

# **SISTEMI DIGITALI DI CONTROLLO**

**Prof. Alessandro De Luca**

**DIS, Università di Roma “La Sapienza”**

**deluca@dis.uniroma1.it**

Lucidi tratti dal libro

**C. Bonivento, C. Melchiorri, R. Zanasi: “Sistemi di Controllo Digitale”**

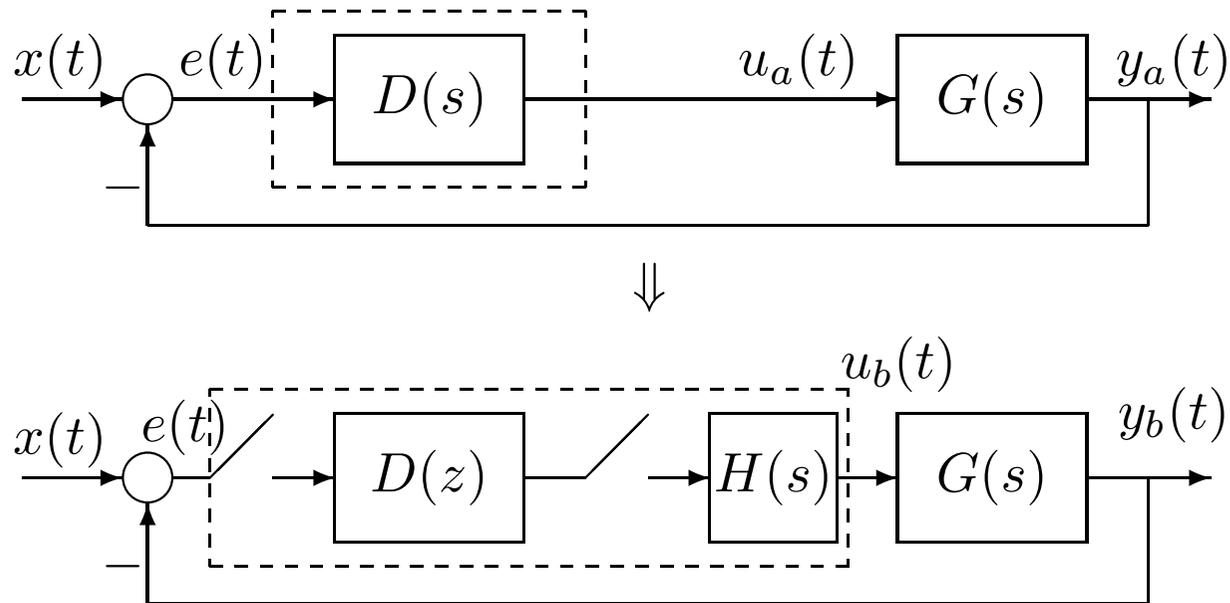
**Capitolo 7: Progetto per discretizzazione**

Si ringraziano gli autori

# Metodologie di progetto del controllore

1. **metodo indiretto** o per discretizzazione di un progetto analogico
2. **metodi diretti** nel dominio discreto
  - progetto nel piano  $w$  (Bode)
  - progetto con il luogo delle radici
  - progetto con metodi analitici
3. **regolatori** digitali a struttura fissa (tipo PID)

metodo indiretto ( $T$  il più piccolo possibile!?)

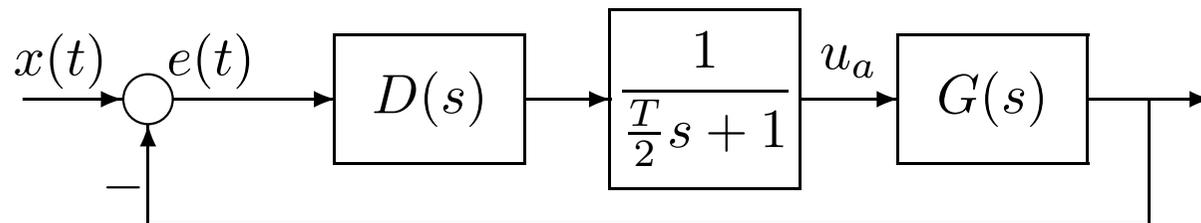


Tre passi concettuali

1. **definizione di  $T$**  e **verifica della stabilità** del sistema continuo dopo l'aggiunta del ricostruttore (e del fattore  $1/T$  introdotto dal campionatore)

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx \frac{T}{\frac{T}{2}s + 1} \quad (\text{usa l'approssimazione di Padé } P_{[1,1]} \text{ di } e^{-sT})$$

$$H_0(s) \approx e^{-sT/2} \quad (\text{approssimazione con ritardo di } 1/2 \text{ passo})$$



2. **discretizzazione della  $D(s)$**   $\Rightarrow$  ha grande influenza sul risultato
  - mantenendo una o più caratteristiche del continuo: # poli e zeri, guadagno, risposta impulsiva, risposta al gradino, margini di stabilità, banda passante
  - difficile preservare l'intero comportamento frequenziale (anche per la distorsione da aliasing, ma non solo ...)
3. **verifica a posteriori** (simulazioni e/o esperimenti) del comportamento dinamico

## Intermezzo – Approssimazioni di Padè

Data una funzione  $F(s)$  la sua **approssimazione di Padè**  $P_{[p,q]}$  di ordine  $[p, q]$  è la funzione razionale

$$P_{[p,q]}(s) = \frac{h(s)}{k(s)} = \frac{\text{polinomio di grado } \leq p}{\text{polinomio di grado } \leq q}$$

tale che lo sviluppo in serie di Taylor di  $F(s)$  in  $s = 0$  coincide con quello di  $h(s)/k(s)$  fino all'ordine  $p + q$  (si può assumere unitario il coefficiente costante nel polinomio  $k(s)$ )

Ad esempio, per  $F(s) = e^{sT}$  si ha

$$P_{[0,0]} = 1 \quad P_{[1,0]} = 1 + sT \quad P_{[0,1]} = \frac{1}{1 - sT} \quad P_{[1,1]} = \frac{1 + s\frac{T}{2}}{1 - s\frac{T}{2}}$$

La definizione va rilassata per garantire sempre l'esistenza dell'approssimante di Padè. L'**approssimazione ridotta di Padè**  $P_{[p,q]}$  è quella che approssima “al meglio” lo sviluppo di Taylor di  $F(s)$  in  $s = 0$

(non esistono altri polinomi  $u(s)$  (di grado  $\leq p$ ) e  $v(s)$  (di grado  $\leq q$ ) tali che lo sviluppo in serie di Taylor di  $u(s)/v(s)$  in  $s = 0$  coincide con quello di  $F(s)$  fino ad un ordine  $\geq$  di quello fino al quale vi coincide lo sviluppo di  $P_{[p,q]}(s)$ )

## Tecniche di discretizzazione

1. differenze all'indietro (backward differences)
2. differenze in avanti (forward differences, non usata nella pratica dei controlli)
3. trasformazione bilineare o di Tustin
4. trasformazione bilineare con precompensazione
5. metodo della  $\mathcal{Z}$ -trasformata
6. metodo della  $\mathcal{Z}$ -trasformata con ricostruttore ZOH
7. corrispondenza poli/zeri

- 1.-3. sono equivalenti discreti dell'operazione di **integrazione/derivazione** analogica
4. variante di **3.** per aggiustare il comportamento frequenziale a una data pulsazione
5. [**6.**] mira a preservare nel discreto i **campioni** della **risposta impulsiva** [della **risposta indiciale** (= al gradino)] del caso continuo
7. mira a **bilanciare** l'effetto degli **zeri introdotti** dal campionamento

## Differenze all'indietro – 1

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

Operazione di derivazione o di integrazione (reciproche) di un segnale

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow Y(s) = sX(s) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \int_0^t x(t)dt \leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s}X(s)$$

Loro discretizzazione (approssimata) con **differenze all'indietro** o **integrazione di Eulero a sinistra** negli istanti campionati  $t = kT$

