SISTEMI DIGITALI DI CONTROLLO

Prof. Alessandro De Luca

DIS, Università di Roma "La Sapienza"

deluca@dis.uniroma1.it

Lucidi tratti dal libro

C. Bonivento, C. Melchiorri, R. Zanasi: "Sistemi di Controllo Digitale"

Capitolo 5: Stabilità dei sistemi discreti

Si ringraziano gli autori

Stabilità dei sistemi discreti

Stabilità (ingresso-uscita) di sistemi descritti da una funzione di trasferimento $G(z)$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- stabilità semplice
- stabilità asintotica
- stabilità ingresso limitato - uscita limitata (BIBO)

La funzione di trasferimento può essere anche quella ad anello chiuso di un sistema a retroazione

$$G_0(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$ con eventualmente $G(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)]$

La stabilità del comportamento dinamico del sistema $G(z)$ dipende dalla posizione dei suoi poli, cioè dalle radici del polinomio $A(z)$, nel piano z

Stabilità dei sistemi discreti — Esempio

$$G(z) = \frac{4z^{-1}}{1 + az^{-1}} = \frac{4}{z + a}$$

La risposta all'ingresso

$$u(0) = 1, \qquad u(k) = 0, \;\; k > 0$$

è data da

$$Y(z)(1 + az^{-1}) = 4z^{-1}U(z)$$

$$y(k) = -ay(k-1) + 4u(k-1)$$

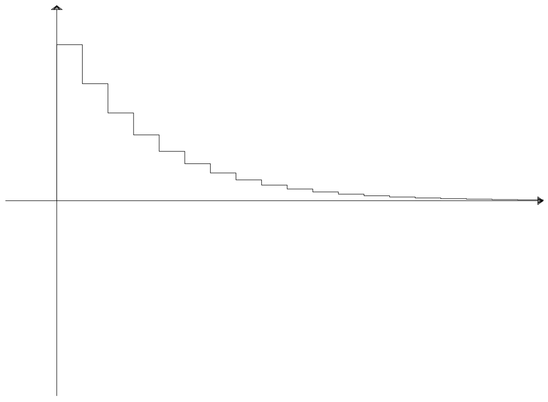
$$\begin{array}{rcl}
y(0) & = & 0 \\
y(1) & = & 4u(0) = 4 \\
y(2) & = & -ay(1) + 4u(1) = -ay(1) = -4a \\
y(3) & = & -ay(2) + 4u(2) = -ay(2) = 4a^2 \\
 & \cdots & \\
y(k) & = & -ay(k-1) + 4u(k-1) = 4(-a)^{k-1}
\end{array}$$

Studio grafico in corrispondenza ai valori (polo in $p = -a$)

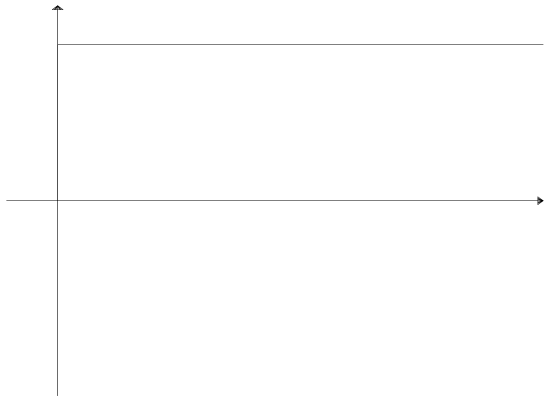
$$a = -0.75, \; a = 0.75, \; a = -1.25, \; a = 1.25, \; a = -1, \; a = 1$$

Stabilità dei sistemi discreti – Esempio (cont)

