

SISTEMI DIGITALI DI CONTROLLO

Prof. Alessandro De Luca

DIS, Università di Roma “La Sapienza”

deluca@dis.uniroma1.it

Lucidi tratti dal libro

C. Bonivento, C. Melchiorri, R. Zanasi: “Sistemi di Controllo Digitale”

Capitolo 6: Specifiche di progetto

Si ringraziano gli autori

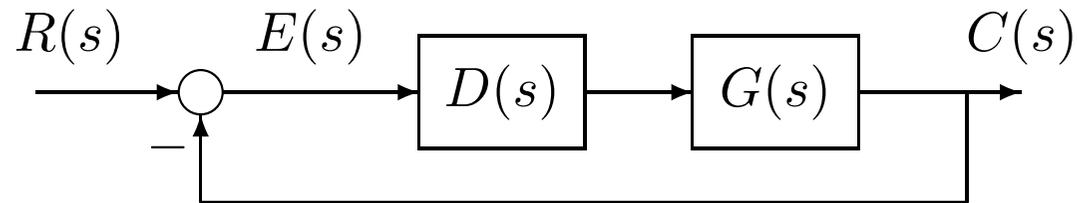
Specifiche di progetto dei sistemi di controllo

Specifiche che il sistema controllato (**stabile asintoticamente**) deve soddisfare a **regime** permanente (o in condizioni statiche) e durante il regime **transitorio** (o in condizioni dinamiche)

- **Precisione a regime**: capacità del sistema di seguire alcuni segnali di riferimento con il minimo errore \Rightarrow poli in $z = 1$, aumento del guadagno, ...
- **Risposta nel transitorio**: andamento per tempi finiti dell'uscita del sistema in retroazione in risposta a segnali tipici in ingresso \Rightarrow in risposta al gradino nel dominio del tempo (posizione dei poli), o nel dominio frequenziale
- **Stabilità relativa**: margini di stabilità \Rightarrow sul diagramma di Nyquist
- **Sensibilità parametrica**: le prestazioni del sistema non vengono alterate (troppo) dalle variazioni di parametri del sistema (tipicamente in catena diretta)
- **Reiezione di disturbi**: capacità del sistema di ridurre al minimo l'influenza sull'uscita di eventuali disturbi che entrano nell'anello di controllo \Rightarrow poli in $z = 1$ (**prima** del disturbo), aumento del guadagno, ...
- **Sforzo di controllo**: limiti sull'ampiezza massima della variabile manipolabile $u(t)$, o sull'energia entrante nel sistema (proporzionale a $\int u^2(t)dt$)

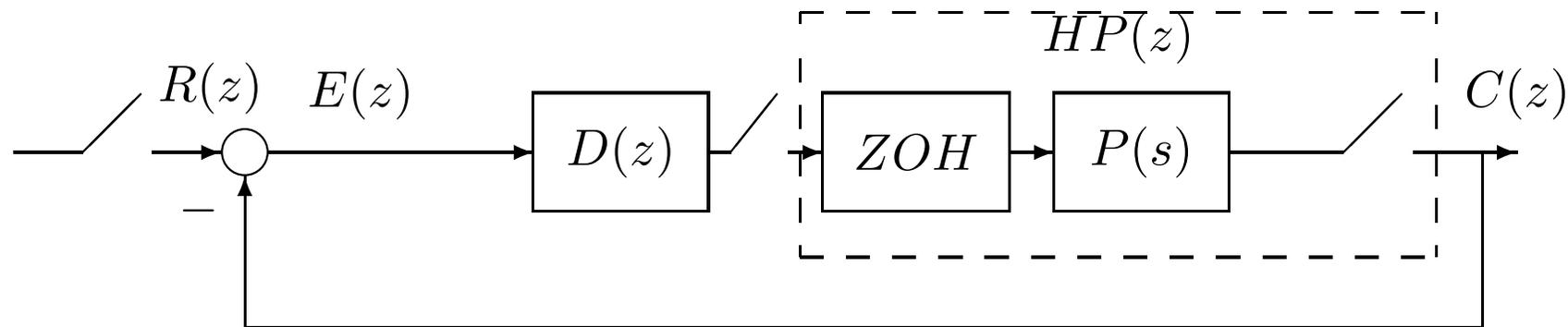
Specifiche a regime

Errori a regime (**caso continuo**): **tipo** di sistema \Leftrightarrow numero di poli in $s = 0$



$$D(s)G(s) = \frac{K(1 + q_1s)(1 + q_2s) \dots (1 + q_ms)}{s^N(1 + p_1s)(1 + p_2s) \dots (1 + p_ps)}$$

Errori a regime (**caso discreto**): **tipo** di sistema \Leftrightarrow numero di poli in $z = 1$



$$G(z) = D(z)HP(z) = D(z)(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}\right] \quad E(z) = \frac{1}{1 + G(z)} R(z) = W_e(z)R(z)$$

Errori a regime (retroazione unitaria)

Assumendo che il sistema ad anello chiuso sia asintoticamente stabile, l'errore a regime può essere calcolato mediante il teorema del valore finale

$$e_{reg} = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})E(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1}) \frac{1}{1+G(z)} R(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} [\frac{z-1}{z} W_e(z) R(z)]$$

Le specifiche sono date in termini di risposta a regime a riferimenti in ingresso che sono **polinomi fattoriali canonici di ordine h**

$$r(kT) = \binom{k}{h} T^h = \frac{k(k-1) \dots (k-h+1)}{h!} T^h$$

eventualmente scalati per una costante r_0

$$\text{ordine } h = 0 \rightarrow r(kT) = 1 \quad (\text{gradino})$$

$$\text{ordine } h = 1 \rightarrow r(kT) = kT \quad (\text{rampa})$$

$$\text{ordine } h = 2 \rightarrow r(kT) = \frac{k(k-1)T^2}{2} = \frac{1}{2} (\text{parabola discreta} - T \cdot \text{rampa})$$

(spesso si usa semplicemente la parabola discreta $r(kT) = (kT)^2$)

Sistema di controllo discreto di tipo h

Il sistema di controllo discreto a retroazione è di tipo h se in risposta a un ingresso di ordine h presenta un errore a regime **costante** e **diverso da zero**

Data la struttura delle $R(z)$ di ingressi canonici campionati, ciò accade se e solo se la **funzione di trasferimento d'errore** $W_e(z)$

$$W_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + G(z)} \left(= 1 - \frac{G(z)}{1 + G(z)} = 1 - W(z) \right)$$

ha uno **zero in $z = 1$ di molteplicità h** \Leftrightarrow la $G(z)$ ha un **polo in $z = 1$ di molteplicità h**

Posto $k_G = \left[(1 - z^{-1})^h G(z) / T^h \right]_{z=1}$, un sistema di controllo di tipo h ha un errore a regime per un ingresso di ordine h pari a

$$e_0 = \frac{1}{1 + k_G} \quad (h = 0)$$
$$e_h = \frac{1}{k_G} \quad (h \geq 1)$$

Verifica per i casi notevoli di ordine $h = 0, 1, 2$, con una terminologia di tipo meccanico

Errore a regime per ingressi canonici – 1

Errore di **posizione** per ingresso a gradino campionato (ordine 0)

$$r(kT) = r_0 \quad \rightarrow \quad R(z) = r_0 \frac{z}{z-1} = \frac{r_0}{1-z^{-1}}$$

$$e_p (= e_0) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1}) \frac{1}{1+G(z)} \frac{r_0}{1-z^{-1}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{r_0}{1+G(z)} \right]$$

Definendo la **costante di posizione** $k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$

$$e_p = \frac{r_0}{1+k_p}$$

Sistema di tipo $h = 0$: k_p finito

Sistema di tipo $h = 1, 2, \dots$: $k_p = \infty \Rightarrow e_p = 0$

Errore a regime per ingressi canonici – 2

Errore di **velocità** per ingresso a rampa campionata (ordine 1)

$$r(kT) = r_0 kT \quad \rightarrow \quad R(z) = r_0 \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{Tz^{-1}r_0}{(1-z^{-1})^2}$$

$$e_v (= e_1) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1}) \frac{1}{1+G(z)} \frac{Tz^{-1}r_0}{(1-z^{-1})^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{Tr_0}{(1-z^{-1})G(z)} \right]$$

