

# SISTEMI DIGITALI DI CONTROLLO

Prof. Alessandro De Luca

DIS, Università di Roma “La Sapienza”

deluca@dis.uniroma1.it

Lucidi tratti dal libro

**C. Bonivento, C. Melchiorri, R. Zanasi: “Sistemi di Controllo Digitale”**

**Capitolo 8: Progetto nel piano  $w$**

Si ringraziano gli autori

- Uso dei diagrammi di Bode, di Nyquist e di Nichols nel piano  $w$  (funzioni razionali)
- Definizione di regolatori con struttura molto semplice (reti di correzione attenuatrici, anticipatrici, o a sella)
- Trasformazione bilineare

$$z = \frac{1 + wT/2}{1 - wT/2}$$

e sua antitrasformazione nel piano  $z$

$$w = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}$$

- Si conserva l'uguaglianza degli errori a regime e delle relative costanti di errore

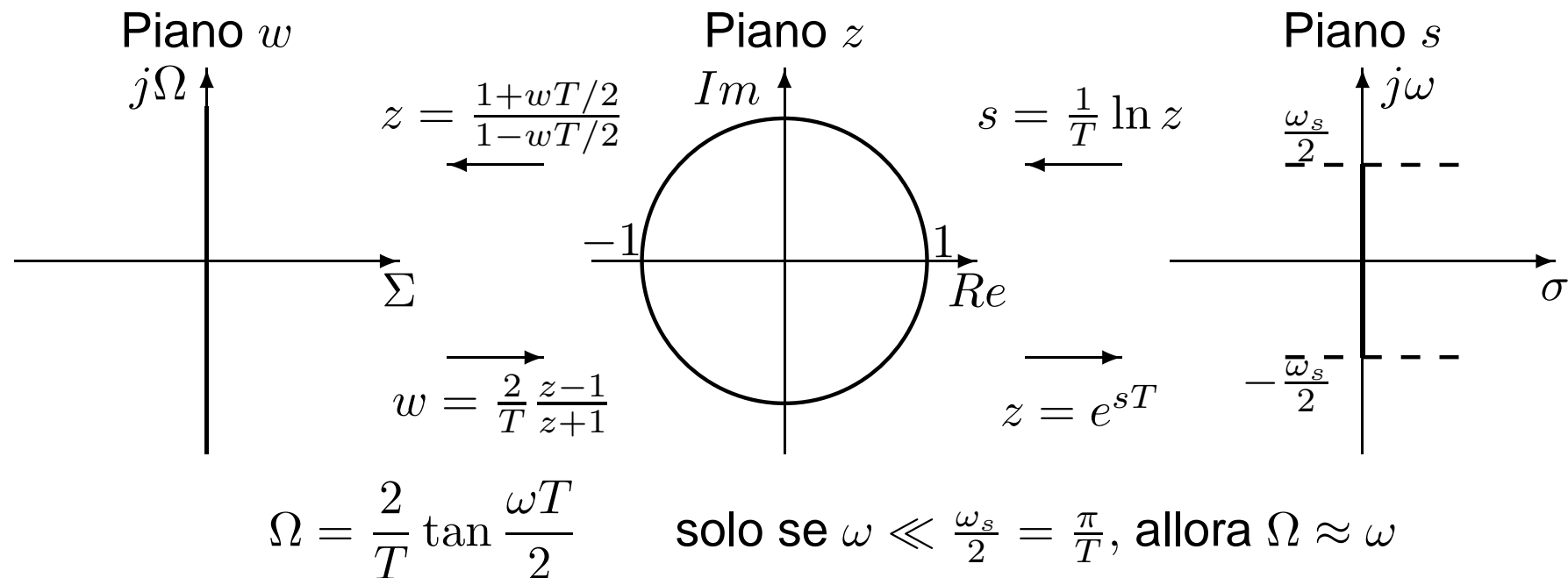
$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \lim_{w \rightarrow 0} G(w)$$

$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})G(z)}{T} = \lim_{w \rightarrow 0} wG(w)$$

$$k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})^2 G(z)}{T^2} = \lim_{w \rightarrow 0} w^2 G(w)$$