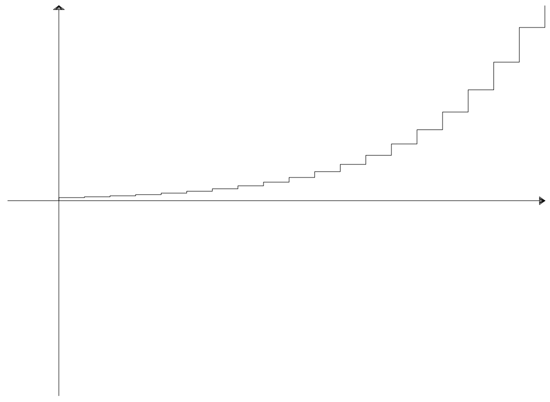
polo in z=0.75



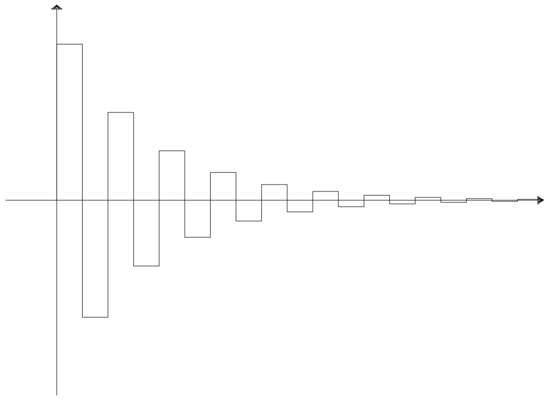
polo in z=1



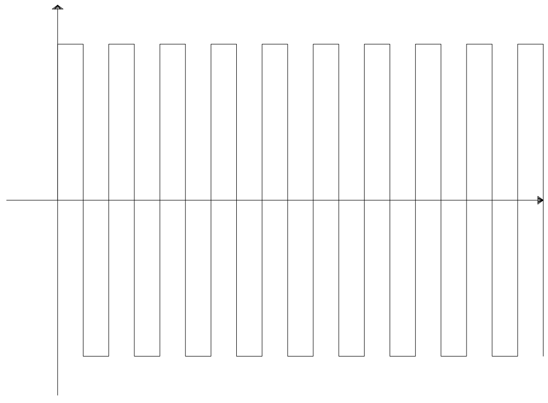
polo in z=1.25



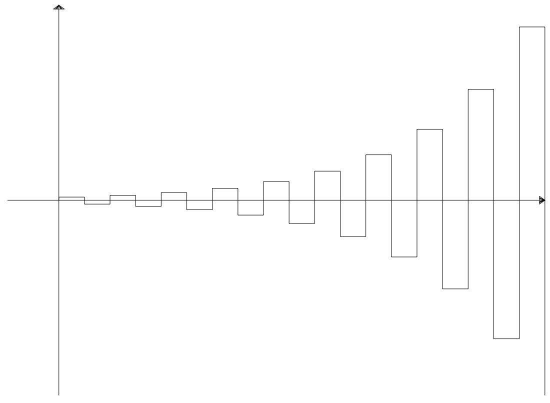
polo in z=-0.75



polo in z=-1

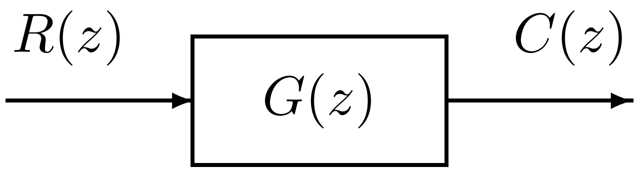


polo in z=-1.25

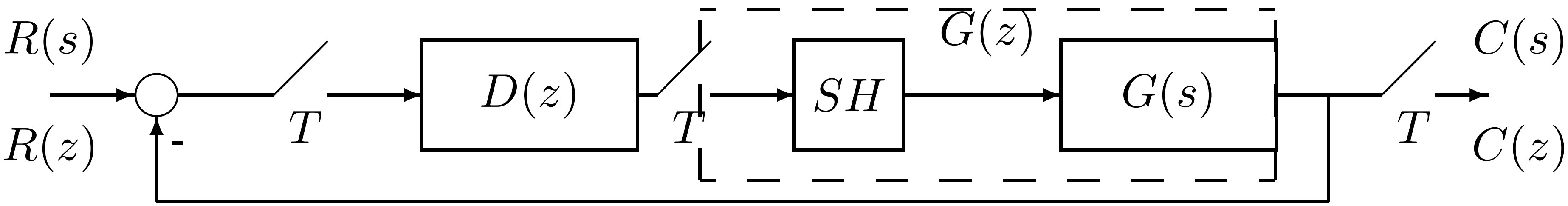


Condizioni di stabilità dei sistemi discreti – 1

Sia dato uno dei due seguenti casi



(a)



(b)

Caso (a) $$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Caso (b) $$G_0(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

Condizioni di stabilità dei sistemi discreti – 2

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \qquad \text{oppure} \qquad G_0(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutte le radici del polinomio $A(z)$ (o del polinomio a denominatore della $G_0(z)$), cioè i poli del sistema, sono entro il cerchio di raggio unitario con centro nell'origine del piano z, ossia

$$|p_i| < 1, \quad \forall i$$

Il sistema è stabile se tutti i poli a modulo unitario $|p_i| = 1$ sono poli semplici (la loro molteplicità è 1), mentre tutti i rimanenti poli sono entro il cerchio unitario

In generale, si deve risolvere un'equazione polinomiale

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

la cui soluzione è agevole solo per piccoli valori di n

Criteri per la determinizione della stabilità

Tre metodi principali per studiare la stabilità di sistemi discreti

1. utilizzare una trasformazione bilineare $z \mapsto w$ per passare da $G(z)$ ad una $G(w)$ e applicare a questa il criterio di Routh-Hurwitz (come nel caso del dominio di Laplace s)
   - concettualmente semplice, ma computazionalmente più complesso

2. utilizzare il criterio di Jury che elabora direttamente i coefficienti di $A(z)$, cioè del denominatore di $G(z)$
   - il più noto di tali criteri

3. per sistemi in retroazione, usare il criterio di Nyquist sul diagramma polare della risposta armonica
   - difficoltà legate al fatto che la $G(e^{j\omega T})$ è trascendente in ω

Trasformazione bilineare

Con la semplice trasformazione bilineare

$$z = \frac{1+w}{1-w} \qquad\qquad \leftrightarrow \qquad\qquad w = \frac{z-1}{z+1}$$

l'interno del cerchio unitario nel piano complesso z corrisponde al semipiano sinistro (aperto) del piano complesso w

$$|z| = \left|\frac{1+w}{1-w}\right| = \left|\frac{1+\sigma+j\omega}{1-\sigma-j\omega}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(1+\sigma)^2+\omega^2}{(1-\sigma)^2+\omega^2} < 1$$

$$\Rightarrow \quad (1+\sigma)^2+\omega^2 < (1-\sigma)^2+\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma < 0$$

e la circonferenza unitaria in z viene trasformata nell'asse immaginario del piano w

$$|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad (1+\sigma)^2+\omega^2 = (1-\sigma)^2+\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0$$

Un'altra possibile trasformazione bilineare con le stesse proprietà è

$$z = \frac{1+\frac{wT}{2}}{1-\frac{wT}{2}} \qquad\qquad \leftrightarrow \qquad\qquad w = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}$$

che è una migliore approssimazione nel dominio delle frequenze, ma inutilmente più complessa qui

Trasformazione bilineare e criterio di Routh-Hurwitz

Per l'analisi della stabilità di $G(z)$ (o di $G_0(z)$)

1. si considera l'equazione caratteristica

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

2. si applica la trasformazione bilineare

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^n + a_1 \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{n-1} + \ldots a_{n-1} \frac{1+w}{1-w} + a_n = 0$$

   da cui si ottiene

$$Q(w) = q_0 w^n + q_1 w^{n-1} + \cdots + q_{n-1} w + q_n = 0$$

3. si procede con il noto criterio di Routh-Hurwitz (e relativa tabella), studiando quindi i segni delle radici di $Q(w)$ e concludendo sulla stabilità della $G(z)$

Esempio di analisi di stabilità con il criterio di Routh

$$G(z) = \frac{z+1}{z^3+2z^2+z+1}$$

applicando la trasformazione bilineare al solo denominatore di $G(z)$ (l'equazione caratteristica del sistema!)