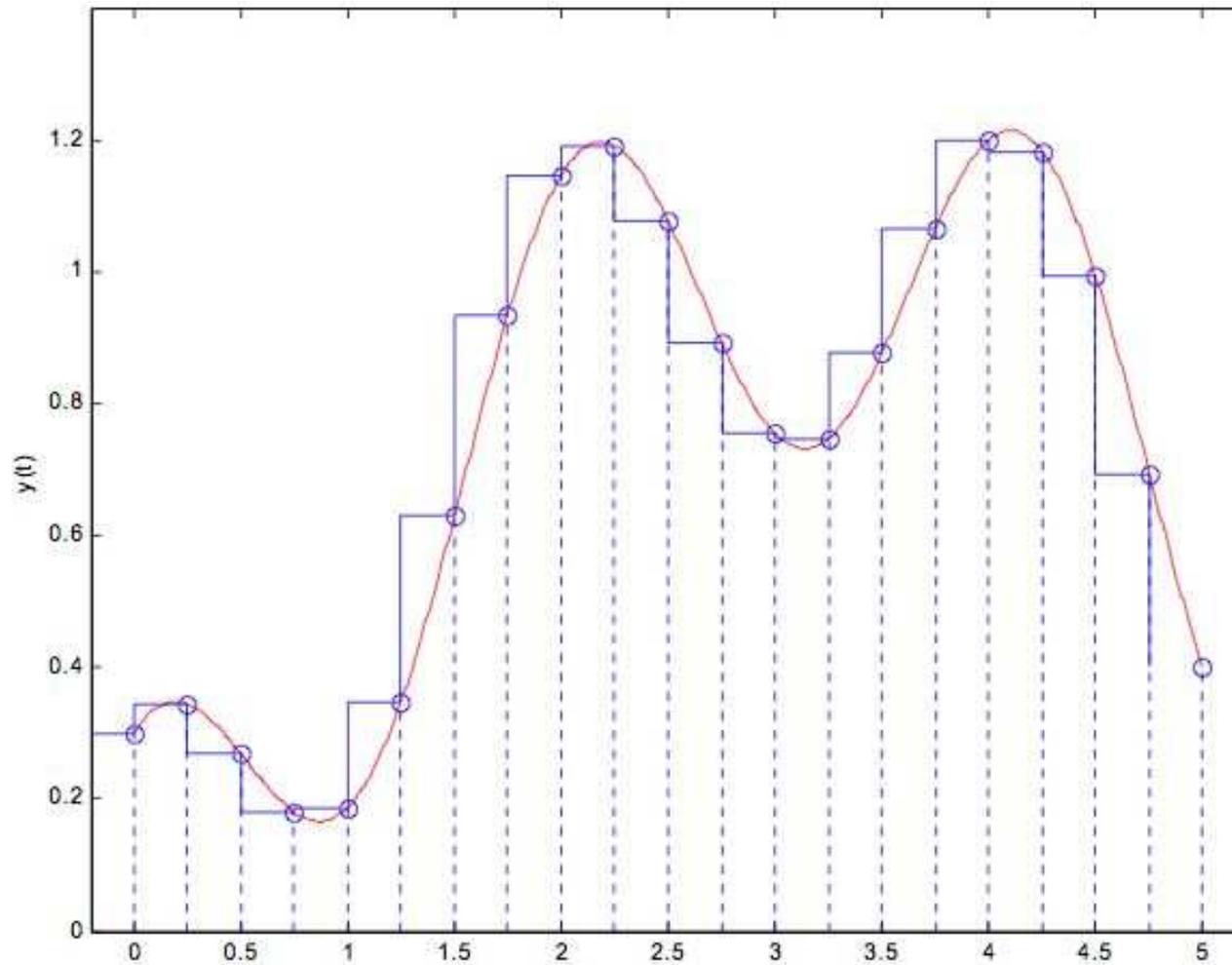
$$y(kT) = \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \Rightarrow Y(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T}X(z)$$

$$y(kT) = y((k-1)T) + T x(kT) \Rightarrow (1 - z^{-1})Y(z) = TX(z)$$

Paragonando nei domini trasformati, si ottiene in entrambi i casi

$$s = \frac{z - 1}{Tz} = \frac{1 - z^{-1}}{T} \Leftrightarrow z = \frac{1}{1 - Ts} \quad (\text{approssimazione di Padè } P_{[0,1]} \text{ di } z = e^{sT})$$

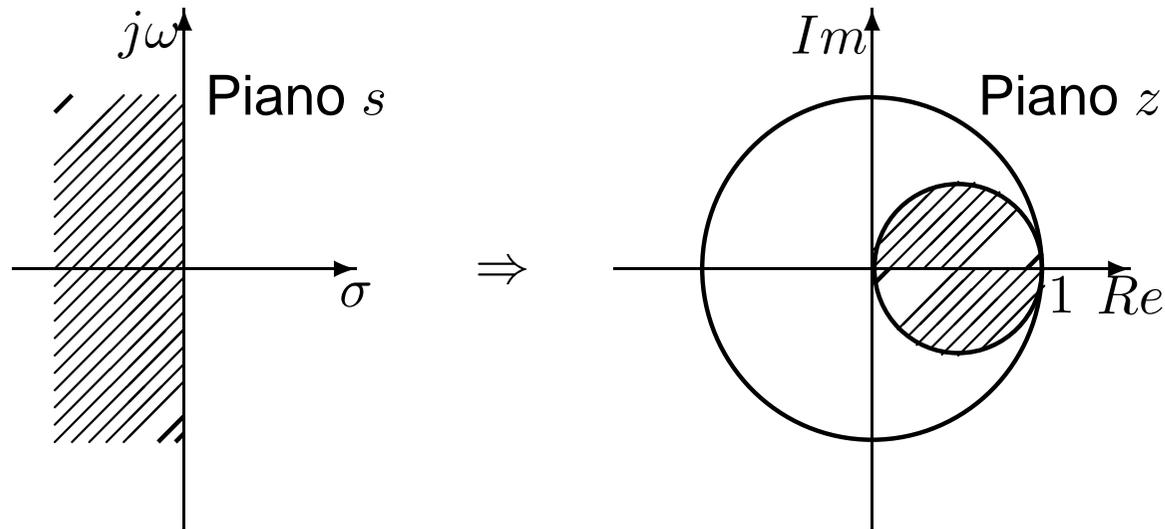
## Differenze all'indietro – 2



nell'operazione discreta di integrazione, il campione corrente in ingresso  $x(kT)$  viene preso come valore **costante** assunto da  $x(t)$  per  $t \in ((k-1)T, kT]$  (ossia, a sinistra)

## Differenze all'indietro – 3

Legame fra piano  $s$  e piano  $z$  implicato dall'approssimazione  $z = \frac{1}{1 - Ts} \leftrightarrow s = \frac{z - 1}{Tz}$



Si può mostrare facilmente che  $Re(s) < 0 \rightarrow |z| < 1$ . Inoltre, posto  $z = \sigma + j\omega$  (e  $T > 0$ )

$$Re(s) = Re\left(\frac{1}{T} \frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega}\right) = Re\left(\frac{1}{T} \frac{(\sigma + j\omega - 1)(\sigma - j\omega)}{\sigma^2 + \omega^2}\right) = \frac{1}{T} \frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2}{\sigma^2 + \omega^2} < 0$$

$$\Rightarrow \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + \omega^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow z \text{ sono interni alla circonferenza in figura}$$

Regolatori **stabili**  $D(s)$  a tempo continuo sono trasformati in regolatori **stabili**  $D(z)$  a tempo discreto (ma anche alcuni regolatori instabili in  $s$  diventano stabili in  $z$ , e ci sono notevoli distorsioni in frequenza)

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{T}}$$

Discretizzazione (approssimata) dell'operazione di derivazione o di integrazione con **differenze in avanti** o **integrazione di Eulero a destra** negli istanti campionati  $t = kT$

$$y(kT) = \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T} \Rightarrow Y(z) = \frac{z-1}{T} X(z)$$

$$y(kT) = y((k-1)T) + T x((k-1)T) \Rightarrow (1 - z^{-1})Y(z) = Tz^{-1}X(z)$$

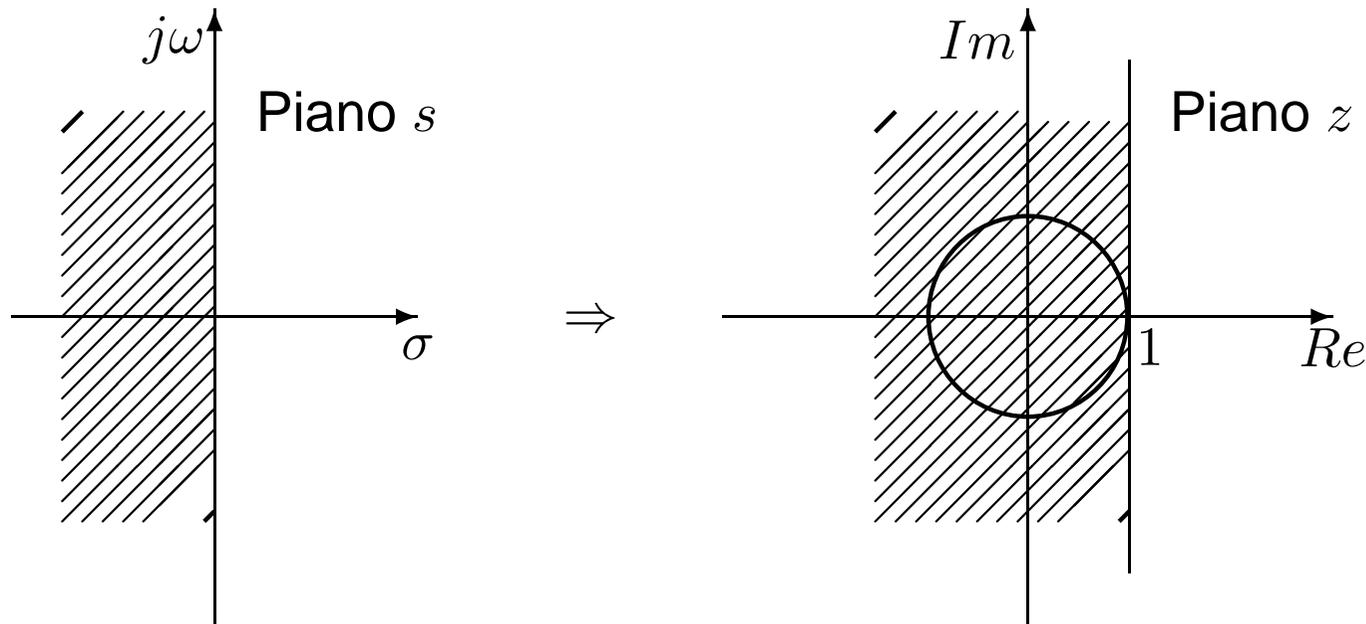
Paragonando nei domini trasformati (con  $s$  o con  $1/s$  nei due casi), si ottiene comunque

$$s = \frac{z-1}{T} = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} \Leftrightarrow z = 1 + Ts \quad (\text{approssimazione di Padè } P_{[1,0]} \text{ di } z = e^{sT})$$