## Passi logici del progetto nel piano $w$

1. fissare un periodo di campionamento  $T$
2. ricavare la funzione di trasferimento del processo  $G(z)$  nel dominio  $Z$
3. trasformare la  $G(z)$  così ottenuta in una  $G(w)$
4. applicare, utilizzando la  $G(w)$ , una delle tecniche di sintesi frequenziale note
5. antitrasformare la  $D(w)$  così ottenuta nella  $D(z)$
6. verificare le prestazioni ottenute



Si consideri per esempio il filtro passa basso

$$G_c(s) = \frac{100}{s + 100}$$

Il corrispondente filtro discreto con  $T = 0.01$  s e con un ricostruttore di ordine 0 è

$$G_d(z) = \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{100}{s + 100} \right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{100}{s(s + 100)} \right] = \frac{0.6321}{z - 0.3679}$$

Passando al piano  $w$

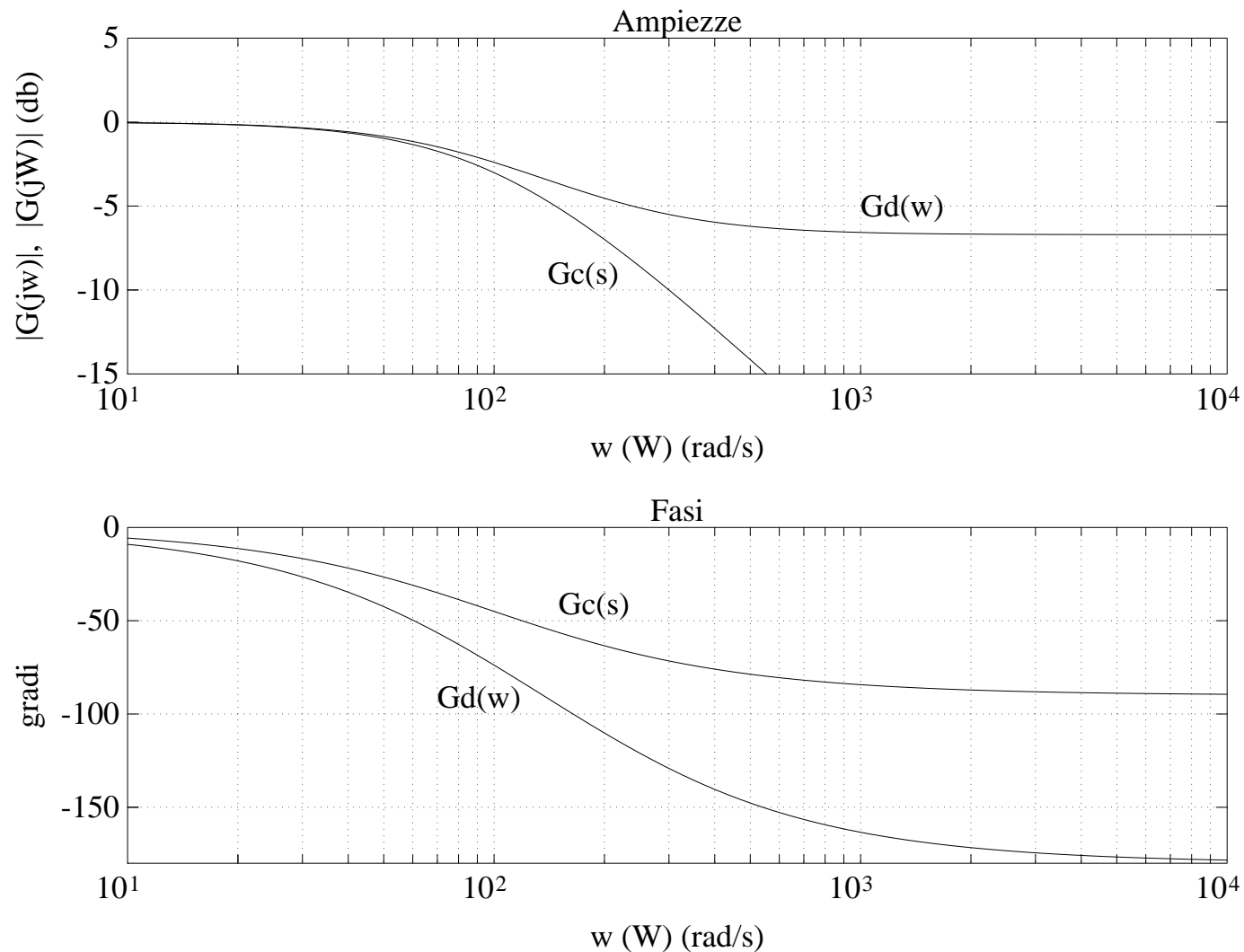
$$G_d(w) = G_d(z) \Big|_{z = \frac{1+0.005w}{1-0.005w}} = -0.4621 \frac{w - 200}{w + 92.4234}$$

quindi nel dominio frequenziale ( $s = j\omega$  per  $G_c(s)$  e  $w = j\Omega$  per  $G_d(w)$ )