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 + 2\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + \frac{1+w}{1-w} + 1 = 0$$

e moltiplicando per $(1-w)^3$ si ottiene

$$-w^3 + 3w^2 + w + 5 = 0$$

che viola la condizione necessaria di stabilità asintotica (segni non concordi); infatti dalla tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 8/3 & \\ 0 & 5 & \end{array}$$

un cambio di segno in prima colonna $\Rightarrow$ Il sistema ha un polo instabile

Tabella di Jury – 1

Dato il polinomio in z

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

con $a_0 > 0$, la tabella di Jury è

	z^0	z^1	z^2	$\dots$	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_1	b_0	
4	b_0	b_1	$\cdots$	b_{n-2}	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	$\cdots$	c_1	c_0		
6	c_0	c_1	$\cdots$	c_{n-2}		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$2n-5$	p_3	p_2	p_1	p_0		
$2n-4$	p_0	p_1	p_2	p_3		
$2n-3$	q_2	q_1	q_0			

con $2n-3$ righe (sempre un numero dispari)

Tabella di Jury – 2

Prima riga: coefficienti di $P(z)$ in ordine crescente di potenza di z

Seconda riga: coefficienti della prima riga in ordine inverso

Gli elementi delle righe dispari da 3 a $(2n-3)$ sono i seguenti determinanti

$$
\begin{aligned}
b_k &= \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} & \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\
c_k &= \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} & \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-2 \\
&\vdots \\
q_k &= \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} & \qquad k = 0, 1, 2
\end{aligned}
$$

Gli elementi delle righe pari da 4 a $(2n-4)$ sono semplicemente gli elementi in ordine inverso delle righe dispari precedenti

Criterio di Jury

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema sia stabile (asintoticamente) è che siano soddisfatte le seguenti relazioni:

1. $|a_n| < a_0$
2. $P(z)|_{z=1} > 0$
3. $P(z)|_{z=-1} = \begin{cases} > 0 & n \text{ pari} \\ < 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$
4. $|b_{n-1}| > |b_0|$
   $|c_{n-2}| > |c_0|$
   $\vdots$
   $|q_2| > |q_0|$ (sulle righe dispari)

Le condizioni 1., 2., 3. si testano direttamente su $P(z)$ (la tabella serve solo se $n \geq 4$)

Esempio precedente $P(z) = z^3 + 2z^2 + z + 1$

1. $|1| < 1$, non verificata 2. $P(1) = 5$, verificata 3. $P(-1) = 1 \not< 0$, non verificata

$\Rightarrow$ il sistema risulta instabile

Esempi di uso del criterio di Jury – 1

$$P(z) = z^4 + 1.4z^3 + 0.71z^2 + 0.154z + 0.012$$

i coefficienti sono $a_0 = 1(> 0), a_1 = 1.4, a_2 = 0.71, a_3 = 1.154, a_4 = 0.012$, e le condizioni per il test di Jury sono quindi

1. $|0.012| < 1$
2. $P(1) = 3.276 > 0$
3. $P(-1) = 0.1680 > 0$ (qui, $n = 4$ pari)
4. tabella di Jury

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 0.012 & 0.154 & 0.710 & 1.400 & 1.000 \\
2 & 1.000 & 1.400 & 0.710 & 0.154 & 0.012 \\
3 & -1.000 & -1.398 & -0.701 & -0.137 & \\
4 & -0.137 & -0.701 & -1.398 & -1.000 & \\
5 & 0.981 & 1.302 & 0.510 & &
\end{array}$$

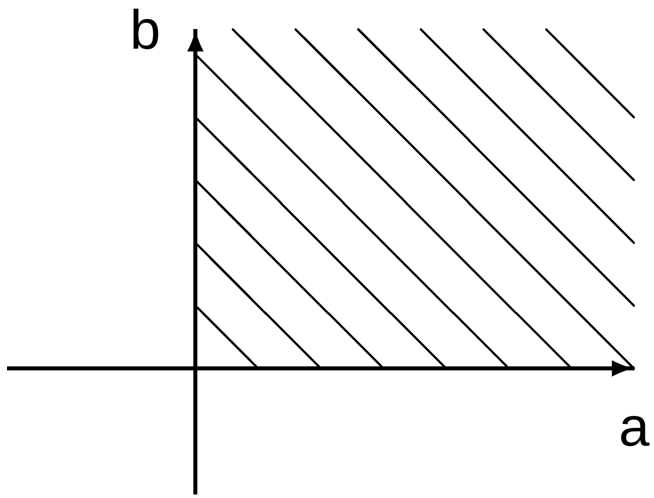
e quindi $|-1| > |-0.137|, \; |0.981| > |0.51|$

$\Rightarrow$ tutte le condizioni sono rispettate $\Rightarrow$ il sistema è stabile