Definendo la **costante di velocità** $k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})G(z)}{T}$

$$e_v = \frac{r_0}{k_v}$$

Sistema di tipo $h = 0$: $k_v = 0 \Rightarrow e_v = \infty$

Sistema di tipo $h = 1$: k_v finito

Sistema di tipo $h = 2, 3, \dots$: $k_v = \infty \Rightarrow e_v = 0$

Errore a regime per ingressi canonici – 3

Errore di **accelerazione** per ingresso a parabola campionata (ordine 2)

$$r(kT) = r_0 \frac{(kT)^2}{2} \quad \rightarrow \quad R(z) = r_0 \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})r_0}{2(1-z^{-1})^3}$$

$$e_a (= e_2) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1}) \frac{1}{1+G(z)} \frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})r_0}{2(1-z^{-1})^3} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T^2 r_0}{(1-z^{-1})^2 G(z)} \right]$$

Definendo la **costante di accelerazione** $k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G(z)}{T^2}$

$$e_a = \frac{r_0}{k_a}$$

Sistema di tipo $h = 0, 1$: $k_a = 0 \Rightarrow e_a = \infty$

Sistema di tipo $h = 2$: k_a finito

Sistema di tipo $h = 3, 4, \dots$: $k_a = \infty \Rightarrow e_a = 0$

Esempi di calcolo dell'errore a regime – 1

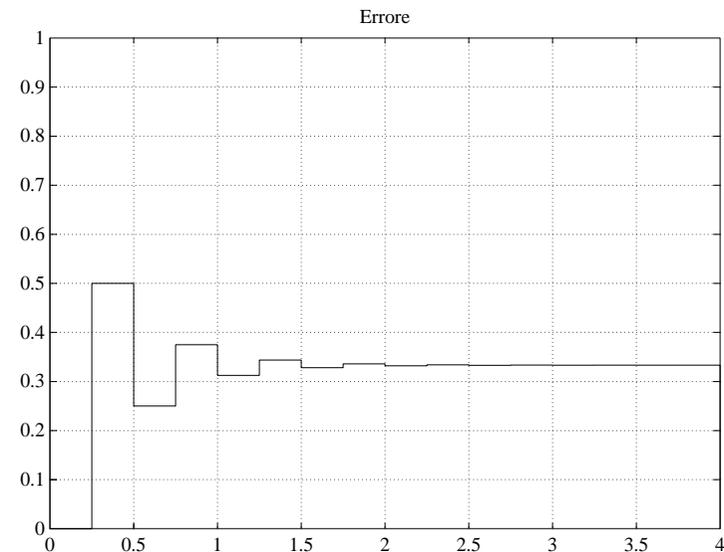
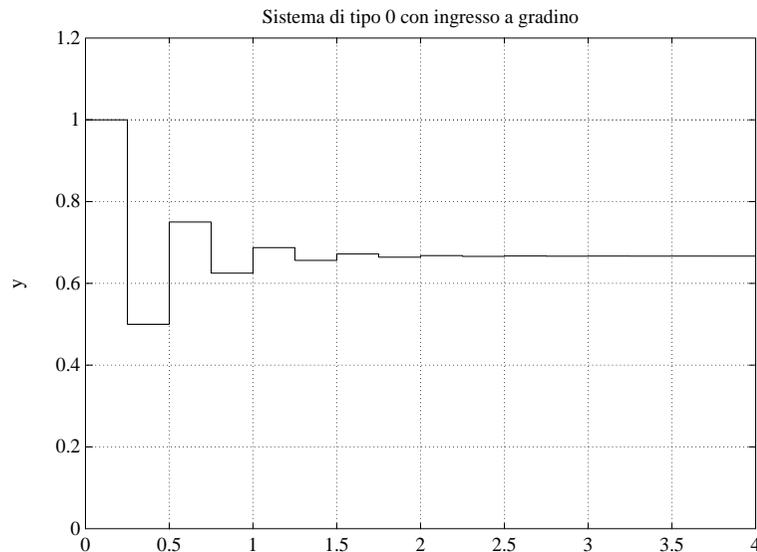
$$\text{(tipo 0)} \quad G(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \quad \text{con } T = 0.25 \text{ s}$$

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = 2 \qquad e_p = \frac{1}{1 + 2} = 0.333$$

$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})G(z)}{T} = 0 \qquad e_v = \frac{1}{0} = \infty$$

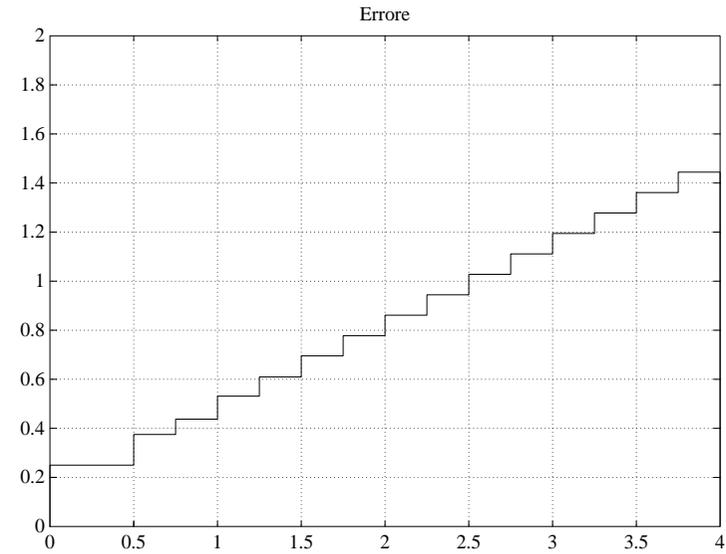
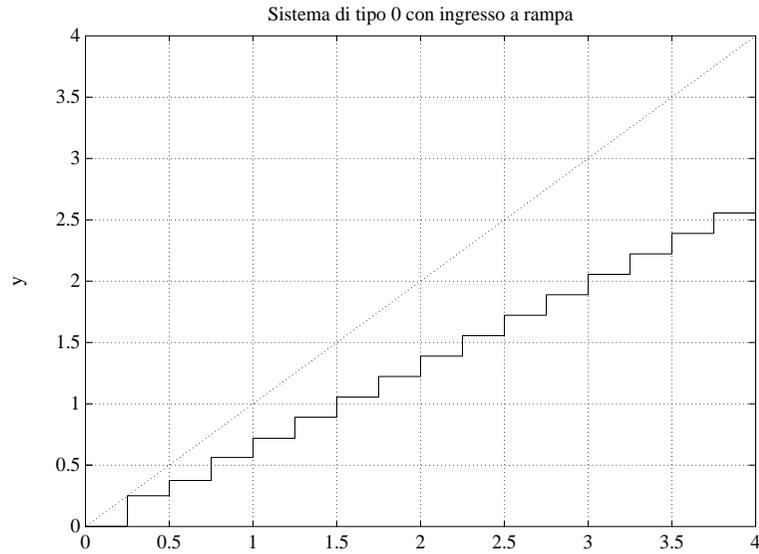
$$k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})^2 G(z)}{T^2} = 0 \qquad e_a = \frac{1}{0} = \infty$$

errore di posizione

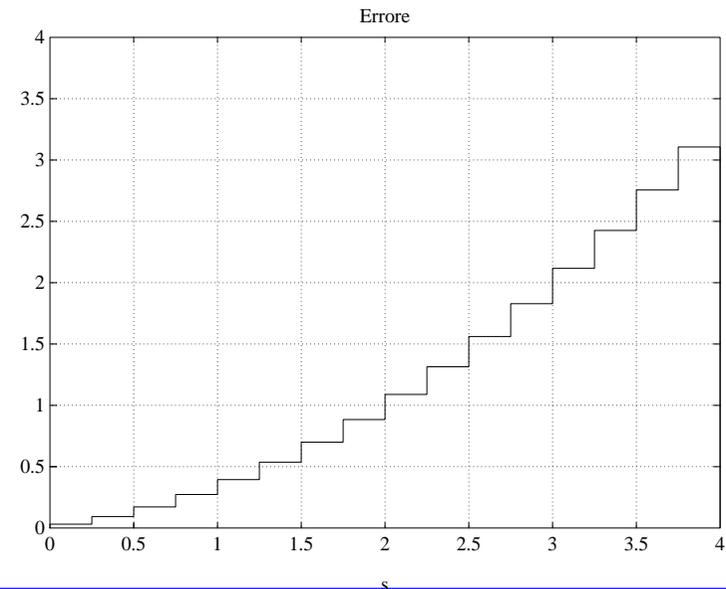
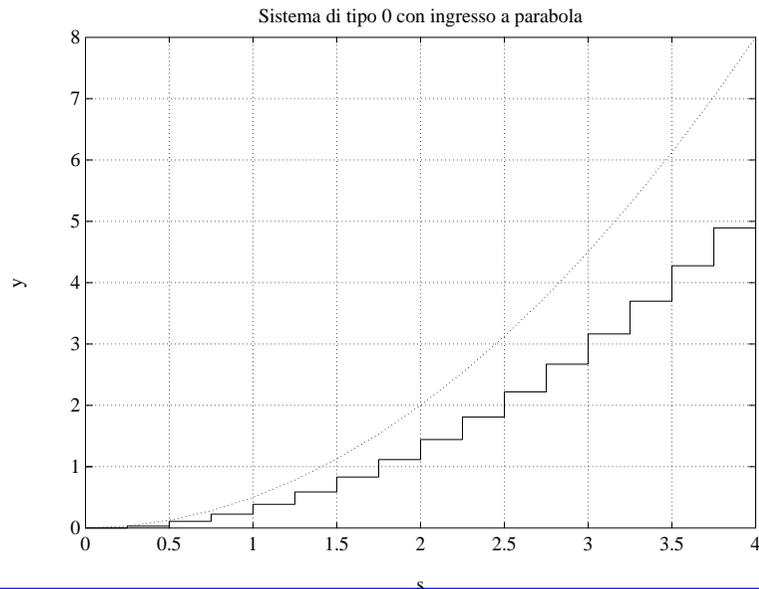