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_c(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{100}{j\omega + 100} \right| = 1 = \lim_{\Omega \rightarrow 0} |G_d(j\Omega)|$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_c(j\omega)| = 0 \neq \lim_{\Omega \rightarrow \infty} |G_d(j\Omega)| = 0.4621 = -6.7 \text{ db}$$

## Uso dei diagrammi di Bode nel piano $w - 2$



Si noti che con la trasformazione bilineare possono in generale essere introdotti, come in questo caso, zeri a parte reale positiva (fase **non minima**)

Progetto di regolatori costituiti da una **coppia polo/zero** e **guadagno**

$$D(z) = k_d \frac{z - z_0}{z - z_p}$$

che vengono trasformati nella forma generica

$$D(w) = \frac{1 + w \tau_0}{1 + w \tau_p}$$

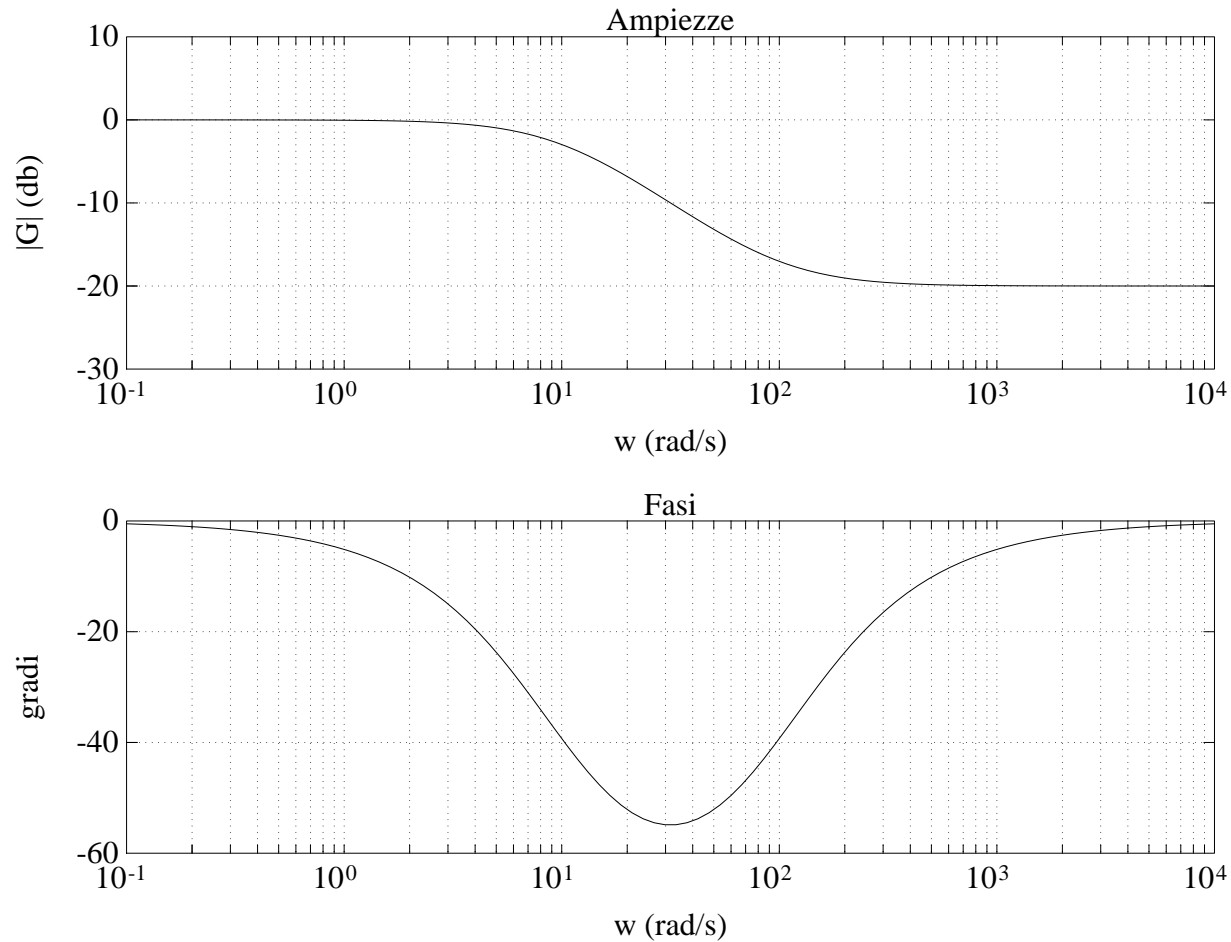
Si noti infatti che  $D(z) = \frac{1 + w \tau_0}{1 + w \tau_p} \Big|_{w = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$  e quindi