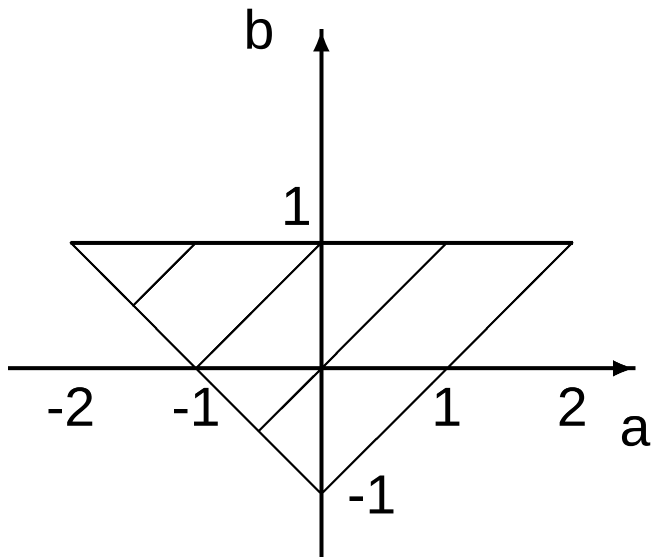
Esempi di uso del criterio di Jury – 2

equazione caratteristica del secondo ordine in forma parametrica (confronto)

$$P(s) = s^2 + as + b = 0 \qquad \longleftrightarrow \qquad P(z) = z^2 + az + b = 0$$



zona di stabilità per $P(s)$



zona di stabilità per $P(z)$

CN&S stabilità $P(s)$: $\quad a > 0, \; b > 0$

CN&S stabilità $P(z)$: $\quad$ 1. $|b| < 1$ $\quad$ 2. $P(1) = 1 + a + b > 0$ (cioè $b > -a - 1$)

3. $P(-1) = 1 - a + b > 0$ (cioè $b > a - 1$)

(allo stesso risultato si arriva ovviamente con la trasformazione bilineare e il test di Routh)

Esempi di uso del criterio di Jury – 3

$$P(z) = z^3 - 1.5z^2 - 0.1z + 0.5$$

i coefficienti sono $a_0 = 1(> 0), a_1 = -1.5, a_2 = -0.1, a_3 = 0.5$. Le prime due condizioni per il test di Jury sono

1. $|0.5| < 1$
2. $P(1) = -0.1 \not> 0$

e non essendo soddisfatta la seconda condizione, risulta inutile proseguire il test

$\Rightarrow$ il sistema risulta instabile

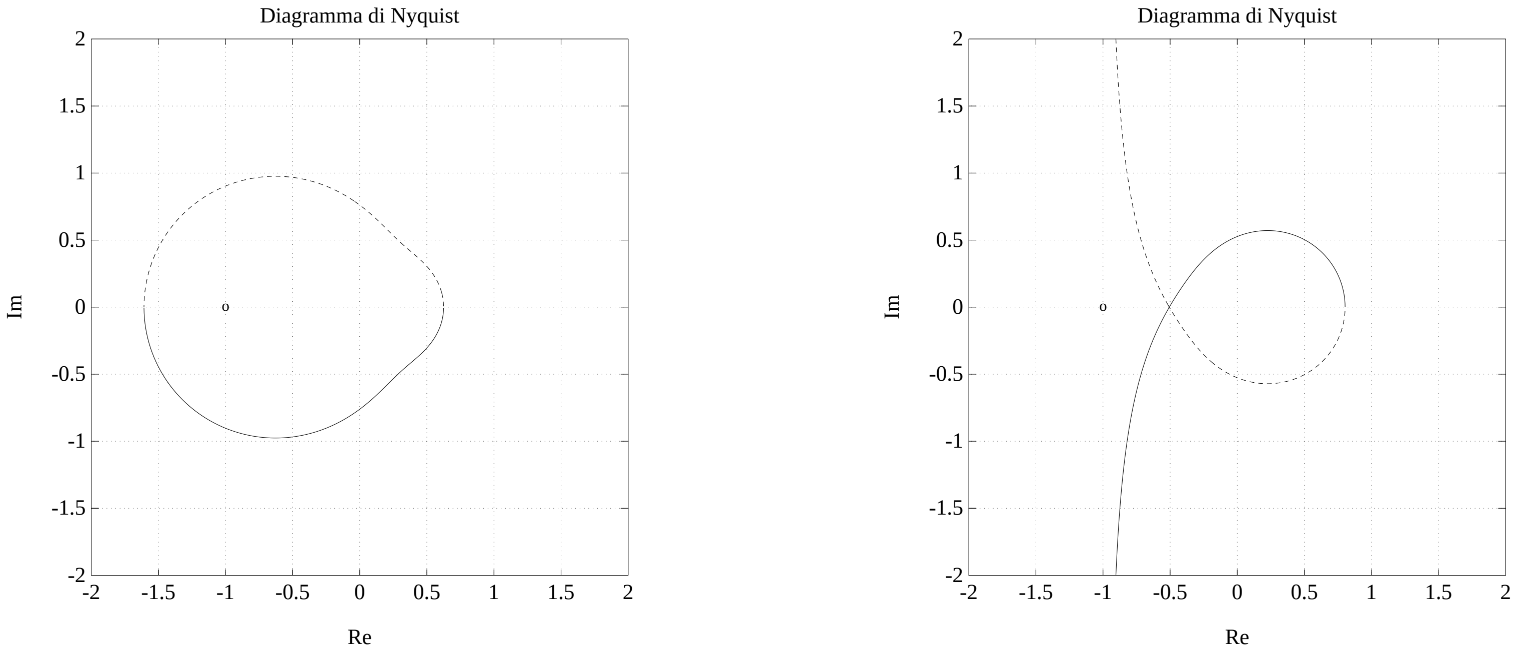
Diagramma di Nyquist

E’ possibile decidere sulla stabilità di sistemi in retroazione analizzando il solo comportamento frequenziale (diagramma di Nyquist) della risposta armonica di anello rispetto al punto critico $(-1 + j0)$

$$G(e^{j\omega T}) \qquad -\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T} \quad \text{(striscia primaria)}$$

Se $G(z)$ è di tipo 0 (nessun polo in $z = 1$), il diagramma di Nyquist è una curva chiusa

Se è di tipo 1 o 2, allora si ha una curva aperta, che viene chiusa con una circonferenza o semicirconferenza all’infinito percorsa in senso orario



Criterio di Nyquist

Criterio di Nyquist - I

Sia data una funzione di guadagno d'anello $G(z)$ con tutti i poli asintoticamente stabili (a modulo minore di 1), tranne al più un polo semplice o doppio in $z = 1$.

Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(e^{j\omega T})$ tracciato per $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ non circondi nè tocchi il punto critico $-1 + j0$

Criterio di Nyquist - II

Sia data una funzione di guadagno d'anello $G(z)$ senza poli a modulo unitario, tranne al più un polo semplice o doppio in $z = 1$.

Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(e^{j\omega T})$ tracciato per $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ circondi il punto critico $-1 + j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $G(z)$ con modulo > 1

Ogni giro in meno in senso antiorario, oppure ogni giro in più in senso orario, corrisponde alla presenza di un polo a modulo maggiore di uno nel sistema in retroazione

Enunciato generale del criterio di Nyquist

Sia data una funzione di guadagno d'anello $G(z)$.

Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(e^{j\omega T})$ tracciato per $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ circondi il punto critico $-1 + j0$

- per tanti giri al finito in senso antiorario quanti sono i poli di $G(z)$ a modulo > 1
- per tanti mezzi giri al finito in senso antiorario quanti sono i poli a modulo $= 1$

Aspetti operativi

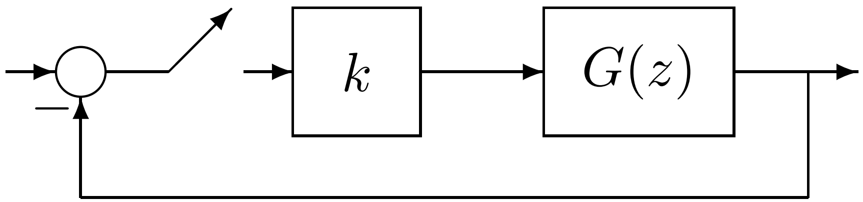
a) non è possibile appoggiarsi per il tracciamento del diagramma di Nyquist alle regole dei diagrammi di Bode (come invece per $G(s)$ e $G(j\omega)$), perché la $G(e^{j\omega T})$ non è una funzione razionale di ω

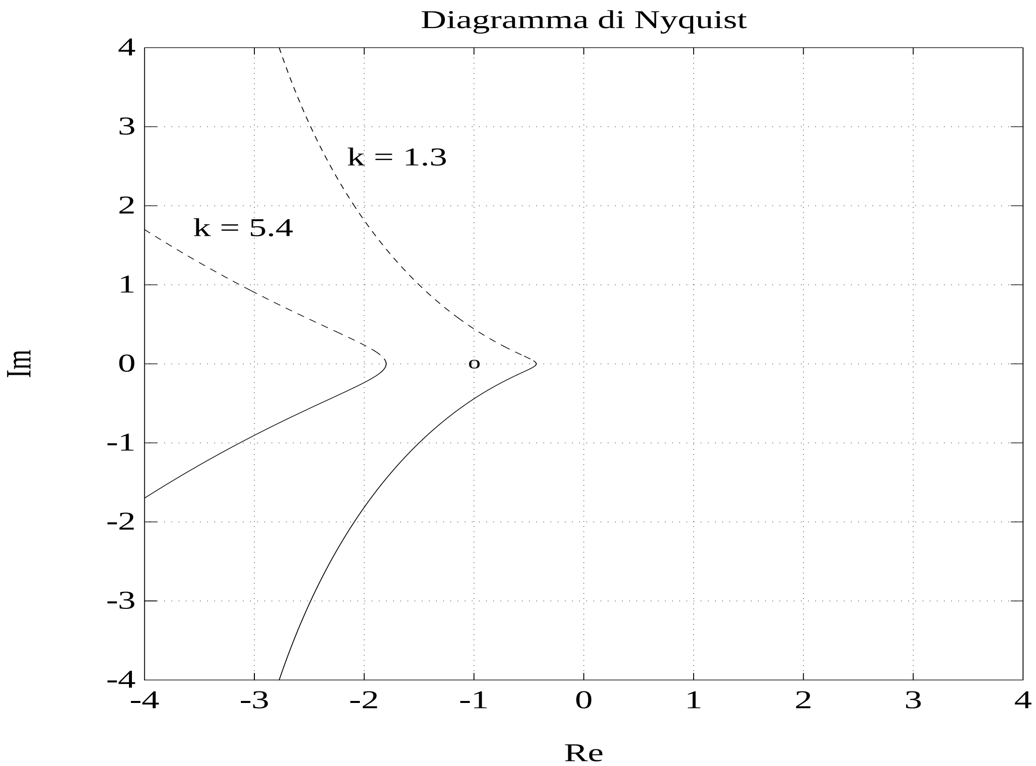
b) necessario l'uso di programmi di calcolo (`Matlab`)

c) in alternativa, uso della trasformazione bilineare $z \mapsto w = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}$ e costruzione convenzionale dei diagrammi di Bode e Nyquist, ma con un'approssimazione in frequenza valida solo per $\omega T \ll \pi$

Esempi di uso del criterio di Nyquist – 1

$$G(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}$$





Il sistema in retroazione è stabile per $k = 1.3$, instabile per $k = 5.4$

Esempi di uso del criterio di Nyquist – 1 (cont)