Esempi di calcolo dell'errore a regime – 1 (cont)

errore di velocità



errore di accelerazione



Esempi di calcolo dell'errore a regime – 2

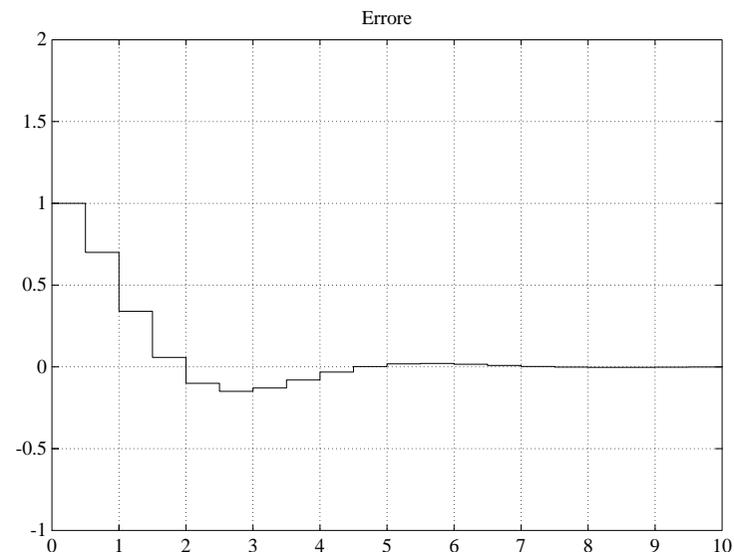
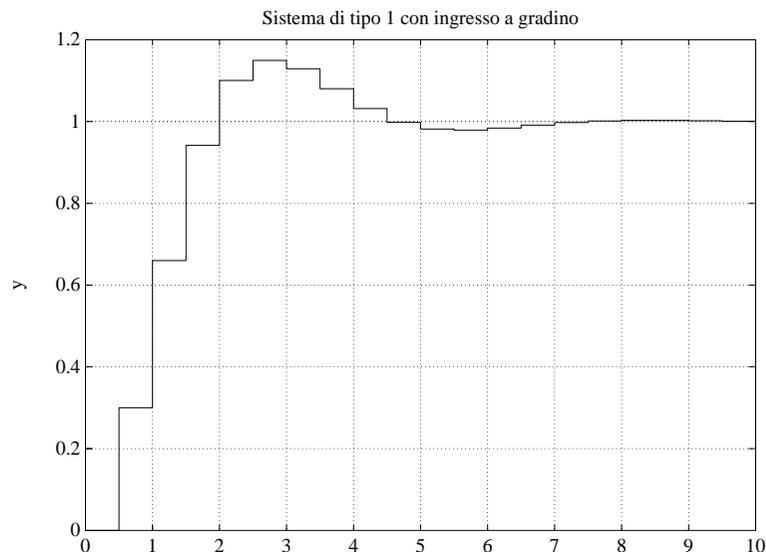
$$\text{(tipo 1)} \quad G(z) = \frac{0.3z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}} = \frac{0.3z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})} \quad \text{con } T = 0.5 \text{ s}$$

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \infty \quad e_p = 0$$

$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})G(z)}{T} = 0.75 \quad e_v = 1.333$$

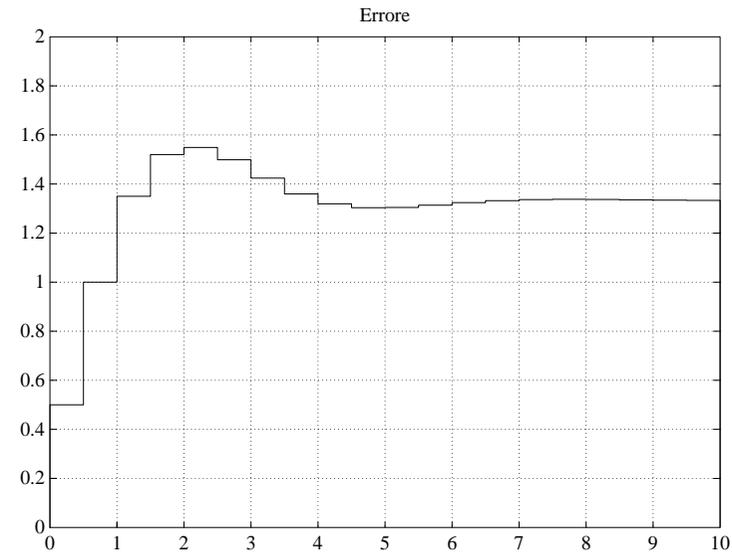
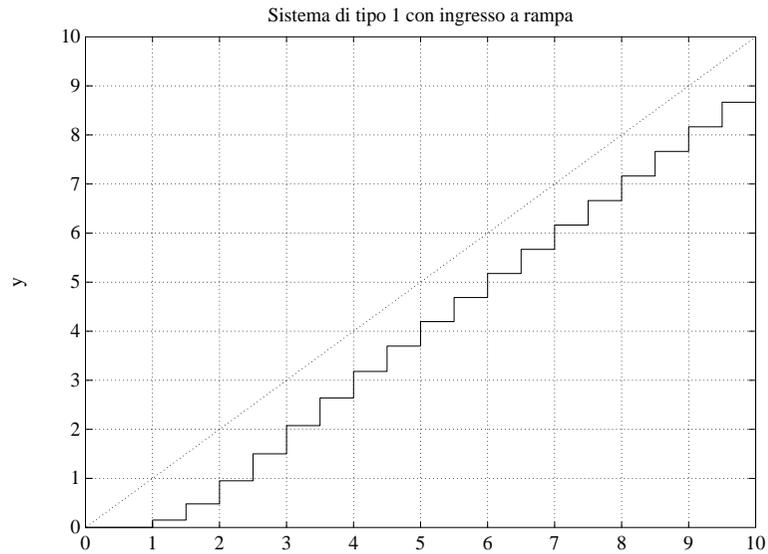
$$k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})^2 G(z)}{T^2} = 0 \quad e_a = \infty$$

errore di posizione

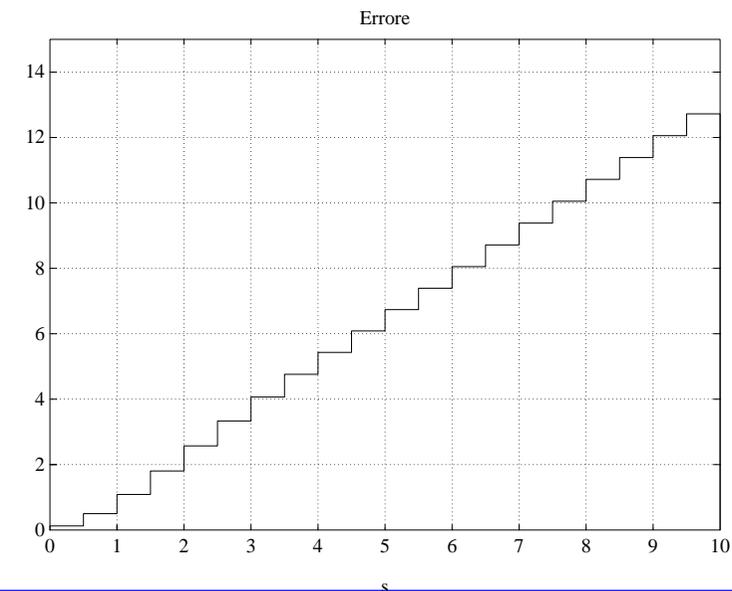
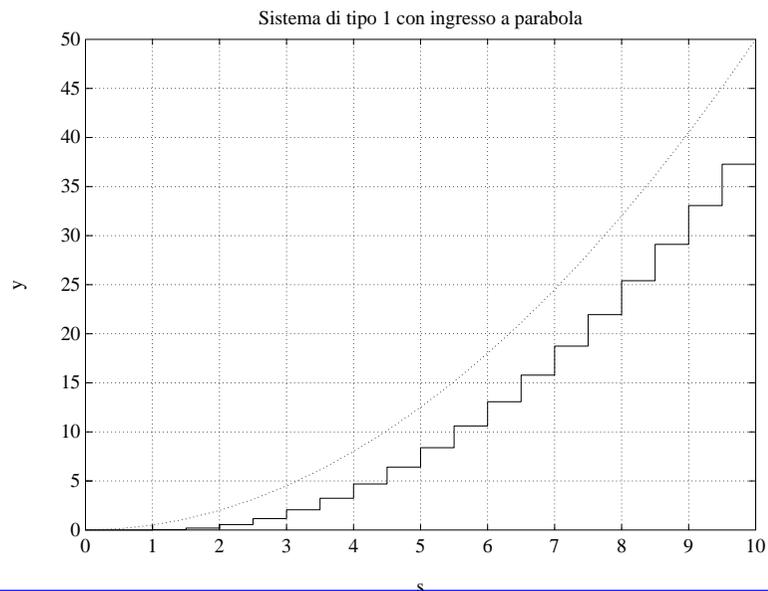