$$D(z) = \frac{T + 2\tau_0}{T + 2\tau_p} \frac{z + \frac{T - 2\tau_0}{T + 2\tau_0}}{z + \frac{T - 2\tau_p}{T + 2\tau_p}}$$

$$k_d = \frac{T + 2\tau_0}{T + 2\tau_p} \quad z_0 = \frac{2\tau_0 - T}{2\tau_0 + T} \quad z_p = \frac{2\tau_p - T}{2\tau_p + T}$$

# Rete attenuatrice (ritardatrice) – 1

$$D(w) = \frac{1 + w \tau_0}{1 + w \tau_p} \quad \frac{1}{\tau_p} < \frac{1}{\tau_0} \quad (\text{in frequenza, il polo precede lo zero})$$



qui con  $\tau_0 = 0.01$  s,  $\tau_p = 0.1$  s

Alle alte frequenze, il valore del guadagno è dato da

$$\alpha = \frac{\tau_0}{\tau_p} < 1$$

Lo sfasamento massimo (ritardo) è dato da

$$\Phi_m = -\arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

e si ottiene alla pulsazione

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_0 \tau_p}} = \frac{1}{\tau_p \sqrt{\alpha}}$$

- riduzione di  $\omega_t$  di attraversamento e attenuazione in alta frequenza (effetti **positivi**)
- introduzione di un ritardo di fase (effetto **negativo**)



Il progetto si articola nei seguenti passi

1. Dai diagrammi di Bode del sistema  $G(w)$ , con guadagno modificato per soddisfare eventuali specifiche sull'errore a regime, si calcola la pulsazione  $\Omega^*$  a cui corrisponde un margine di fase pari a quello desiderato ( $m_f$ ) aumentato di  $\approx 5^\circ$  per compensare le approssimazioni introdotte nel procedimento

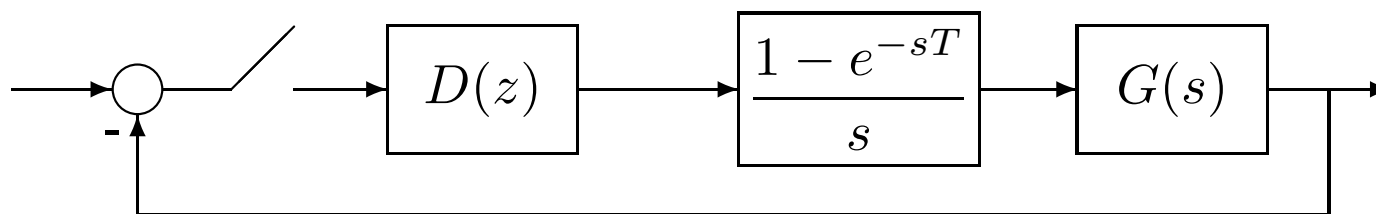
$$\Omega^* : \text{Arg}[G(j\Omega^*)] = -180^\circ + m_f + 5^\circ$$

2. Poichè la rete deve far sì che a questa pulsazione il guadagno di anello diventi unitario, si impone che il fattore di attenuazione introdotto dalla rete corretrice sia

$$\frac{\tau_0}{\tau_p} = \alpha = \frac{1}{|G(j\Omega^*)|}$$

3. Si fissa  $1/\tau_0 = 0.1 \Omega^*$  (una decade prima) al fine di assicurare che l'effetto di ritardo della rete non influisca in modo apprezzabile in corrispondenza alla nuova pulsazione di attraversamento fissata
4. Si ricava  $\tau_p = \frac{\tau_0}{\alpha}$