Nota: il campione  $x((k+1)T)$  non è ancora noto al tempo  $t = kT$

## Differenze in avanti – 2

Legame fra piano  $s$  e piano  $z$  implicato dall'approssimazione  $z = 1 + Ts \leftrightarrow s = \frac{z - 1}{T}$



$$Re(s) = Re\left(\frac{z - 1}{T}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad Re(z) < 1$$

Regolatori **stabili**  $D(s)$  **possono** trasformarsi in regolatori **instabili**  $D(z)$

# Trasformazione bilineare (o di Tustin) – 1

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

Discretizzazione (approssimata) dell'operazione di derivazione o di integrazione con **differenze mediate** (backward<sub>k</sub> e forward<sub>k-1</sub>) o **integrazione trapezoidale** in istanti  $t = kT$

$$\frac{y(kT) + y((k-1)T)}{2} = \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \Rightarrow \frac{1 + z^{-1}}{2} Y(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T} X(z)$$

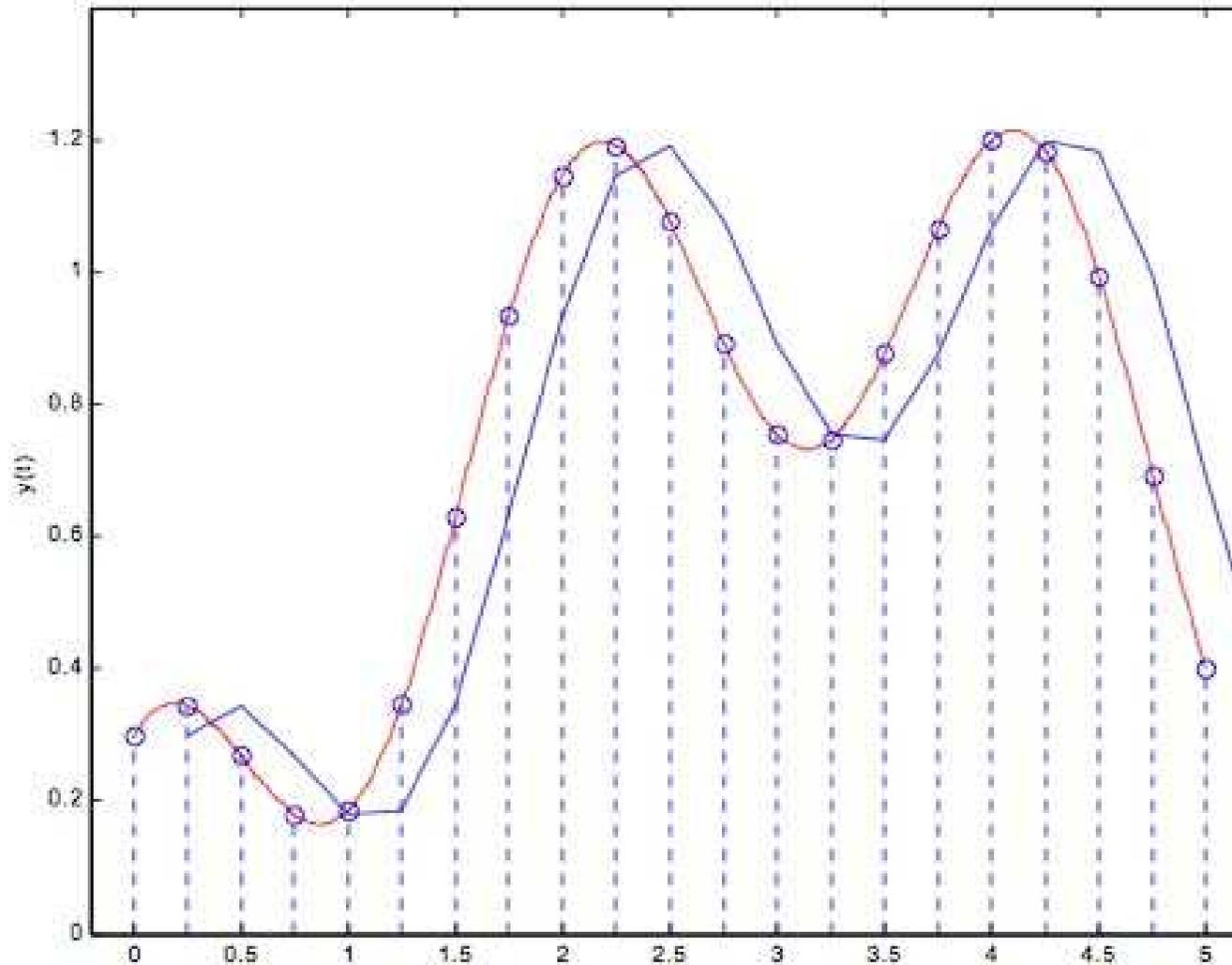
$$y(kT) = y((k-1)T) + T \frac{x(kT) + x((k-1)T)}{2} \Rightarrow (1 - z^{-1})Y(z) = \frac{T}{2}(1 + z^{-1})X(z)$$

Paragonando nei domini trasformati (con  $s$  o con  $1/s$  nei due casi), si ottiene comunque

$$s = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Leftrightarrow z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \quad (\text{approssimazione di Padè } P_{[1,1]} \text{ di } z = e^{sT})$$

Per  $T = 2$  è la trasformazione bilineare utilizzata nel criterio di Routh-Hurwitz

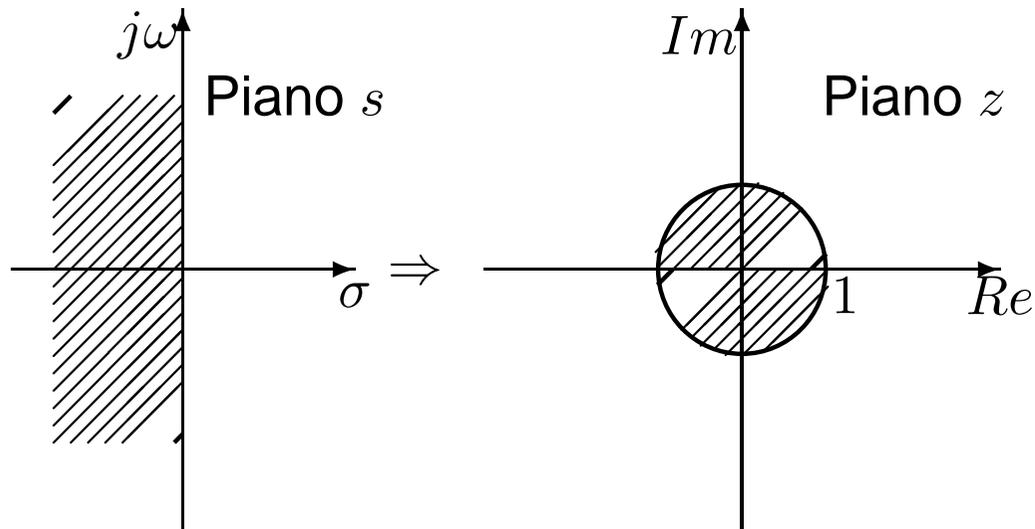
## Trasformazione bilineare (o di Tustin) – 2



nell'operazione discreta di integrazione, si assume che la  $x(t)$  vari in modo **lineare** tra i campioni  $x((k-1)T)$  e  $x(kT)$  per  $t \in ((k-1)T, kT]$  (qui il risultato è mostrato con un passo di ritardo per maggiore chiarezza)

## Trasformazione bilineare (o di Tustin) – 3

Legame fra piano  $s$  e piano  $z$  con l'approssimazione  $z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \leftrightarrow s = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}$



