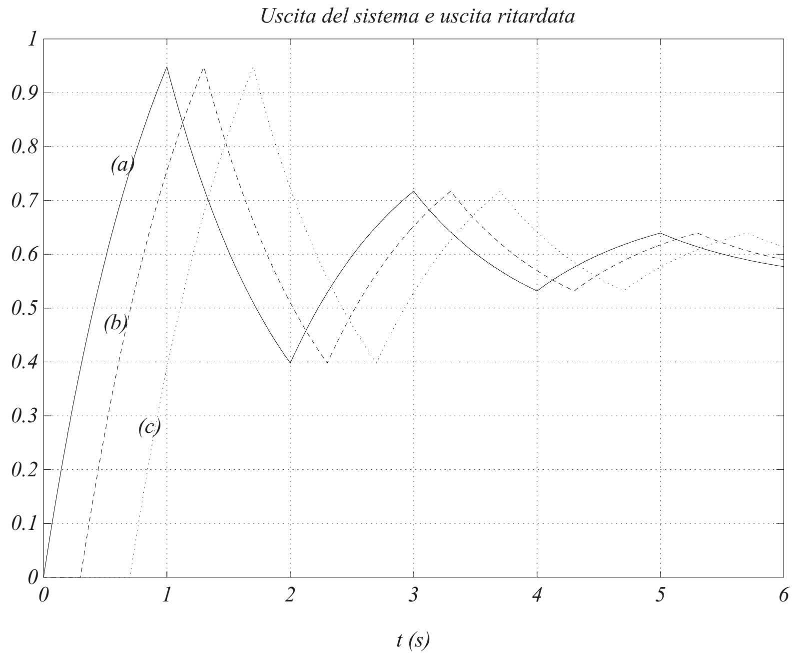
$$\frac{C(z,m)}{R(z)} = \frac{1.5\; z^{-1}\left[(1-e^{-m\,T}) + (e^{-m\,T} - e^{-T})z^{-1}\right]}{1 + 0.58\, z^{-1}}$$

Calcolo dell'uscita tra istanti di campionamento – 2

Simulazione con riferimento in ingresso pari a un gradino unitario $R(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}}$

$$C(z, m) = \frac{1.5\, z^{-1} \left[(1 - e^{-m\,T}) + (e^{-m\,T} - e^{-T}) z^{-1} \right]}{1 - 0.42\, z^{-1} - 0.58\, z^{-2}}$$

$$C(z, m) = 1.5(1 - e^{-m\,T}) z^{-1} + 1.5(0.58\, e^{-m\,T} + 0.052) z^{-2} + \ldots$$



$(a)\ \tau = 0 \qquad (b)\ \tau = 0.3\, s \qquad (c)\ \tau = 0.7\, s$