## Esempio di progetto con rete attenuatrice nel piano $w$



$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

Progettare una rete digitale attenuatrice  $D(z)$  che garantisca al sistema in retroazione un margine di fase  $m_f = 55^\circ$

Si sceglie  $T = 0.1$  s (la costante di tempo più veloce del processo è infatti 0.5 s)

Effettuando la discretizzazione della  $G(s)$ , si ottiene

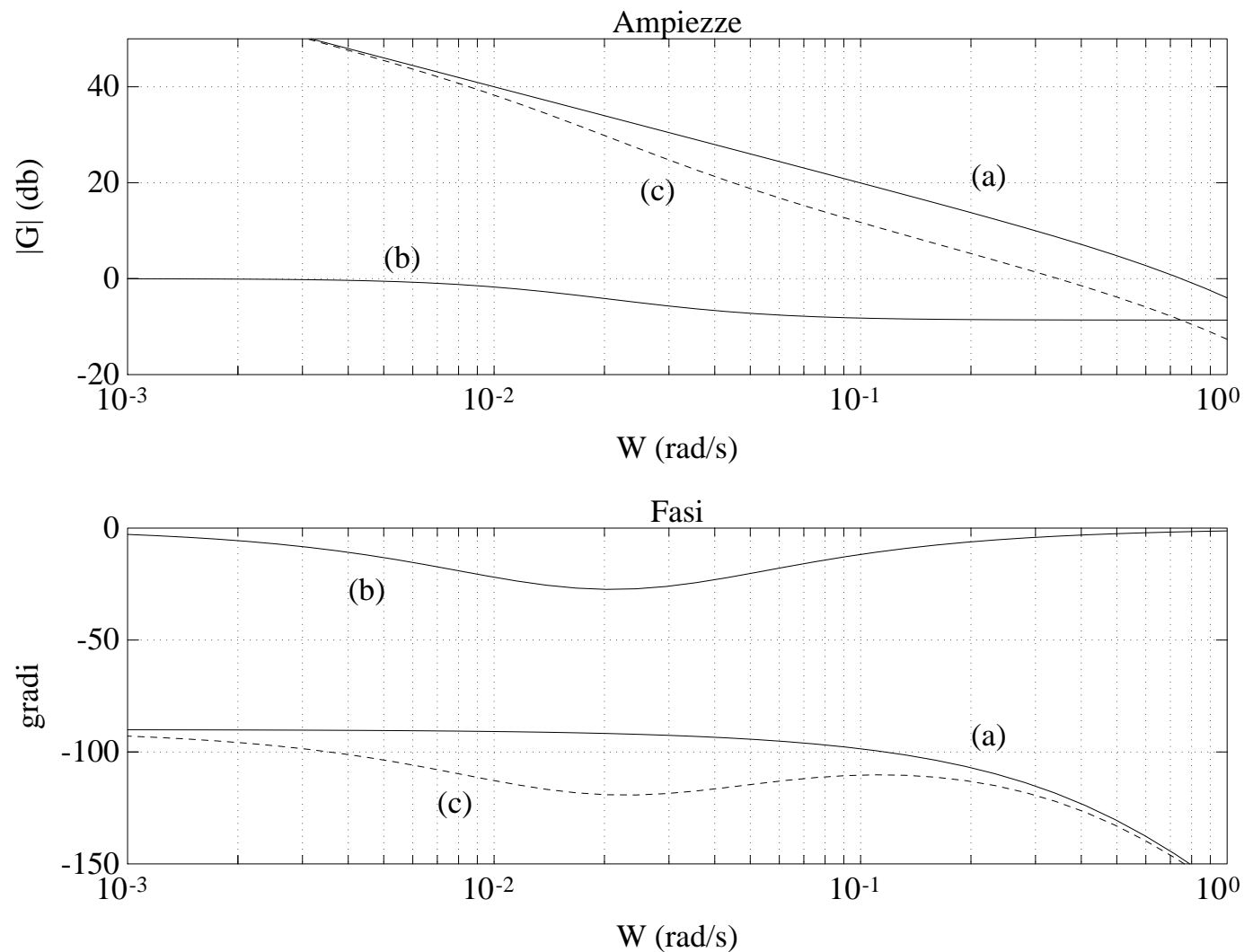
$$G(z) = \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \right] = \frac{3.094 \cdot 10^{-4} (z + 0.2484)(z + 3.4651)}{(z - 1)(z - 0.9048)(z - 0.8187)}$$

e applicando la trasformazione bilineare  $z = (1 + 0.05 w)/(1 - 0.05 w)$  si ha

$$G(w) = \frac{8.28 \cdot 10^{-5} (w - 20)(w + 33.22)(w - 36.23)}{w(w + 0.999)(w + 1.993)}$$