Posto  $z = \sigma + j\omega$  (e con  $T > 0$ )

$$Re(s) = Re\left(\frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}\right) = Re\left(\frac{2}{T} \frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1}\right) = Re\left(\frac{2}{T} \frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2 + j2\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}\right) < 0$$

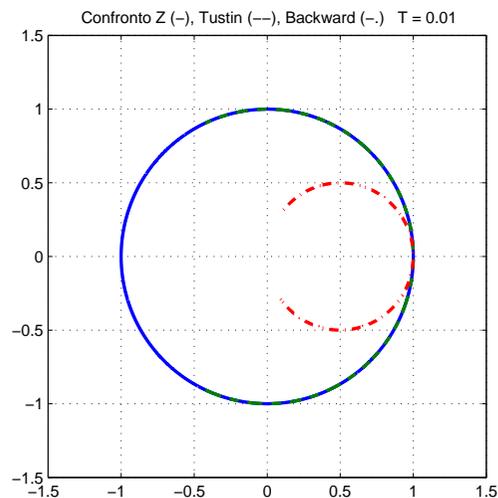
$$\Rightarrow \sigma^2 + \omega^2 < 1 \Rightarrow z \text{ sono interni al cerchio unitario}$$

Regolatori **stabili**  $D(s)$  a tempo continuo sono trasformati in regolatori **stabili**  $D(z)$  a tempo discreto (e viceversa)

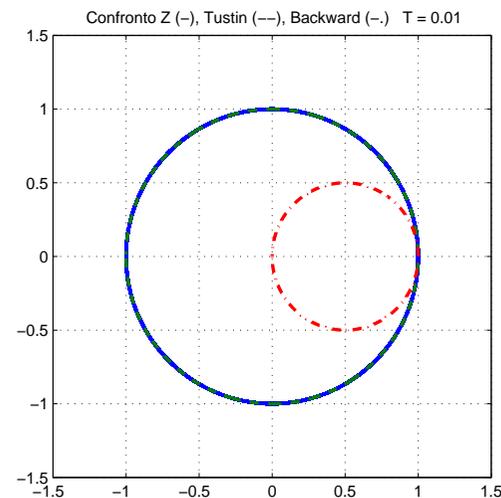
# Confronto tra trasformazioni

$Z$ -trasformata, Tustin, Backward differences

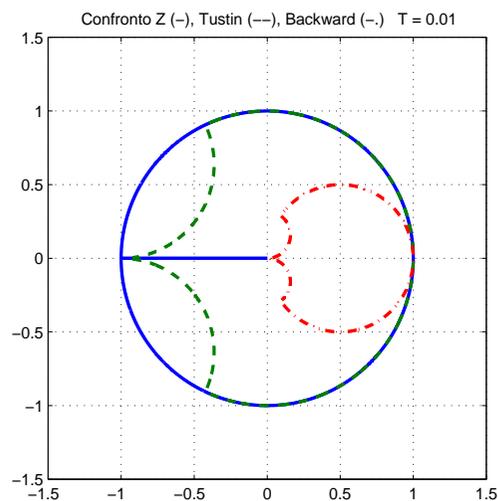
mappa per  $s \in [-j\pi/T, +j\pi/T]$



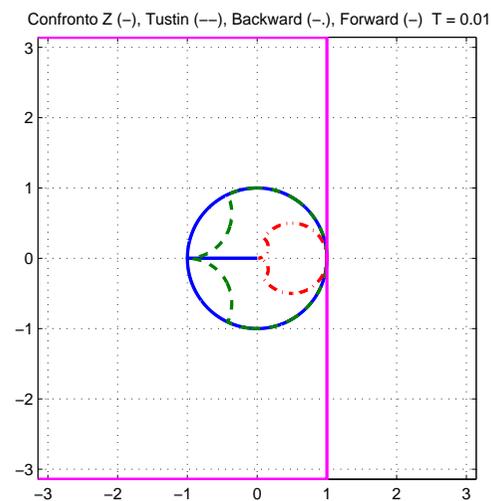
... per  $s \in [-j\infty, +j\infty]$



mappa del contorno della striscia principale in  $s$

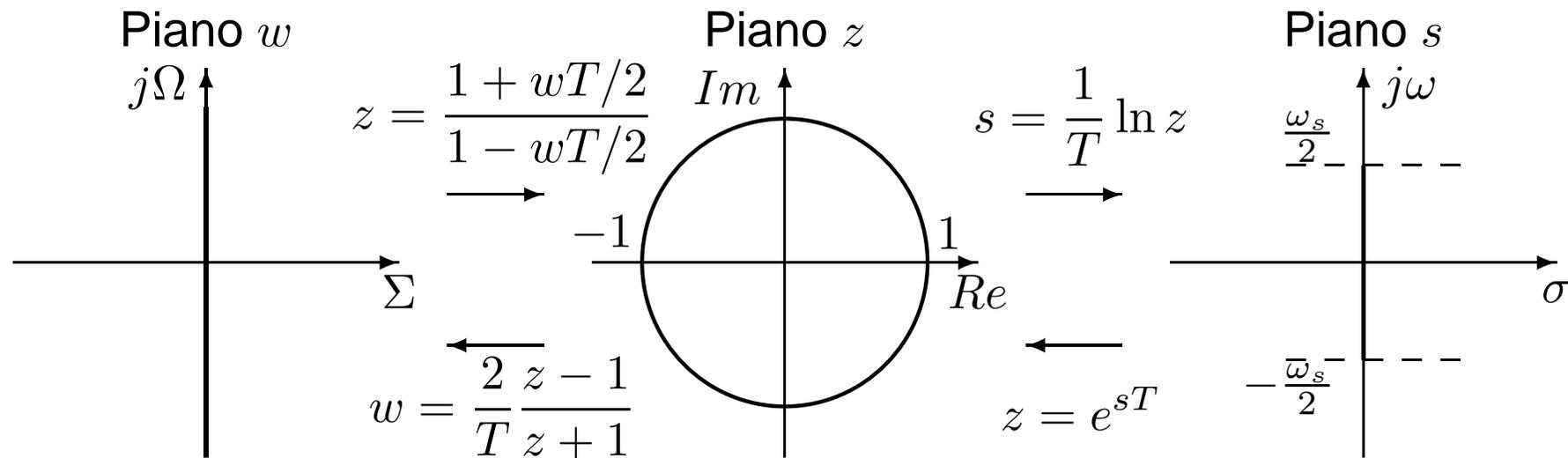


... includendo Forward differences



# Aspetti frequenziali della trasformazione di Tustin – 1

Relazioni tra il piano  $w$ , il piano  $z$  e il piano  $s$



1. la corrispondenza di  $w$  è simile a quella della  $Z$ -trasformata, ma la circonferenza unitaria  $|z| = 1$  viene percorsa **una sola volta** quando  $w = j\Omega$  per  $\Omega \in (-\infty, +\infty)$
2. **non** si ha quindi un effetto di sovrapposizione frequenziale (aliasing)
3. la trasformazione di Tustin introduce distorsioni (fenomeno di **compressione in alta frequenza**): invece di aversi  $j\Omega = j\omega$ , si ha

$$j\Omega = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} = \frac{2}{T} \frac{2j \sin \omega T/2}{2 \cos \omega T/2} = j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$