Esempi di calcolo dell'errore a regime – 2 (cont)

errore di velocità



errore di accelerazione



Esempi di calcolo dell'errore a regime – 3

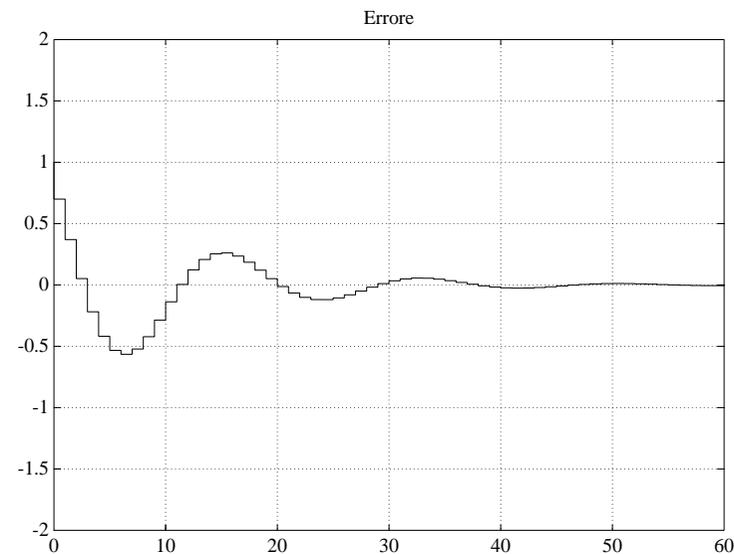
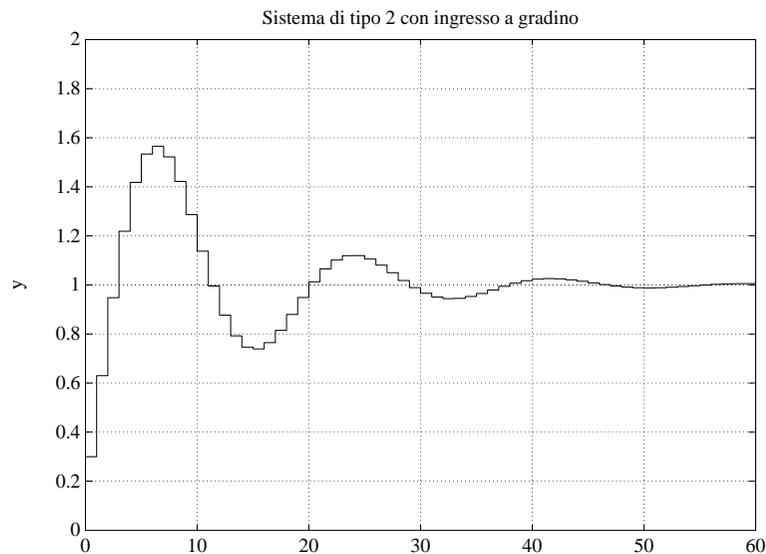
$$\text{(tipo 2)} \quad G(z) = \frac{0.3(1 - 1.2z^{-1} + 0.37z^{-2})}{(1 - z^{-1})^2(1 - 0.6z^{-1})} \quad \text{con } T = 1 \text{ s}$$

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \infty \quad e_p = 0$$

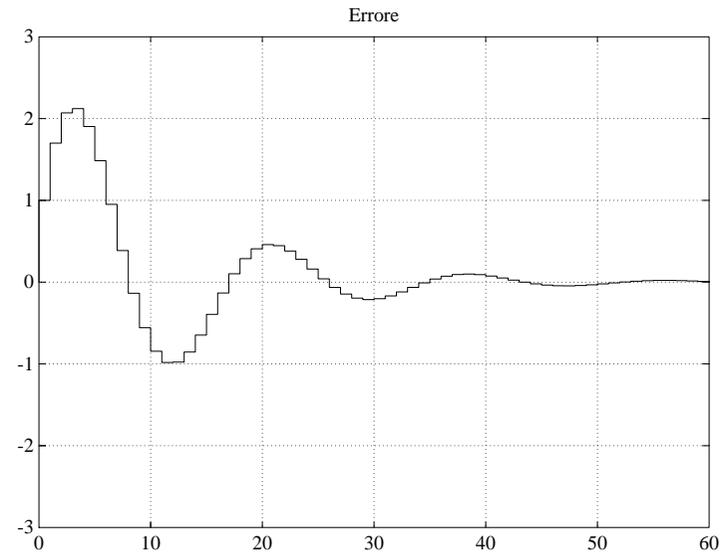
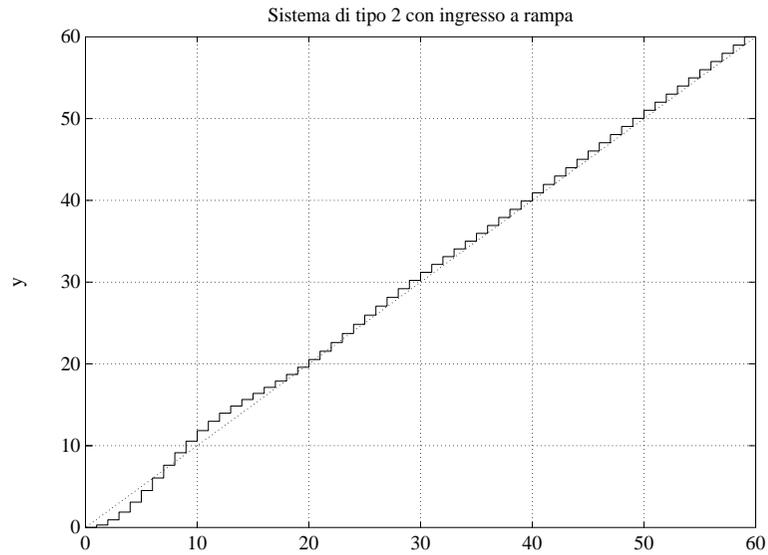
$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})G(z)}{T} = \infty \quad e_v = 0$$

$$k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})^2 G(z)}{T^2} = 0.1275 \quad e_a = 7.843$$