## Esempio di progetto con rete attenuatrice nel piano $w$ (cont)

Diagrammi di Bode: (a)  $G(w)$ , (b)  $D(w)$ , (c) funzione di anello  $D(w)G(w)$



$$@ \Omega^* \approx 0.35 \text{ rad/s} \Rightarrow \text{Arg}[G(j\Omega^*)] \approx -180^\circ + 55^\circ + 5^\circ = -120^\circ, |G(j\Omega^*)| \approx 8 \text{ db}$$

## Esempio di progetto con rete attenuatrice nel piano $w$ (cont)

Con calcolo più preciso, dal valore di pulsazione  $\Omega^* \approx 0.3446$  rad/s, cui corrisponde la fase di  $-120^\circ$ , e dal relativo guadagno

$$\frac{1}{\alpha} = 2.7039 = 8.64 \text{ db}$$

si pone

$$\tau_0 = \frac{1}{0.1 \Omega^*} = \frac{1}{0.03446} = 29.0191 \text{ s} \quad (\Omega_0 = \frac{1}{\tau_0} = 0.03446 \text{ rad/s})$$

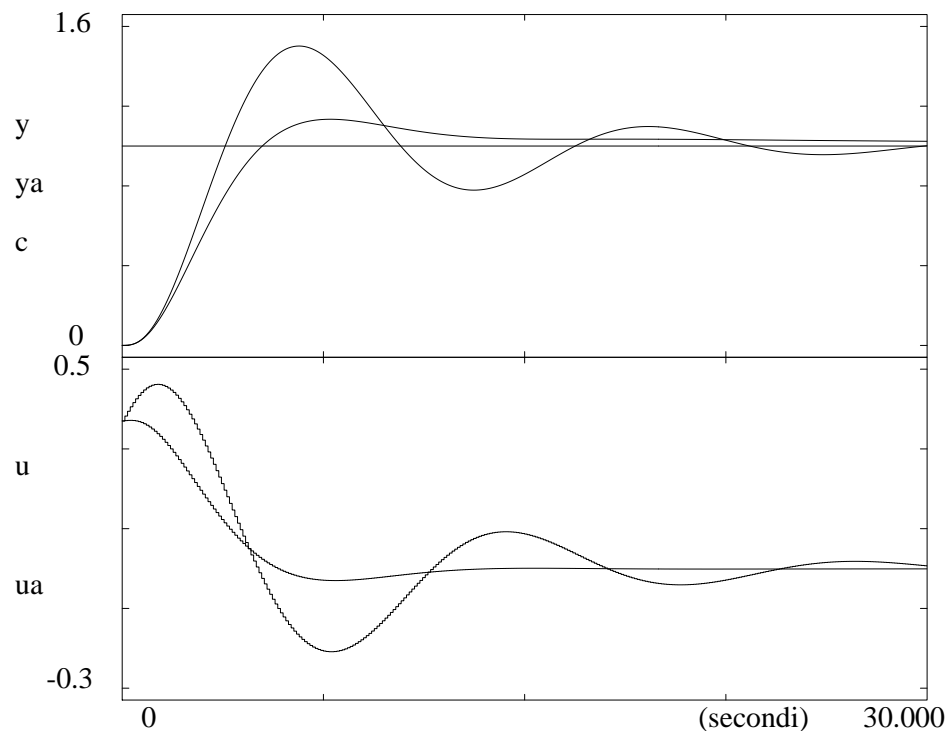
$$\tau_p = \frac{1}{\alpha} \tau_0 = 2.7039 \cdot 29.0191 = 78.4649 \text{ s} \quad (\Omega_p = \frac{1}{\tau_p} = 0.01274 \text{ rad/s})$$

Effettuando l'antitrasformata, usando le espressioni generali di  $k_d$ ,  $z_0$  e  $z_p$ , si ha

$$D(z) = 0.37023 \frac{z - 0.99656}{z - 0.99873} = \frac{0.37023 z - 0.36896}{z - 0.99873}$$