## Aspetti frequenziali della trasformazione di Tustin – 2

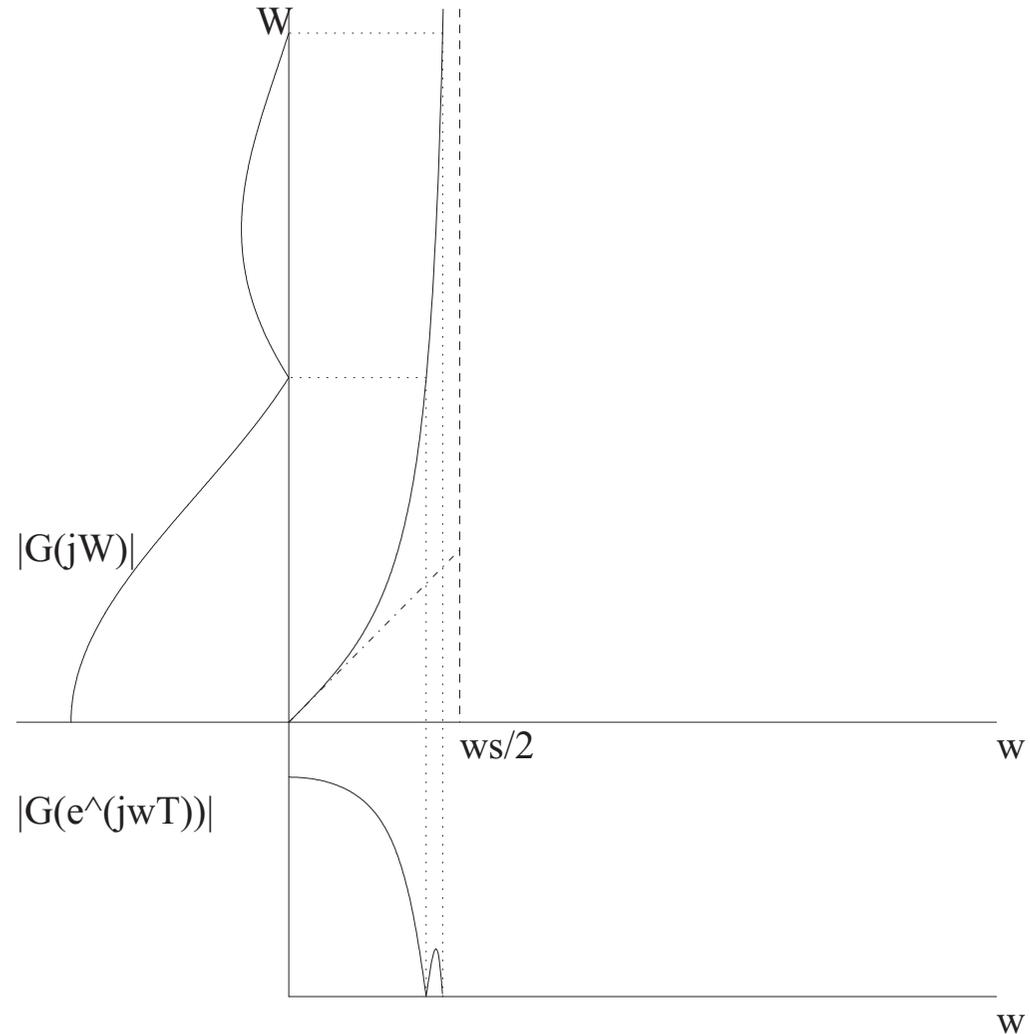
legame tra le pulsazioni  $\Omega$  del filtro analogico di partenza  $D_c(s)$  e le pulsazioni  $\omega$  del filtro digitale  $D_d(z)$  ottenuto con Tustin

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$



$$D_c(j\Omega) = D_d(e^{j\omega T})$$

per  $\omega \ll \pi/T \Rightarrow \Omega \approx \omega$



(nel grafico:  $\Omega \leftrightarrow W, \omega \leftrightarrow w$ )

# Trasformazione bilineare con precompensazione – 1

Scegliendo

$$s = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{z - 1}{z + 1}$$

⇒ **prewarping** (compensazione delle distorsioni) alla pulsazione  $\Omega = \omega_1 \Rightarrow \omega = \omega_1$

$$D_c(j\omega_1) = D_d(e^{j\omega_1 T})$$

Se si vuole precompensare alla frequenza di taglio  $\omega = a$  la versione digitale di un filtro passa basso

$$G(s) = \frac{a}{s + a} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{a}{\tan \frac{aT}{2}} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

si ottiene

$$G_d(z) = \frac{\tan \frac{aT}{2} (1 + z^{-1})}{(\tan \frac{aT}{2} - 1)z^{-1} + (\tan \frac{aT}{2} + 1)}$$

## Trasformazione bilineare con precompensazione – 2

Allo stesso risultato si arriva modificando il punto di rottura del filtro analogico secondo

$$\text{la } a \rightarrow \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{\frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}}{s + \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}}$$

e poi applicando la trasformazione di Tustin  $s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$

Paragonando i moduli alla pulsazione di taglio si ha infatti

$$|G(ja)| = \frac{1}{|j+1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ db}$$

$$G_d(e^{j\omega T}) = \frac{\tan \frac{aT}{2}}{\frac{1+e^{j\omega T}}{1-e^{j\omega T}} + \tan \frac{aT}{2}} = \frac{\tan \frac{aT}{2}}{j \tan \frac{\omega T}{2} + \tan \frac{aT}{2}} \Rightarrow |G_d(e^{jaT})| = \frac{\tan \frac{aT}{2}}{\sqrt{2} \tan \frac{aT}{2}} = -3 \text{ db}$$

Occorre più in generale aggiustare anche il guadagno statico (per  $z = 1$ ) della  $G_d(z)$  ottenuta per avere lo stesso valore della  $G(s)$  di partenza

La procedura si può ripetere in modo analogo per un filtro passa alto  $G(s) = \frac{s}{s+a}$  (con eventuale aggiustamento del guadagno alle alte frequenze, per  $z = -1$ )

## Esempio di trasformazione con precompensazione

Progettare un filtro passa basso discreto che approssimi nella banda  $[0, 10]$  rad/s il comportamento del filtro analogico

$$G(s) = \frac{10}{s + 10} \quad \text{con } T = 0.2 \text{ s}$$

Utilizzando la regola di Tustin si ottiene

$$G_{d,Tustin}(z) = \frac{10}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 10} = \frac{1+z^{-1}}{2}$$

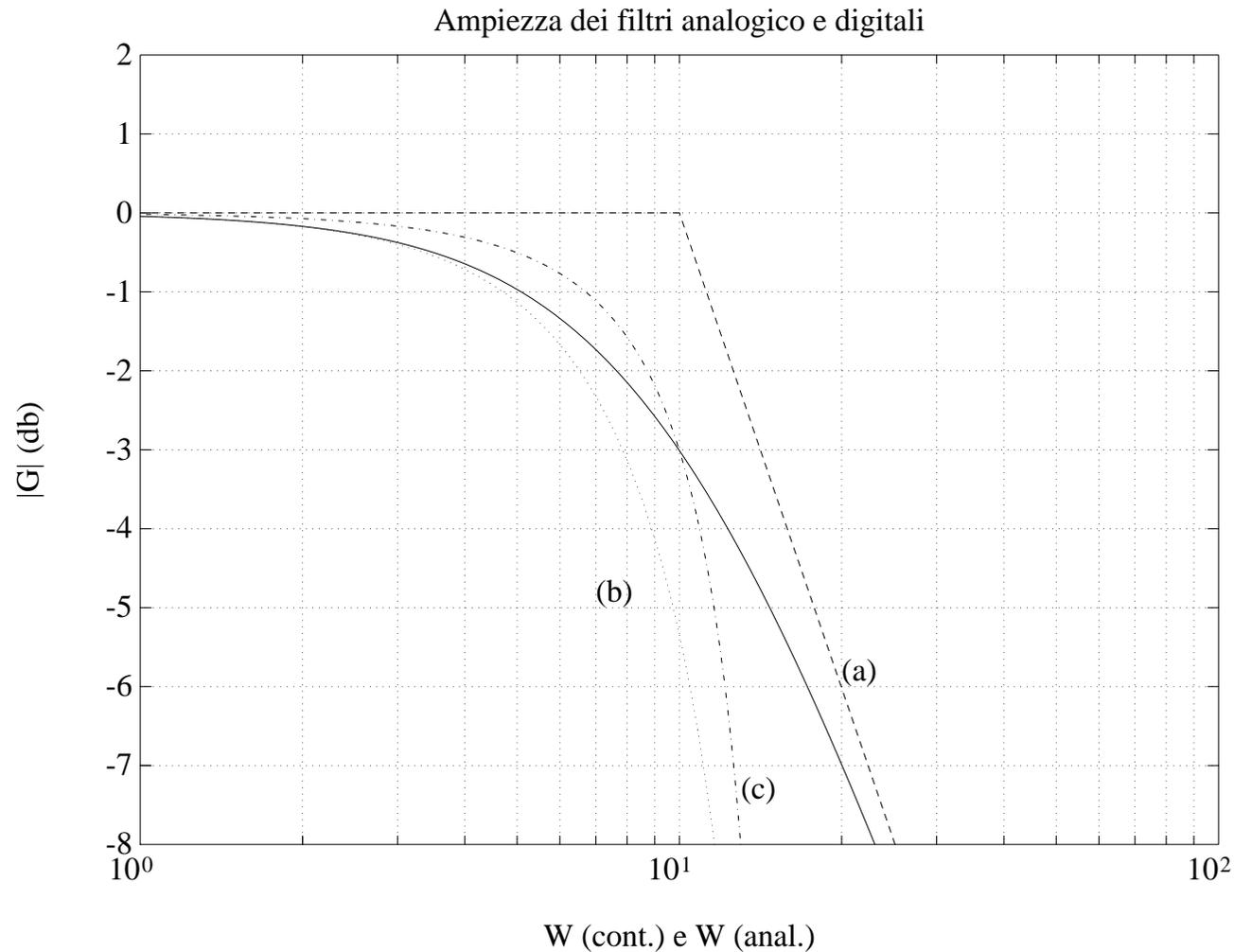
e la relativa funzione di risposta armonica discreta

$$G_{d,Tustin}(e^{j\omega T}) = \frac{10}{j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2} + 10} = \frac{1}{j \tan 0.1 \omega + 1}$$