Verifica sul sistema ad anello chiuso

$$W(z) = \frac{k\,G(z)}{1 + k\,G(z)} = \frac{kz}{(z-1)(z-0.5)+kz} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

con

$$A(z) = z^2 + (k-1.5)z + 0.5$$

Applicando le prime tre condizioni (essendo solo $n = 2$, pari) del criterio di Jury, si ha stabilità asintotica se e solo se

1. $|1| < 0.5$ (ok)
2. $A(1) = k > 0$
3. $A(-1) = 3 - k > 0$

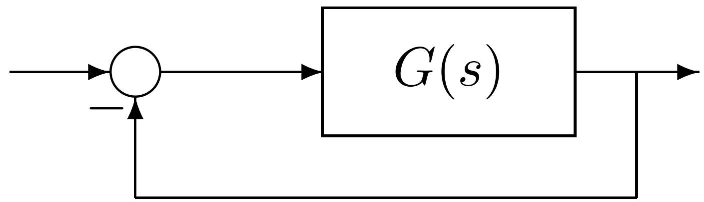
ossia per

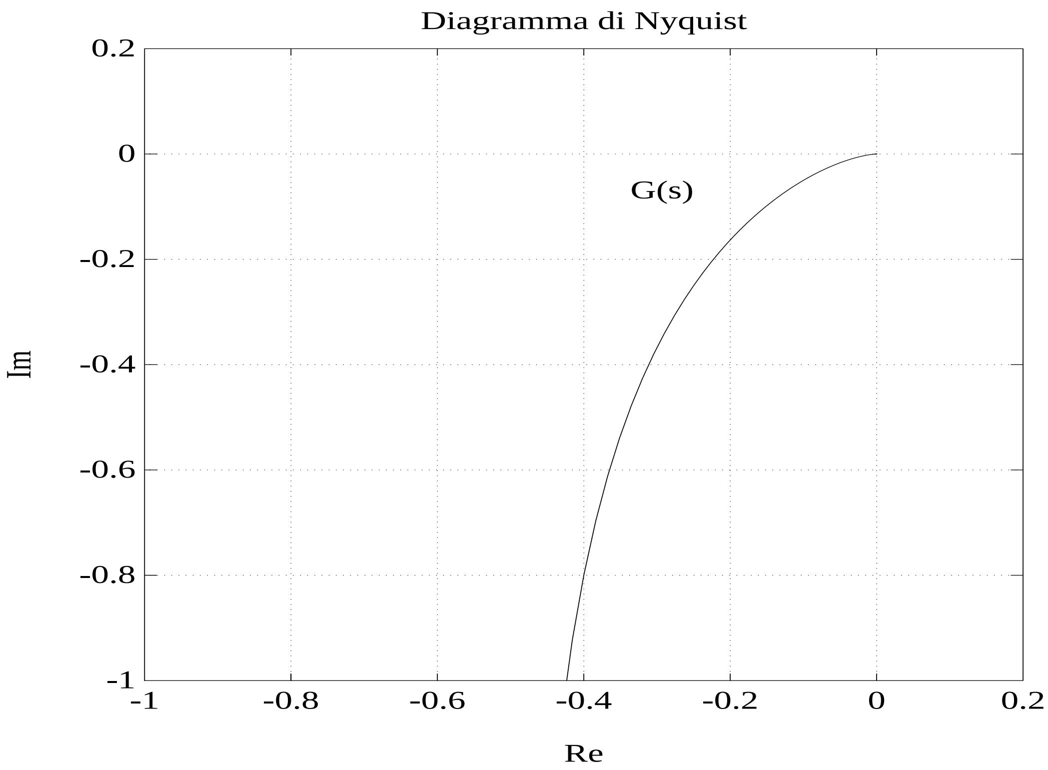
$$0 < k < 3$$

Esempi di uso del criterio di Nyquist – 2

Consideriamo il sistema a tempo continuo

$$G(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$





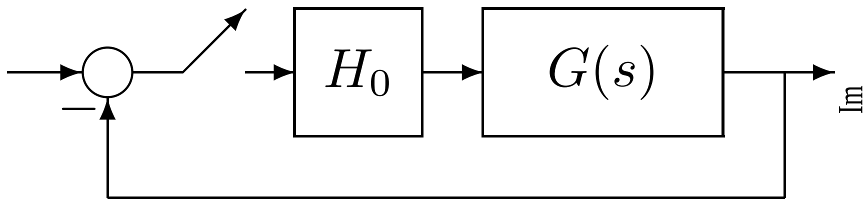
$\Rightarrow$ il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente

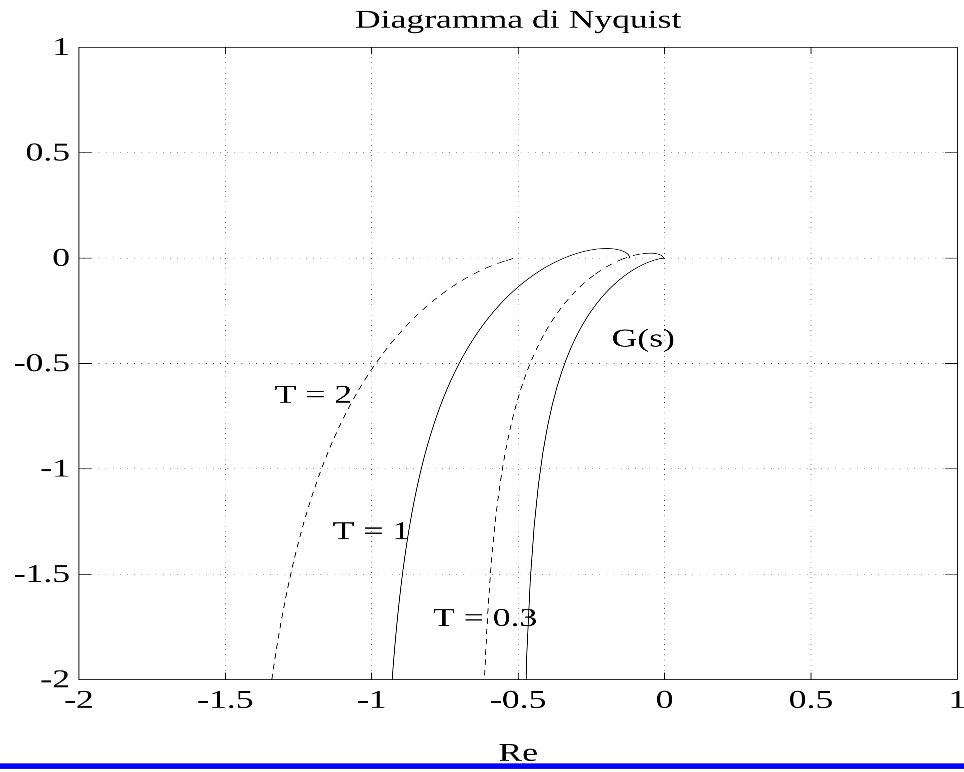
Esempi di uso del criterio di Nyquist – 2 (cont)

Verifichiamo ora l'andamento del diagramma di Nyquist e la stabilità del sistema in retroazione in presenza di campionamento e con un ricostruttore di ordine zero, al variare del periodo T

$$G(z) \;=\; \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\,\frac{2}{s(s+2)}\right] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{2}{s^2(s+2)}\right]$$

$$\text{(dalle tavole \ldots)} \;=\; \frac{(2T-1+e^{-2T})z+(1-e^{-2T}-2Te^{-2T})}{2(z-1)(z-e^{-2T})}$$

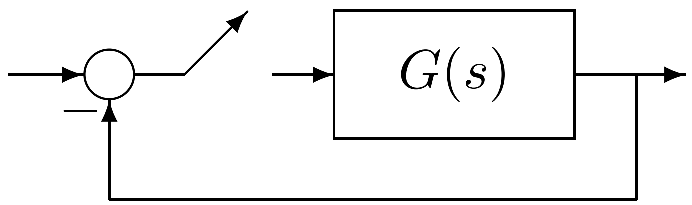


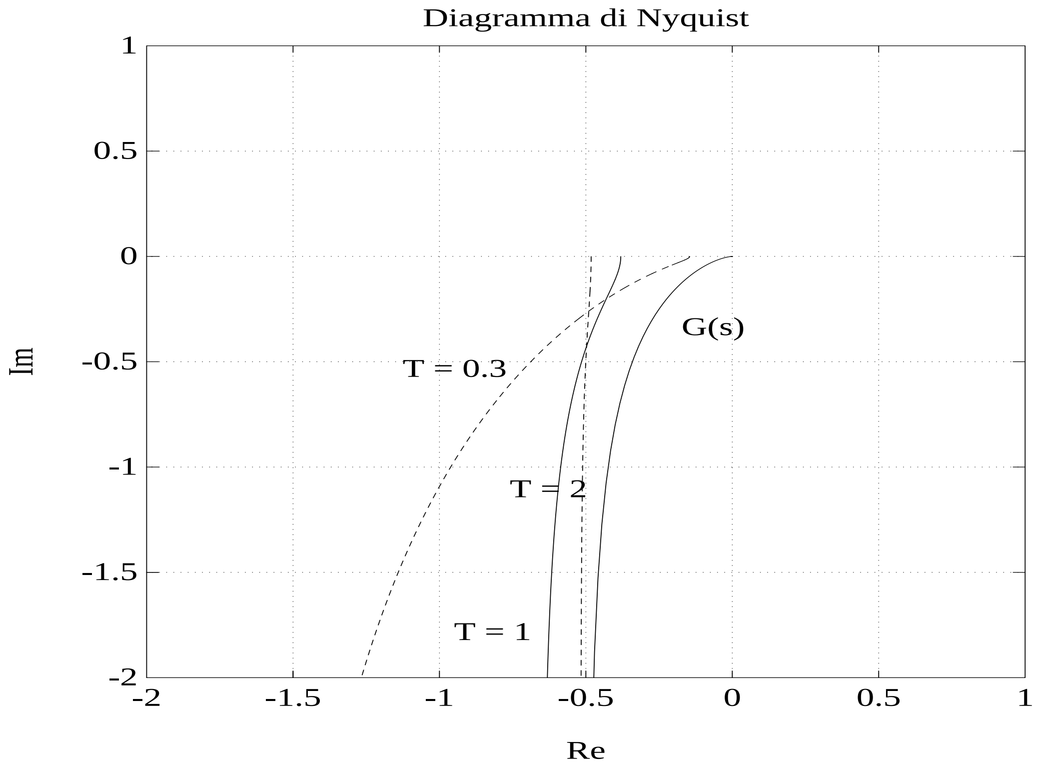


Esempi di uso del criterio di Nyquist – 2 (cont)

... e senza ricostruttore

$$G'(z) = \mathcal{Z}[G(s)] = \frac{z(1-e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})}$$





con differenze evidenti rispetto al caso precedente

Luogo delle radici

Strumento utile di analisi e sintesi, analogo a quello per sistemi tempo continuo

Sia $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ in catena diretta, preceduta da un guadagno k e chiusa in retroazione unitaria