## Esempio di progetto con rete attenuatrice nel piano $w$ (fine)

Risposta a gradino del processo in retroazione e relative variabili di controllo **senza** (grafici più smorzati) e **con** troncamento numerico a 3 cifre dei parametri del regolatore (grafici più oscillanti)



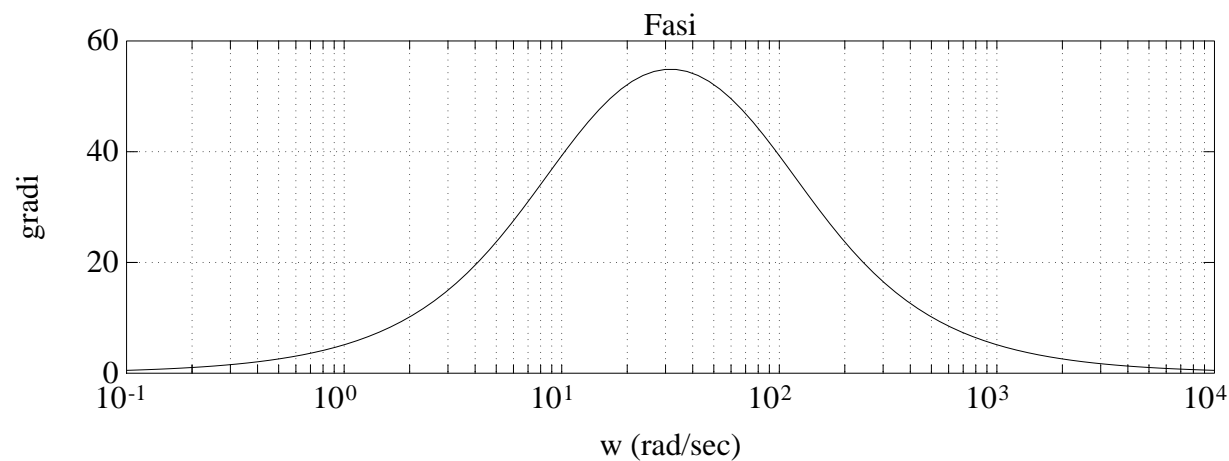
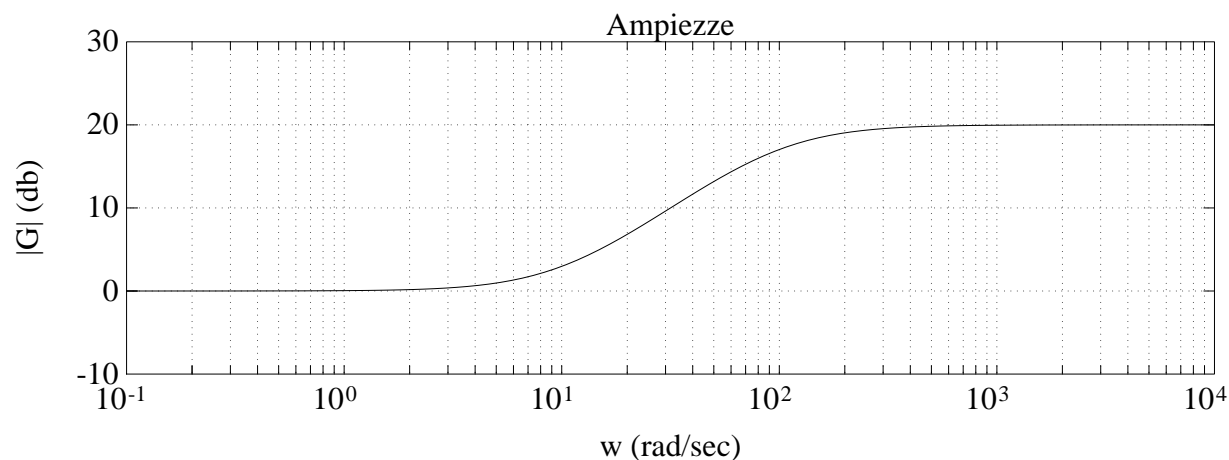
Il polo e lo zero della rete attenuatrice sono **molto prossimi** tra loro e a  $z = 1 + j0$