Utilizzando la precompensazione alla frequenza  $\omega = 10$  rad/s, si ottiene

$$G_{d,prewarp}(z) = \frac{10}{\frac{10}{\tan \frac{10T}{2}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 10} = \frac{0.609 (1+z^{-1})}{1+0.218z^{-1}}$$

# Esempio di trasformazione con precompensazione (cont)



coincidenza alla pulsazione  $\omega = 10$  rad/s

$$(a) = G(j\omega) \text{ (asintotica/effettiva)} \quad (b) = G_{d,Tustin}(e^{j\omega T}) \quad (c) = G_{d,prewarp}(e^{j\omega T})$$

$$D(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[D(s)]]$$

Esempio

$$D(s) = \frac{a}{s+a} \quad \Rightarrow \quad D(z) = \frac{a}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

in generale, richiede lo sviluppo della  $D(s)$  in frazioni parziali (poli e residui)

- per definizione, si ha **invarianza** dei campioni della **risposta impulsiva**
  - in uscita al controllore digitale o analogico, quando in ingresso c'è un impulso
- possibilità di aliasing
  - lo spettro di  $D(z)$  (a meno del fattore  $1/T$ ) è quello della  $D(s)$  moltiplicato infinite volte, centrate rispetto alle pulsazioni  $k(2\pi/T)$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$
  - **due vie** per evitare l'aliasing: filtro passa basso prima del campionamento o aumento della frequenza di campionamento
- regolatori **stabili**  $D(s)$  a tempo continuo sono trasformati in regolatori **stabili**  $D(z)$  a tempo discreto (**e viceversa**)

## Metodo della Z-trasformata con ricostruttore ZOH

Analogo al caso precedente, ma introducendo un organo di tenuta (**fittizio**) di ordine 0 nella trasformazione

$$D(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{D(s)}{s} \right] = \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} D(s) \right]$$

- si ha quindi **invarianza** dei campioni della **risposta al gradino**, in quanto

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[ D(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ D(s) \frac{1}{s} \right] \Big|_{t=kT}$$

- possibilità di aliasing
  - ma fenomeno più attenuato per l'effetto di filtraggio dello ZOH
- regolatori **stabili**  $D(s)$  trasformati in regolatori **stabili**  $D(z)$

Esempio

$$D(s) = \frac{a}{s + a} \quad \Rightarrow \quad D(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

# Corrispondenza poli/zeri – 1

1. si fattorizza numeratore e denominatore di  $D(s)$  (rispettivamente, zeri e poli)
2. si trasformano **poli** e **zeri** (reali o complessi coniugati) secondo la mappa  $z = e^{sT}$ , usando le relazioni

$$\begin{aligned}(s + a) &\rightarrow (1 - e^{-aT} z^{-1}) \\(s + a \pm jb) &\rightarrow (1 - 2e^{-aT} \cos bT z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2})\end{aligned}$$

3. si introducono tanti **zeri in  $z = -1$**  quanto è il **grado relativo** di  $D(s)$ 
  - gli  $n - m$  poli in eccesso possono vedersi come **zeri all'infinito** in  $s$
  - si vuole che  $D_d(e^{j\omega T})$  per  $\omega \rightarrow \pi/T$  sia simile a  $D_c(j\Omega)$  per  $\Omega \rightarrow \infty$
4. si aggiusta il **guadagno** alle basse frequenze ( $z = 1$ ) per una  $D(s)$  passa-basso o alle alte frequenze ( $z = -1$ ) per una  $D(s)$  passa-alto

Esempio: passa basso a guadagno unitario  $D(s) = \frac{a}{s + a} \Rightarrow D(z) = \frac{a}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$

$$\begin{aligned}\text{ma } \lim_{s \rightarrow \infty} D(s) &= 0 \\ \text{mentre } \lim_{z \rightarrow -1} D(z) &\neq 0\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad D(z) = k \frac{a(1 + z^{-1})}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1 - e^{-aT} z^{-1}}{2a}$$

Nota:  $\lim_{\omega \rightarrow \pi/T} e^{j\omega T} = -1 + j0 = z$

## Esempi della tecnica di corrispondenza poli/zeri

filtro passa alto

$$D(s) = \frac{s}{s+a} \Rightarrow D(z) = k \frac{z-1}{z-e^{-aT}}$$

$$D(z=-1) = k \frac{-2}{-1-e^{-aT}} = 1 = \lim_{s \rightarrow \infty} D(s) \Rightarrow k = \frac{1+e^{-aT}}{2}$$

rete attenuatrice/anticipatrice

$$D(s) = \frac{s+b}{s+a} \Rightarrow D(z) = k \frac{z-e^{-bT}}{z-e^{-aT}}$$

$$D(z=1) = k \frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}} = \frac{b}{a} = D(s=0) \Rightarrow k = \frac{b}{a} \frac{1-e^{-aT}}{1-e^{-bT}}$$

eccesso poli-zeri = 2

$$D(s) = \frac{1}{(s+a)^2 + b^2} = \frac{1}{(s+a+jb)(s+a-jb)} \Rightarrow D(z) = k \frac{(z+1)^2}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}$$

$$D(z=1) = D(s=0) \Rightarrow k = \frac{1 - 2e^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}{4(a^2 + b^2)}$$

# Esempio di progetto per discretizzazione

## Processo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Specifiche ad anello chiuso (in retroazione unitaria) sulla risposta indiciale

$$\begin{array}{llll} \text{sovraelongazione} & S \leq 16.5 \% & \Rightarrow & S = 100 e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \Rightarrow \delta \geq 0.5 \\ \text{tempo di assestamento (al 2\%)} & T_a \leq 2 \text{ s} & \Rightarrow & T_a = \frac{4}{\delta\omega_n} \Rightarrow \omega_n = 4 \text{ rad/s} \end{array}$$

dove si è assunto come processo controllato “target” un modello con due poli dominanti

Nota: si segue qui una sintesi a tempo continuo nel dominio di Laplace piuttosto che nel dominio della frequenza, che richiederebbe la conversione delle specifiche sulla risposta al gradino in  $(M_r, B_{-3})$  (risposta armonica ad anello chiuso)  $\rightarrow (m_f, \omega_t)$  (ad anello aperto) e una sintesi per tentativi

Il primo passo è la scelta del **periodo di campionamento**

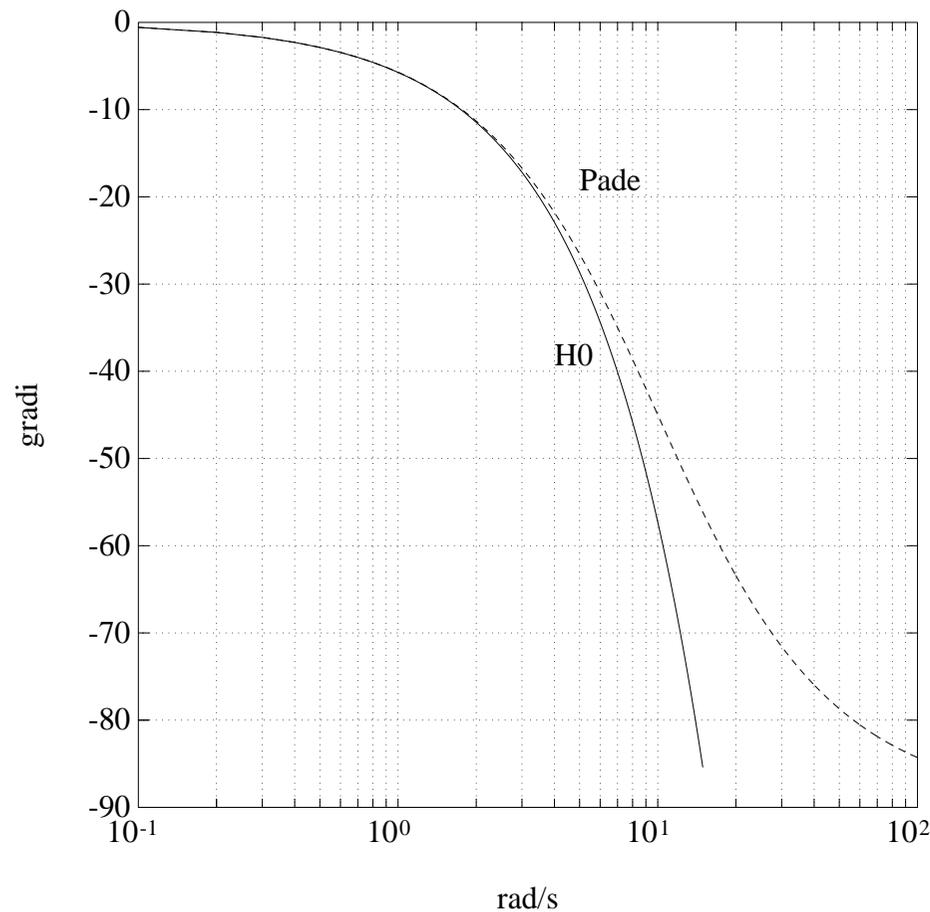
- in relazione alle costanti di tempo desiderate ad anello chiuso
- oscillazioni smorzate con periodo  $2\pi/(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}) = 1.814 \text{ s}$
- circa 8-10 campioni per oscillazione  $\Rightarrow T = 0.2 \text{ s}$