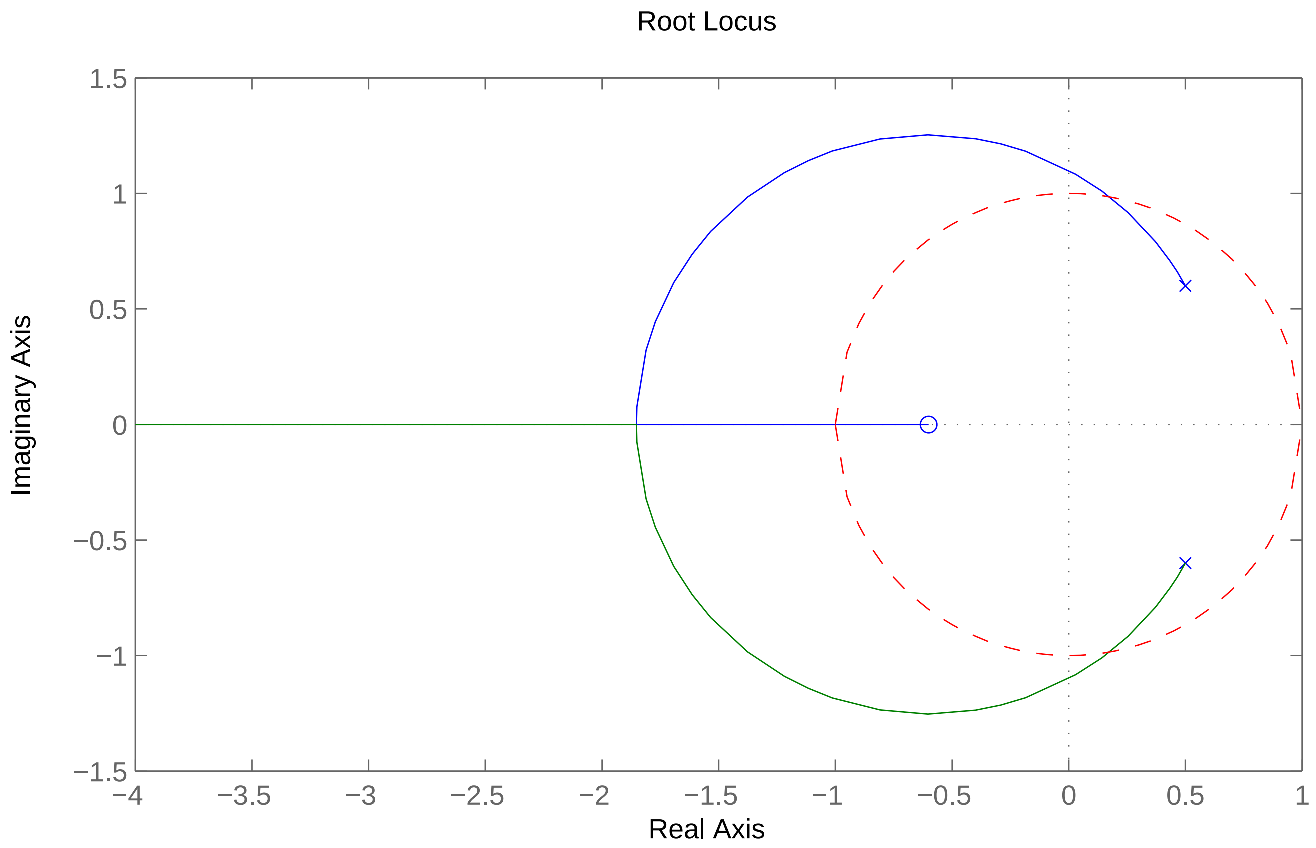
- il luogo delle radici è il luogo dei punti del piano complesso z che sono zeri (radici) della funzione
$$F(z) = A(z) + k\,B(z)$$
al variare del parametro k nell'intervallo $[0, +\infty)$ (o $(-\infty, 0]$)
- $F(z)$ è il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso
$$W(z) = \frac{k\,G(z)}{1 + k\,G(z)} = \frac{k\,B(z)}{A(z) + k\,B(z)}$$
- per il tracciamento del luogo valgono le stesse regole del caso continuo
- cambia l'interpretazione dei risultati che si ottengono (stabilità valutata rispetto al cerchio unitario)
- si parla di contorno delle radici se k è un parametro qualsiasi (non solo il guadagno del controllore)

Luogo delle radici – Esempio

Dato il seguente sistema in catena aperta, con due poli in $p_{1,2} = 0.5 \pm j0.6$ e uno zero in $z_1 = -0.6$

$$G(z) = k\frac{z + 0.6}{z^2 - z + 0.61}$$

per il sistema in retroazione unitaria si ha per $k \in [0, +\infty)$



Luogo delle radici – Esempio (cont)

Per determinare il massimo valore di k compatibile con la stabilità asintotica, si applica il criterio di Jury a

$$F(z) = (z^2 - z + 0.61) + k(z + 0.6) = z^2 + (k-1)z + (0.6k + 0.61)$$

e quindi

1. $|0.6k + 0.61| < 1 \quad \Rightarrow \quad k < 0.65$
2. $P(1) = 1.6\,k + 0.61 > 0 \quad \Rightarrow \quad k > -0.38$
3. $P(-1) = 2.61 - 0.4\,k > 0 \quad \Rightarrow \quad k < 6.525$

Per il luogo positivo considerato, si ha stabilità ad anello chiuso per $k \in [0, 0.65)$

Per quello negativo, $k \in (-0.38, 0]$

Stessa conclusione si ha con la trasformazione conforme e il criterio di Routh-Hurwitz

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + (k-1)\left(\frac{1+w}{1-w}\right) + (0.6k + 0.61) = 0$$

$$\Rightarrow \; F(w) = (2.61 - 0.4k)w^2 + 2(0.39 - 0.6k)w + (1.6k + 0.61)$$