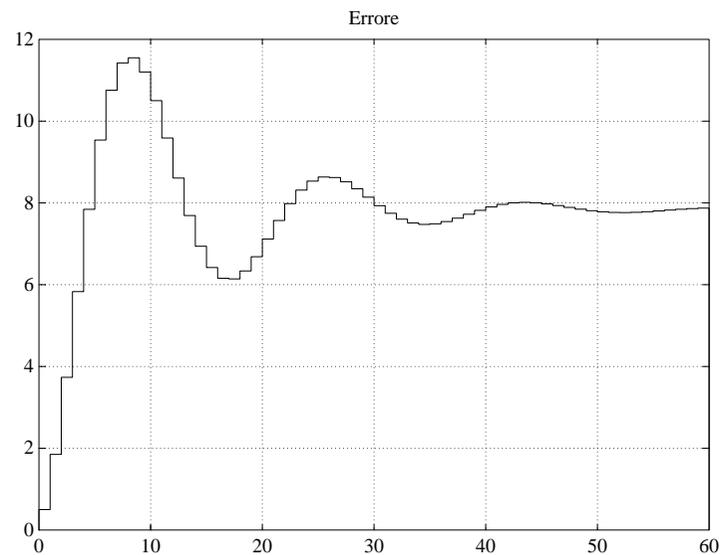
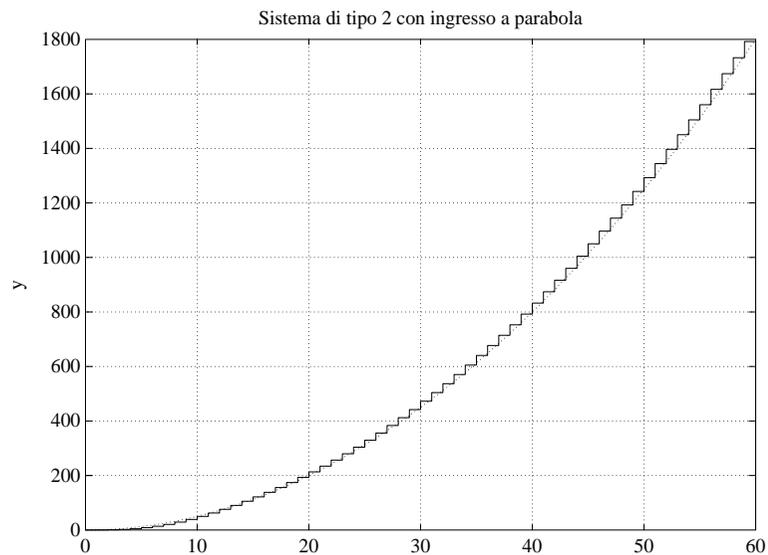
errore di posizione



errore di velocità



errore di accelerazione



Errori a regime (sommario per retroazione unitaria)

Errori a regime in funzione del tipo h di sistema per ingressi con $r_0 = 1$

Tipo di sistema	Errore a regime in risposta a		
	gradino	rampa	parabola
tipo 0	$\frac{1}{1 + k_p}$	∞	∞
tipo 1	0	$\frac{1}{k_v}$	∞
tipo 2	0	0	$\frac{1}{k_a}$

Si noti che le costanti k_G della $G(z)$ potrebbero essere **negative**, nel qual caso occorre utilizzare il modulo $|k_G|$ (soprattutto per $h = 0$!)

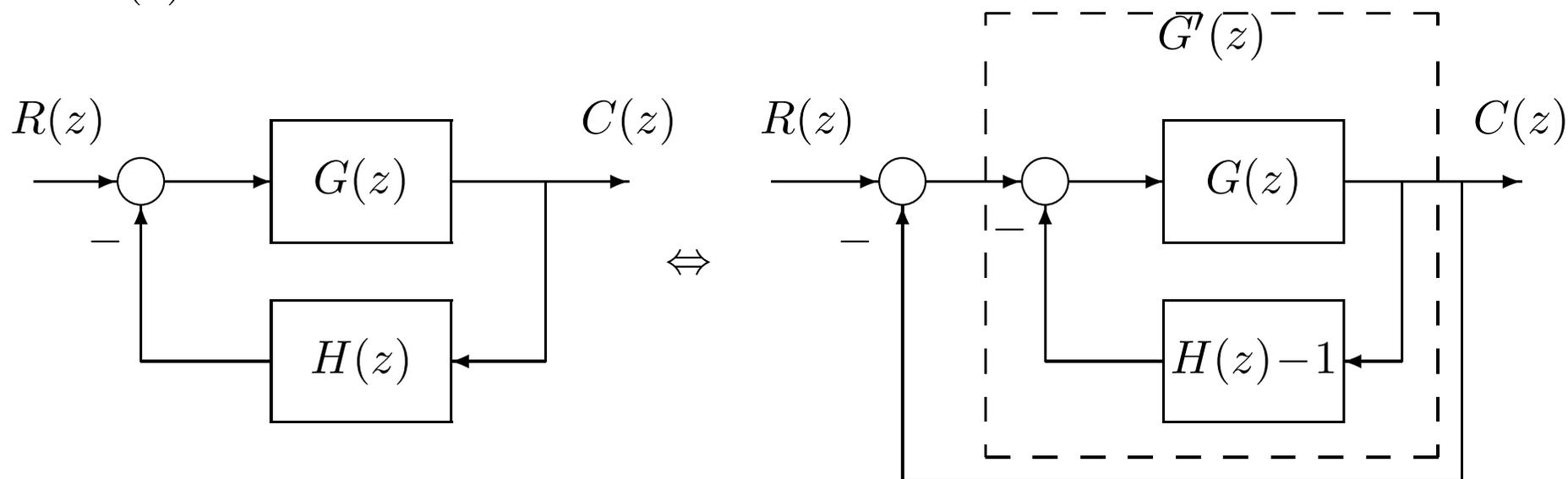
Errori a regime per retroazione non unitaria $H(z)$

Si è ancora interessati alla differenza $E(z) = R(z) - C(z)$, ma in generale allora il riferimento in ingresso all'anello è $R(z) = H(z)C_{des}(z)$

Si applicano le stesse formule con

$$G'(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)[H(z) - 1]}$$

anzichè $G(z)$. Infatti



retroazione non unitaria

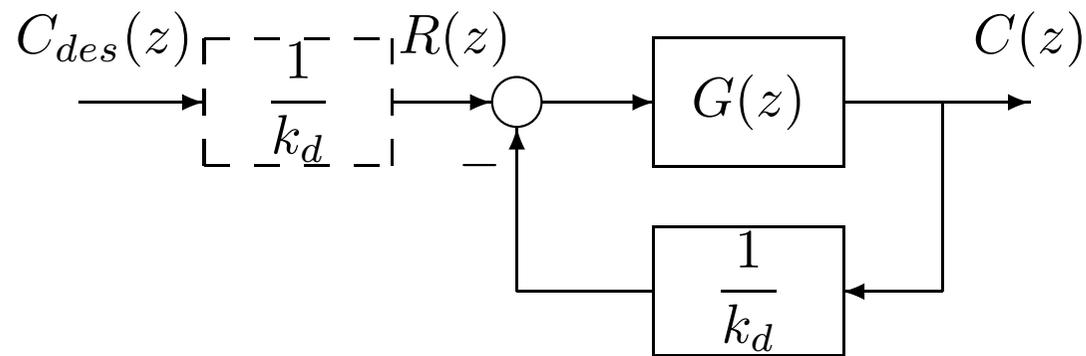
\Leftrightarrow

schema equivalente a retroazione unitaria

Errori a regime per retroazione non unitaria $H(z) = 1/k_d$

Il caso notevole $H(z) = 1/k_d$ rappresenta la presenza di un coefficiente di trasduzione del sensore di misura dell'uscita

$$E(z) = C_{des}(z) - C(z) = k_d R(z) - C(z)$$



$$\frac{C(z)}{R(z)} = W(z) = \frac{G(z)}{1 + \frac{G(z)}{k_d}} = \frac{k_d G(z)}{k_d + G(z)}$$

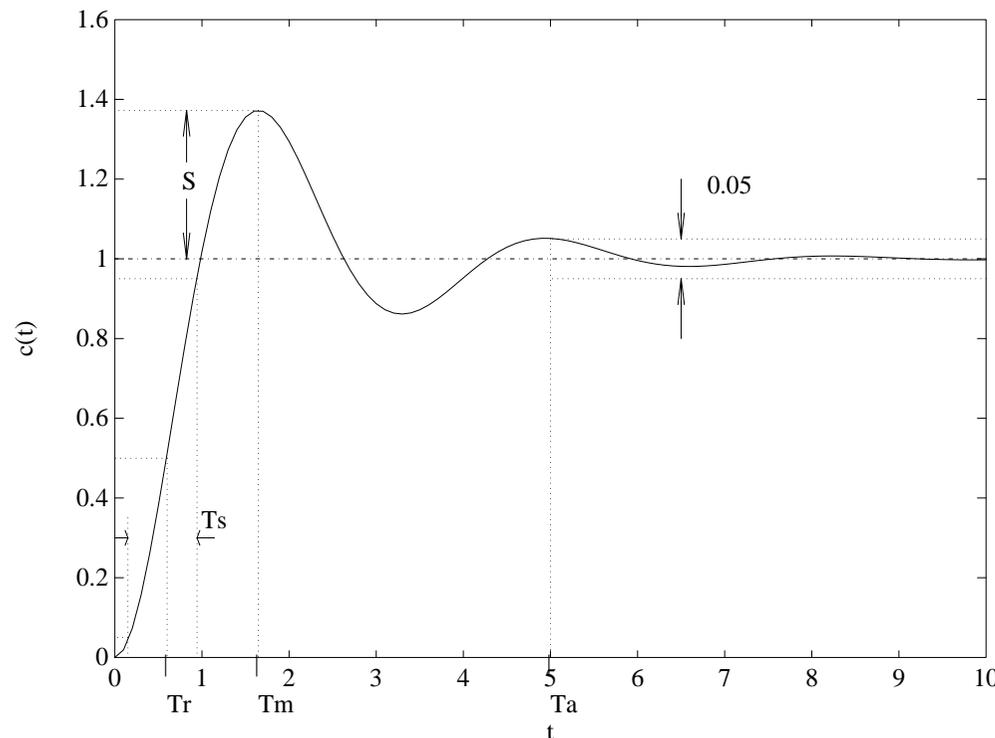
$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{k_d R(z) - C(z)}{R(z)} = W_e(z) = k_d - W(z) = \frac{k_d^2}{k_d + G(z)}$$

$$e_0 = \frac{k_d^2}{k_d + k_G} \quad (h = 0) \quad e_h = \frac{k_d^2}{k_G} \quad (h \geq 1)$$