## Esempio di progetto per discretizzazione (cont)

Si considera poi l'effetto di ritardo che verrà introdotto dal ricostruttore (ZOH)

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx G_h(s) = \frac{1}{Ts/2 + 1} = \frac{10}{s + 10}$$

dove si è usata l'approssimazione di Padè per  $H_0(s)$



## Esempio di progetto per discretizzazione (cont)

Il sistema così modificato è

$$G_m(s) = G_h(s)G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+10)}$$

Poiché occorre aumentare la pulsazione naturale ad anello chiuso (mantenendo smorzamento elevato), si procede per **cancellazione** del polo lento ( $s+2$ ) e sua sostituzione con uno più veloce (di fatto, rete anticipatrice + aumento del guadagno)

$$D(s) = 20.25 \frac{s+2}{s+6.667}$$

Infatti, posto  $G_a(s) = D(s)G_h(s)G(s)$ , la funzione di trasferimento ad anello chiuso

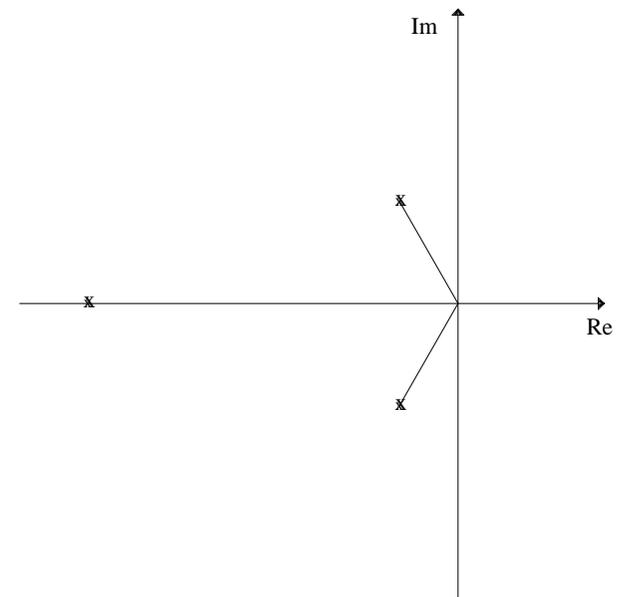
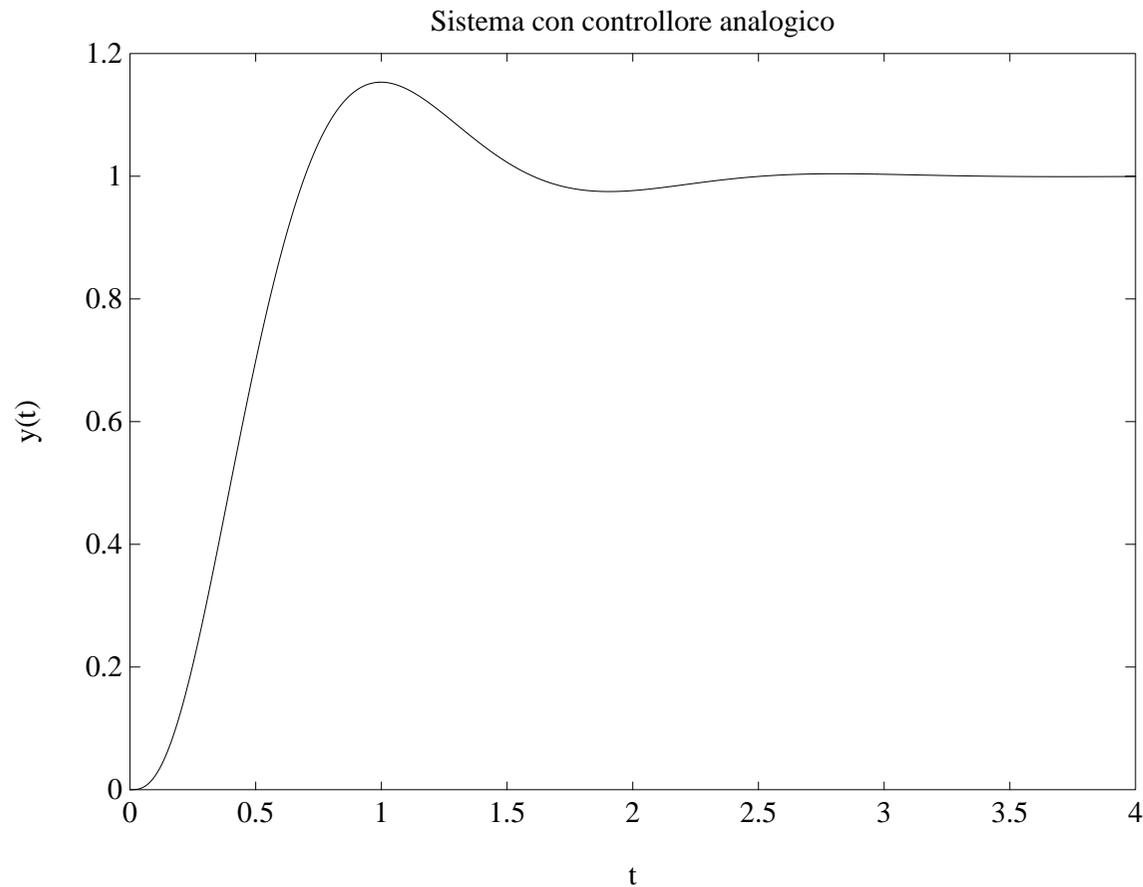
$$G_0(s) = \frac{G_a(s)}{1+G_a(s)} = \frac{202.5}{s^3 + 16.667s^2 + 66.67s + 202.5}$$

ha i tre poli in  $s = -12.665$  e in  $s = -2 \pm j3.462$ , per cui la coppia di poli dominante ha

$$\delta = 0.5 \quad \omega_n = 4 \quad \Rightarrow \quad T_a = \frac{4}{\delta\omega_n} = 2 \text{ s}$$

## Esempio di progetto per discretizzazione (cont)

Ad anello chiuso, la risposta del sistema a tempo continuo e la posizione dei poli è



## Esempio di progetto per discretizzazione (cont)

Volendo mantenere la cancellazione polo-zero, si passa al dominio discreto con la tecnica della **corrispondenza di poli e zeri**

$$z = e^{-6.667T} = 0.2644 \quad (\text{polo}) \qquad z = e^{-2T} = 0.6703 \quad (\text{zero})$$

$$D(s) = 20.25 \frac{s + 2}{s + 6.667} \quad \Rightarrow \quad D(z) = k \frac{z - 0.6703}{z - 0.2644}$$

con  $k$  scelto confrontando i guadagni statici

$$D(z = 1) = D(s = 0) \quad \Rightarrow \quad k = 13.57$$

In conclusione, le prestazioni del controllore discreto ottenuto

$$D(z) = 13.57 \frac{z - 0.6703}{z - 0.2644}$$

vanno validate con una **simulazione** del sistema complessivo

Questa può farsi **interamente a tempo discreto**, convertendo il processo (con l'organo di tenuta ZOH) nel discreto e con il controllore discreto, oppure **in modalità ibrida**, con il processo originale continuo e il controllore discreto (e organo di tenuta ZOH)

## Esempio di progetto per discretizzazione (cont)

Nel primo caso, essendo  $T = 0.2$  s, si ha

$$\begin{aligned} H_0 G(z) &= \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1}{s(s+2)} \right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s^2(s+2)} \right] \\ &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \frac{0.5}{s^2} - \frac{0.25}{s} + \frac{0.25}{s+2} \right] = \frac{0.01758(z+0.876)}{(z-1)(z-0.6703)} \end{aligned}$$

e si conferma che lo zero del regolatore  $D(z)$  cancellerà effettivamente il polo stabile del processo in  $z = 0.6703$