Specifiche sul transitorio nel dominio del tempo – 1

Tali specifiche per sistemi discreti sono del tutto analoghe a quelle del caso tempo continuo, dove si definiscono le seguenti caratteristiche della risposta a gradino

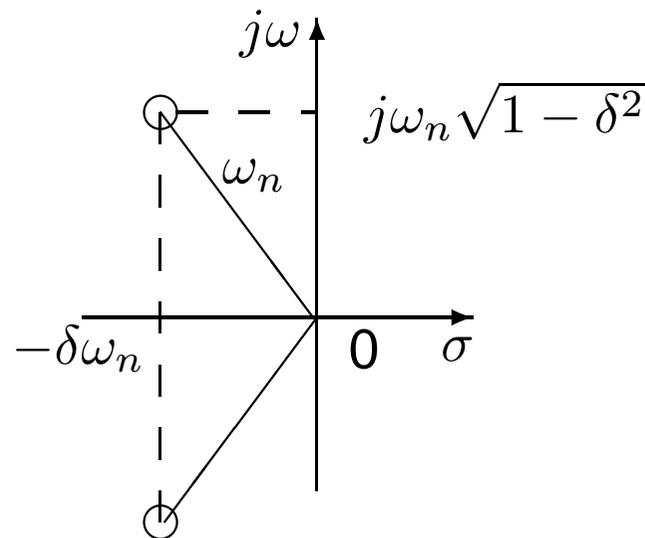
- tempo di salita T_s per passare dal 10% (o 5%) al 90% (o 95%) del valore finale $c(\infty)$
- tempo di assestamento T_a oltre il quale $c(t)$ differisce per $< 5\%$ (o $< 2\%$) da $c(\infty)$
- tempo di ritardo T_r quando l'uscita $c(t)$ raggiunge il 50% del valore $c(\infty)$
- massima sovraelongazione S rispetto al valore di regime $c(\infty)$ (di solito in %)
- istante di massima sovraelongazione T_m dove $c(T_m) = c(\infty) + S$



Specifiche sul transitorio nel dominio del tempo – 2

Per un sistema del secondo ordine (o con coppia di poli dominanti), è possibile ricavare formule chiuse

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$



- tempo di salita da 0 al 100% del valore finale

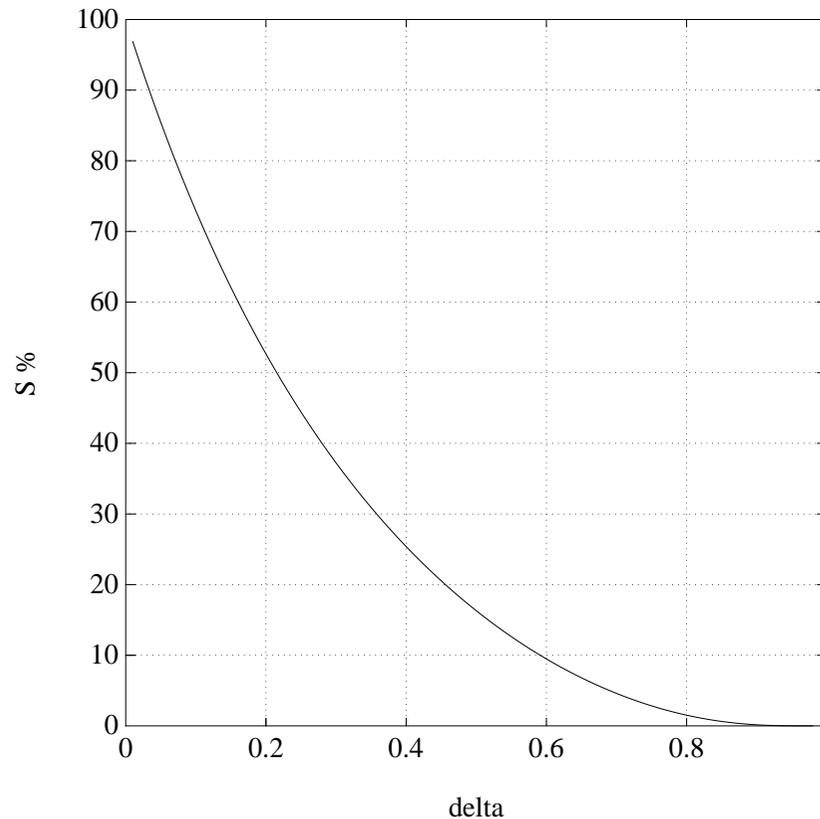
$$T_{s_{100\%}} = \frac{\pi - \arccos \delta}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$$

- tempo di assestamento

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} \quad (\text{al } 5\%) \quad T_a = \frac{4}{\delta\omega_n} \quad (\text{al } 2\%)$$

Specifiche sul transitorio nel dominio del tempo – 3

- massima sovraelongazione percentuale $S = 100[c(T_m) - 1] = 100 e^{-\frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$



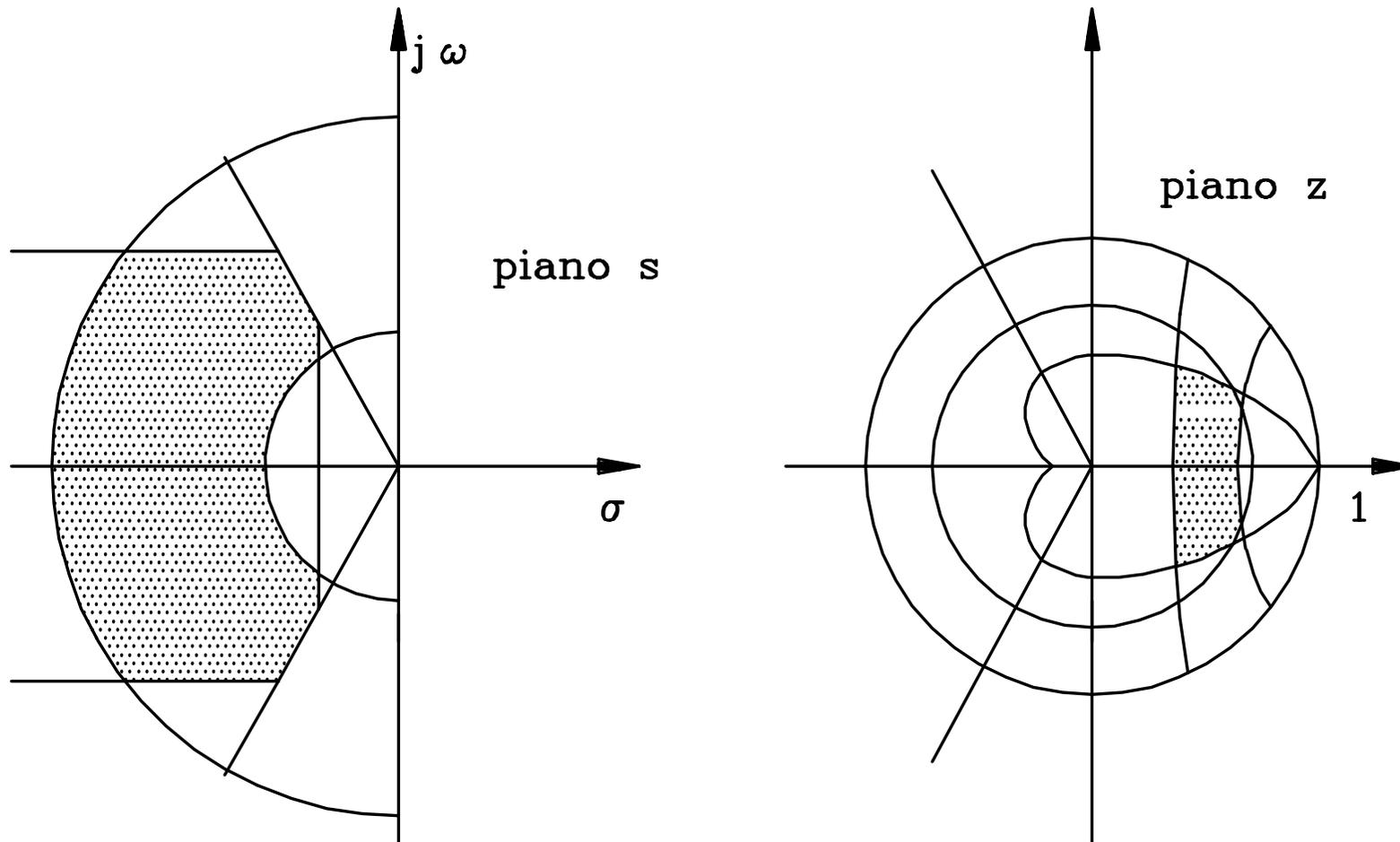
tipico $\delta = 0.5 \div 0.8$

- istante di massima sovraelongazione

$$T_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$$

Specifiche sul transitorio nel dominio della Z-trasformata

Impongono l'appartenenza dei poli ad anello chiuso a zone del piano z



$$z = e^{sT}$$

Specifiche sul transitorio nel dominio della frequenza – 1

Anche queste sono analoghe al caso a tempo continuo (Bode o Nyquist, con le dovute cautele, e Nichols)

Si possono mettere in relazione con i parametri di un sistema del secondo ordine

- **margine di fase m_f**

detta ϕ (< 0 , in generale) la fase di $G(e^{j\omega T})$ in corrispondenza alla pulsazione ω_t (di taglio) dove $|G(e^{j\omega_t T})| = 1$, il margine di fase è

$$m_f = \pi - |\phi|$$

con valori tipici di specifica $m_f = 45^\circ \div 60^\circ$

- **margine di guadagno m_g**

è l'inverso del guadagno di anello alla pulsazione ω_g dove $\arg\{G(e^{j\omega_g T})\} = \pi$

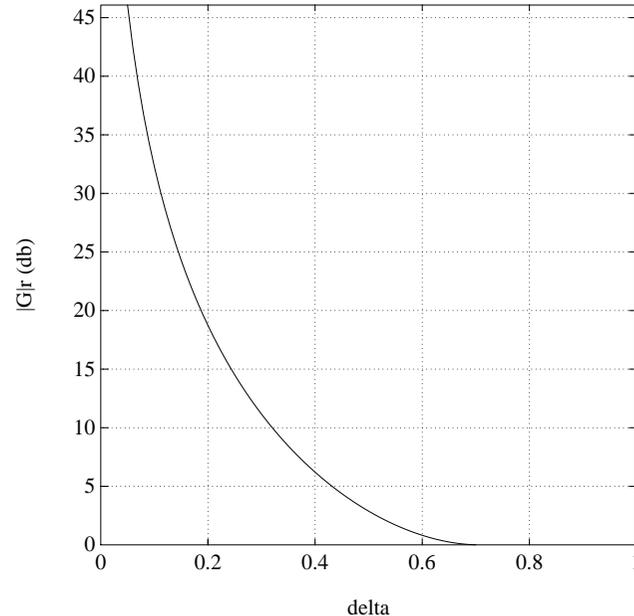
$$m_g = \frac{1}{|G(e^{j\omega_g T})|}$$

con valori tipici di specifica $m_g = 4 \div 6$ (12 ÷ 16 db)

Specifiche sul transitorio nel dominio della frequenza – 2

- **modulo alla risonanza** M_r è il massimo valore che assume il modulo di $|G(e^{j\omega T})|$, con valori tipici di specifica $M_r = 2 \div 3$ db

$$\Rightarrow M_r = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$



- **pulsazione di risonanza** ω_r è la pulsazione alla quale si verifica il modulo alla risonanza $\Rightarrow \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$
- **banda passante** B_{-3} è la pulsazione alla quale il modulo della risposta armonica si riduce di 3 db rispetto al valore in continua (a $\omega = 0$)
- si ricorre spesso all'utilizzo del piano ausiliario w , che gode della proprietà (come nel dominio s) di poter trattare con funzioni razionali fratte di w

Specifiche sul transitorio uniche dei sistemi discreti

- tempo di risposta finito, possibilmente minimo lT

$$e_k = e(kT) = e_0, \quad k = l, l + 1, \dots$$

esempio elementare

$$c_{k+1} = c_k + u_k \quad \Rightarrow \quad u_k = c_{des} - c_k$$

porta a $e_k = c_k - c_{des} = 0$ in ogni $k = 1, 2, \dots$, quali che siano c_0 e c_{des} (risposta in tempo finito e minimo, con $l = 1$)

- per processi continui campionati, con riferimento a un ingresso a gradino, **risposta piatta** possibilmente in tempo minimo
si annulla **definitivamente** l'errore, a partire da un istante di campionamento finito, anche al di fuori degli istanti kT
- **risposta deadbeat**, una generalizzazione del caso precedente per altri ingressi tipici (rampa, parabola, ...)
- caratteristica legata al posizionamento dei poli ad anello chiuso nell'**origine**

Sensibilità parametrica – 1

Sensibilità del sistema in retroazione

$$G_0(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

a variazioni di un parametro a rispetto al valore nominale

$$\Sigma_a^{G_0} \approx \frac{\Delta G_0 / G_0}{\Delta a / a} = \frac{\Delta G_0}{\Delta a} \frac{a}{G_0}$$

Facendo il limite per $\Delta a \rightarrow 0$

$$\Sigma_a^{G_0} = \frac{\partial G_0}{\partial a} \frac{a}{G_0}$$

Sensibilità di G_0 rispetto a G

$$\Sigma_G^{G_0} = \frac{\partial G_0}{\partial G} \frac{G}{G_0} = \frac{1}{1 + G(z)}$$

valutata a una data pulsazione ω_0

$$\Sigma_G^{G_0} |_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{1 + G(e^{j\omega_0 T})}$$

Sensibilità parametrica – 2

Volendo che la sensibilità sia piccola a date frequenze, è quindi necessario che per tali frequenze $G(e^{j\omega T})$ sia grande

Un modo per ottenere questo risultato è aumentare il guadagno d'anello, il che però comporta in genere riduzioni dei margini di stabilità

Se la $G(z)$ in catena diretta dipende da un parametro a

$$\Sigma_a^{G_0} = \frac{\partial G_0}{\partial a} \frac{a}{G_0} = \frac{\partial G_0}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial a} \frac{a}{G_0}$$

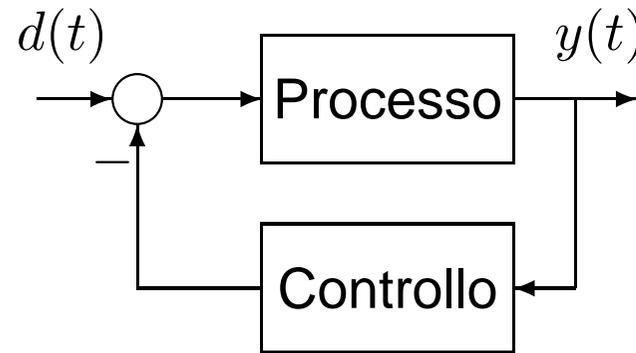
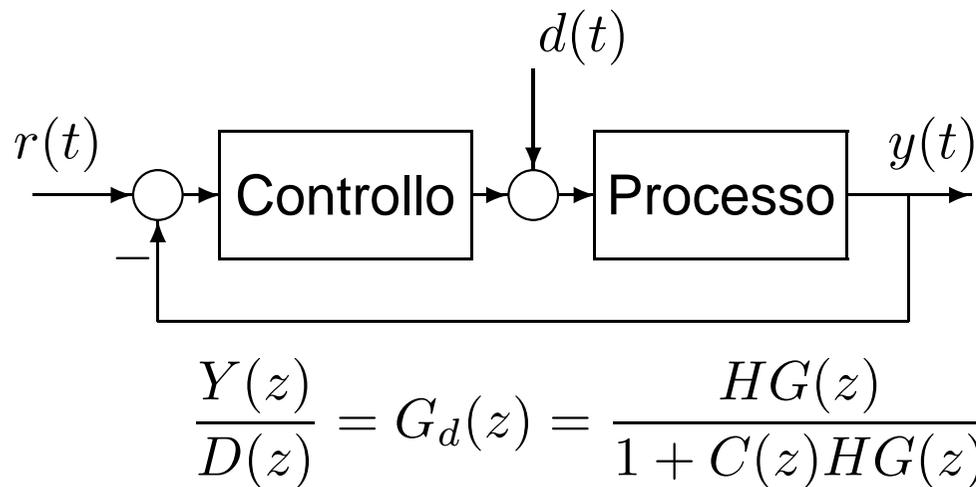
da cui

$$\Sigma_a^{G_0} = \frac{1}{G(z)(1 + G(z))} \frac{\partial G(z)}{\partial a} a$$

Anche in questo caso, per ridurre la sensibilità bisogna aumentare il guadagno d'anello

Se il parametro è contenuto in un blocco $H(z)$ in retroazione, allora aumentare il guadagno in catena diretta peggiora le cose ...