La funzione di trasferimento discreta di anello è

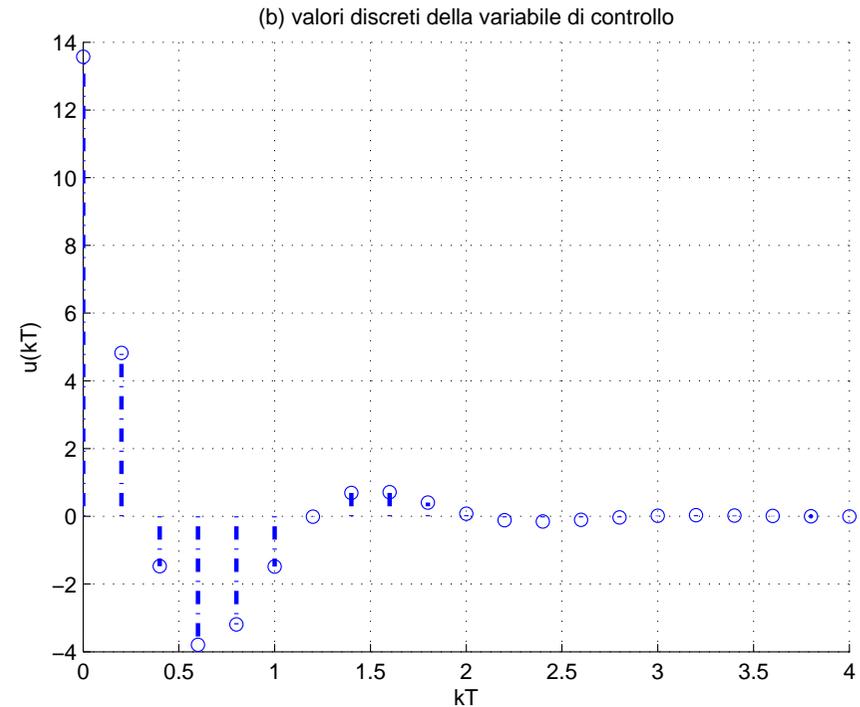
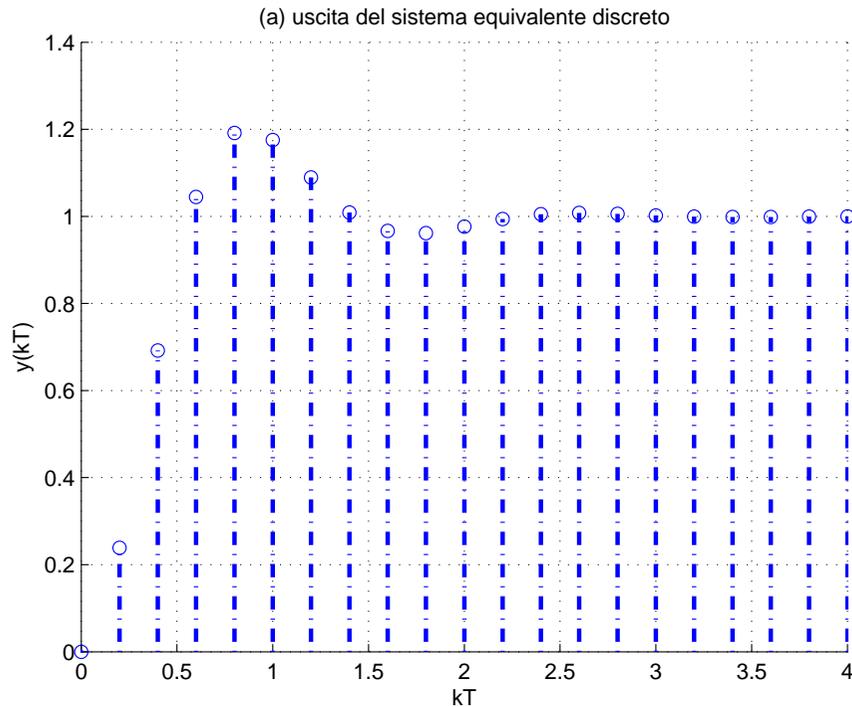
$$D(z)H_0G(z) = 0.2385 \frac{z+0.876}{(z-1)(z-0.2644)} = 0.2385 \frac{(1+0.876z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.2644z^{-1})}$$

mentre ad anello chiuso si ha

$$G_0(z) = \frac{0.2385z^{-1} + 0.2089z^{-2}}{1 - 1.0259z^{-1} + 0.4733z^{-2}}$$

## Esempio di progetto per discretizzazione (cont)

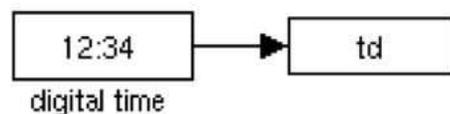
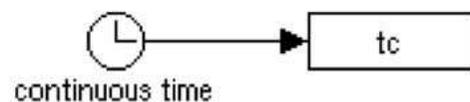
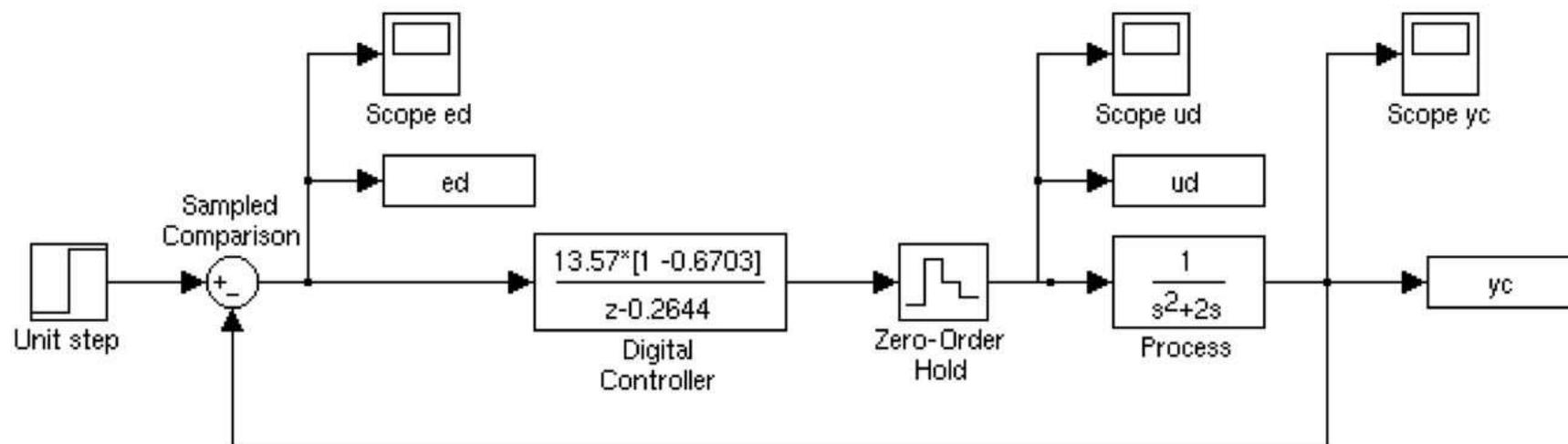
Risposta ad anello chiuso del sistema discreto equivalente e corrispondente uscita discreta del regolatore



La sovraelongazione è leggermente superiore alla specifica ( $S = 20\%$  vs.  $16.5\%$ ) mentre il tempo di assestamento è soddisfacente

## Esempio di progetto per discretizzazione (cont)

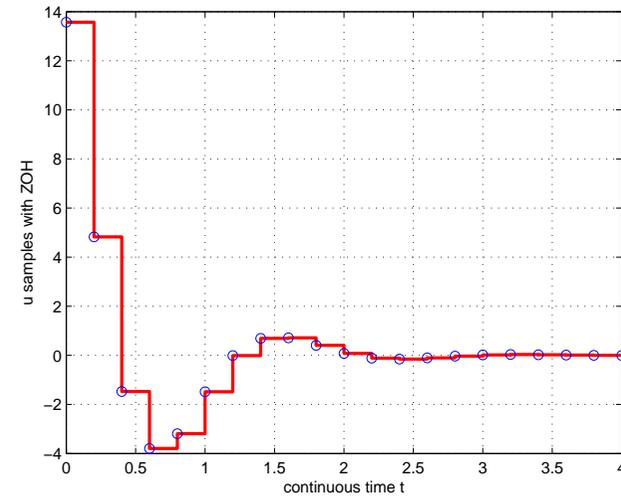
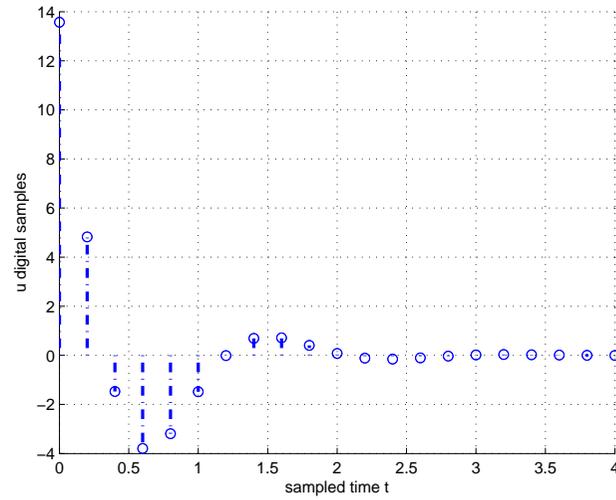
Nel **secondo caso**, si ha uno schema a blocchi Simulink del tipo



con segnali campionati, tenuti, confrontati con passo  $T = 0.2$  s

# Esempio di progetto per discretizzazione (fine)

campioni in uscita al controllore  $D(z)$  e dopo l'organo di tenuta ZOH



uscita continua del processo e uscita con i suoi campioni sovrapposti