Reiezione dei disturbi



essendo qui $C(z)$ la funzione di trasferimento del controllo e $HG(z)$ quella del processo

Se vale

$$|C(z)HG(z)| \gg 1 \quad \Rightarrow \quad Y(z) \approx \frac{D(z)}{C(z)}$$

l'entità del disturbo è ridotta di un fattore $C(z)$

Se $D(z)$ è costante, allora un integratore in $C(z)$ farà sì che l'errore causato dal disturbo sia nullo a regime (**astatismo**)

Un disturbo a una pulsazione ω_d verrà attenuato se si ha

$$|C(e^{j\omega_d T})HG(e^{j\omega_d T})| \gg 1 \quad \text{oppure} \quad |HG(e^{j\omega_d T})| \ll 1 \quad \text{e} \quad |C(e^{j\omega_d T})HG(e^{j\omega_d T})| \leq 1$$

- nel progetto del controllore si deve considerare che la variabile di controllo u è **fisicamente limitata** e quindi non possono esserne richiesti valori eccessivi (fenomeni di saturazione introducono non-linearità nel sistema)
- d'altra parte, a progetto completato, si possono fare **verifiche in simulazione** sugli sforzi di controllo richiesti in condizioni operative tipiche e dimensionare di conseguenza l'organo di attuazione
- oltre ai valori di picco della variabile u interessano anche **aspetti energetici** (consumo, surriscaldamento dei componenti), tipicamente legati all'integrale $\int u^2(t)dt$ o, nel caso discreto, alla sommatoria $\sum_k u_k^2$, che possono ancora essere valutati in simulazione
- di queste considerazioni si può tenere conto anche in fase di progetto, impostando e risolvendo problemi di sintesi di **controllo ottimo** (tipicamente lineare-quadratico) in cui l'obiettivo è quello di assicurare buone prestazioni (transitori di errore rapidi) e contemporaneamente ridotto sforzo di controllo

Esempio di controllo ottimo a tempo discreto

Si riconsideri il semplice sistema a tempo discreto

$$c_{k+1} = c_k + u_k$$

e si desideri regolare l'uscita a zero con un controllo proporzionale

$$u_k = -k_p c_k$$

a partire da un valore iniziale arbitrario $c_0 = c(0)$. La soluzione a tempo di risposta finito e minimo è data dal guadagno $k_p = 1$ che fornisce

$$c_1 = 0, \quad c_k = 0, \quad k = 2, 3, \dots \quad u_0 = -c_0, \quad u_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

ossia l'errore si azzerava dopo un solo campione. D'altronde è facile verificare che si avrà stabilità asintotica per qualsiasi scelta $k_p \in (0, 2)$ in quanto

$$c_{k+1} = c_k - k_p c_k = (1 - k_p) c_k \Rightarrow C(z) = \frac{1}{z - (1 - k_p)} \Rightarrow \text{polo in } |p| < 1 \Leftrightarrow |1 - k_p| < 1$$

dove quella a tempo minimo impone il polo in $z = 0$ al sistema ad anello chiuso

Valutiamo se questa soluzione è ottima per qualche opportuna funzione obiettivo (diversa dal tempo minimo) o se ce ne sono di migliori da un punto di vista energetico

Esempio di controllo ottimo a tempo discreto (cont)

Per qualsiasi valore di k_p , dalle $c_{k+1} = (1 - k_p)c_k$ e $u_k = -k_p c_k$ si ha

$$\begin{array}{ll} c_0 = c(0) & u_0 = -k_p c_0 \\ c_1 = (1 - k_p)c_0 & u_1 = -k_p(1 - k_p)c_0 \\ c_2 = (1 - k_p)^2 c_0 & u_2 = -k_p(1 - k_p)^2 c_0 \\ \vdots & \vdots \\ c_k = (1 - k_p)^k c_0 & u_k = -k_p(1 - k_p)^k c_0 \end{array}$$

Si consideri la seguente funzione di costo quadratica

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 + r u_k^2 \quad r \geq 0$$

che somma i campioni (quadratici) dell'errore ($e_k = c_k$) e del controllo u_k , e dove il peso r definisce la loro importanza relativa (identica se $r = 1$). Sostituendo i valori si ha

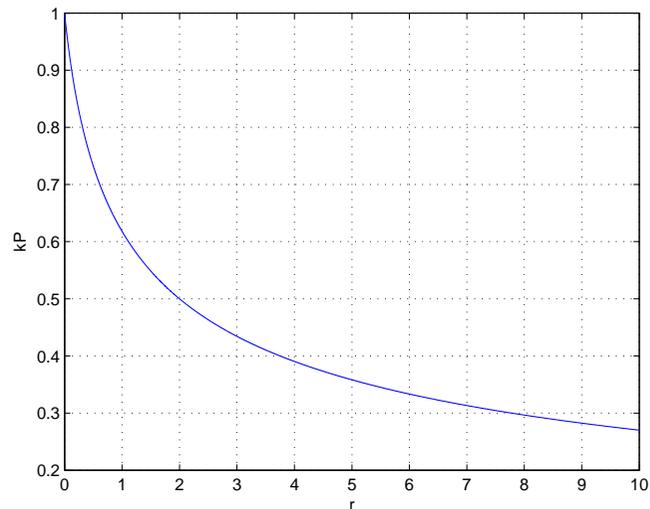
$$\begin{aligned} H &= \sum_{k=0}^{\infty} ((1 - k_p)^k c_0)^2 + r (-k_p(1 - k_p)^k c_0)^2 = c_0^2(1 + rk_p^2) \sum_{k=0}^{\infty} ((1 - k_p)^2)^k \\ &= \text{(per } |1 - k_p| < 1\text{)} = c_0^2(1 + rk_p^2) \frac{1}{1 - (1 - k_p)^2} = \frac{c_0^2(1 + rk_p^2)}{k_p(2 - k_p)} \end{aligned}$$

Esempio di controllo ottimo a tempo discreto (cont)

Per minimizzare H rispetto a $k_p \in (0, 2)$, **si impone** la condizione necessaria (e anche sufficiente perchè $\partial^2 H / \partial k_p^2 > 0$)

$$\frac{\partial H}{\partial k_p} = -\frac{2c_0^2}{k_p^2(2-k_p)^2} (rk_p^2 + k_p - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad rk_p^2 + k_p - 1 = 0$$

Delle due radici (reali) per k_p , quella positiva vale $k_p = \frac{-1 + \sqrt{1+4r}}{2r}$ e appartiene, $\forall r \geq 0$, all'intervallo $(0, 1)$ (ammissibile per la stabilità)



Ad esempio, per $r = 2$ si ha $k_p^{opt} = 0.5$. La soluzione a tempo minimo di risposta ($k_p = 1$) si trova nel caso limite per $r \rightarrow 0$ (i campioni del controllo non sono pesati)

Esempio di controllo ottimo a tempo discreto (cont)

A verifica, paragonando il valore della funzione di costo H per $r = 2$ con i due valori $k_p^{opt} = 0.5$ e $k_p = 1$, si ha

$$H^{opt} = H_{\{k_p=0.5\}} = 2c_0^2 < H_{\{k_p=1\}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 + 2u_k^2 = c_0^2 + 2(-1 \cdot c_0)^2 = 3c_0^2$$

Sono ovviamente possibili altre scelte per la funzione di costo, ad esempio sommando i soli moduli dei campioni di controllo. Assumendo ancora $|1 - k_p| < 1$, si ha

$$H_2 = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |k_p(1 - k_p)^k c_0| = k_p |c_0| \sum_{k=0}^{\infty} (|1 - k_p|)^k = \frac{k_p |c_0|}{1 - |1 - k_p|}$$

Questa funzione non è differenziabile rispetto a k_p e va quindi analizzata direttamente nei due casi possibili per $k_p \in (0, 2)$

$$1 - k_p \geq 0 \rightarrow H_2 = |c_0|$$

$$1 - k_p < 0 \rightarrow H_2 = |c_0| \frac{k_p}{2 - k_p} > |c_0|$$

per cui il valore ottimo non si ha per un unico k_p , ma per qualsiasi $k_p \in (0, 1]$