Tale fenomeno, **generale per le reti attenuatrici** (posizionate in bassa frequenza), è peraltro accentuato per  $T$  piccolo

⇒ Il regolatore digitale deve essere realizzato con una notevole **precisione numerica!**

# Rete anticipatrice – 1

$$D(w) = \frac{1 + w \tau_0}{1 + w \tau_p} \quad \frac{1}{\tau_0} < \frac{1}{\tau_p} \quad (\text{in frequenza, lo zero precede il polo})$$



qui con  $\tau_p = 0.01$  s,  $\tau_0 = 0.1$  s

Alle alte frequenze, il valore del guadagno è dato da

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\tau_0}{\tau_p} > 1$$

Lo sfasamento massimo (anticipo) è

$$\Phi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

e si ottiene alla pulsazione

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_0 \tau_p}} = \frac{1}{\tau_0 \sqrt{\alpha}}$$

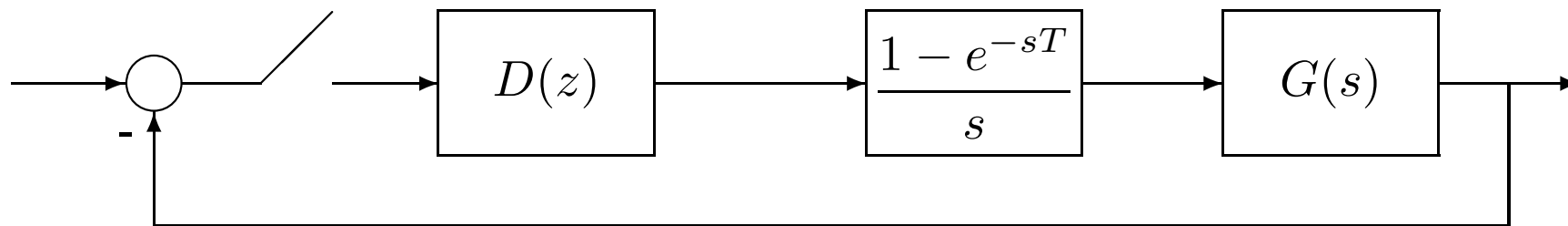
- anticipo di fase, con possibile miglioramento del margine  $m_f$  (effetto **positivo**)
- amplificazione del guadagno in alta frequenza (effetto **negativo**)

Il progetto si articola nei seguenti passi

1. Dai diagrammi di Bode del sistema  $G(w)$ , con guadagno modificato per soddisfare eventuali specifiche sull'errore a regime, si individua il margine di fase (e relativa pulsazione  $\Omega_1$ )
2. Si calcola l'anticipo di fase  $\Phi_m$  necessario per avere un margine di fase pari a quello  $m_f$  desiderato, maggiorato di  $5^\circ \div 10^\circ$  per compensare le approssimazioni nel procedimento
3. Una volta noto  $\Phi_m$ , si calcola  $\alpha = \frac{1 - \sin \Phi_m}{1 + \sin \Phi_m}$  e si determina la pulsazione  $\Omega^*$  per la quale l'ampiezza di  $G(w)$  vale  $\alpha/2$
4. Poichè la rete aumenta il guadagno del sistema alle alte frequenze, si fa corrispondere la nuova pulsazione  $\Omega^* > \Omega_1$  alla  $\Omega_m$  della rete anticipatrice
5. Dalle relazioni  $\alpha = \frac{\tau_p}{\tau_0}$ ,  $\Omega^* = \Omega_m = \frac{1}{\tau_0 \sqrt{\alpha}}$  si ricavano le costanti di tempo  $\tau_0, \tau_p$
6. Se le prestazioni risultanti non sono quelle desiderate, si ripete il procedimento con una  $\Phi_m$  di valore superiore; può poi risultare conveniente considerare come valore di "centraggio"  $\Omega_m$  della rete una pulsazione (in genere) superiore a  $\Omega^*$



## Esempio di progetto con rete anticipatrice nel piano $w$



$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

Progettare una rete digitale anticipatrice  $D(z)$  che garantisca al sistema in retroazione un margine di fase  $m_f = 55^\circ$

Ponendo come prima  $T = 0.1$  s, dalla risposta armonica di  $G(w)$  (vedi lucido 11) si ha un margine di fase pari a circa  $30^\circ$  alla pulsazione di attraversamento  $\Omega_1 = 0.75$  rad/s

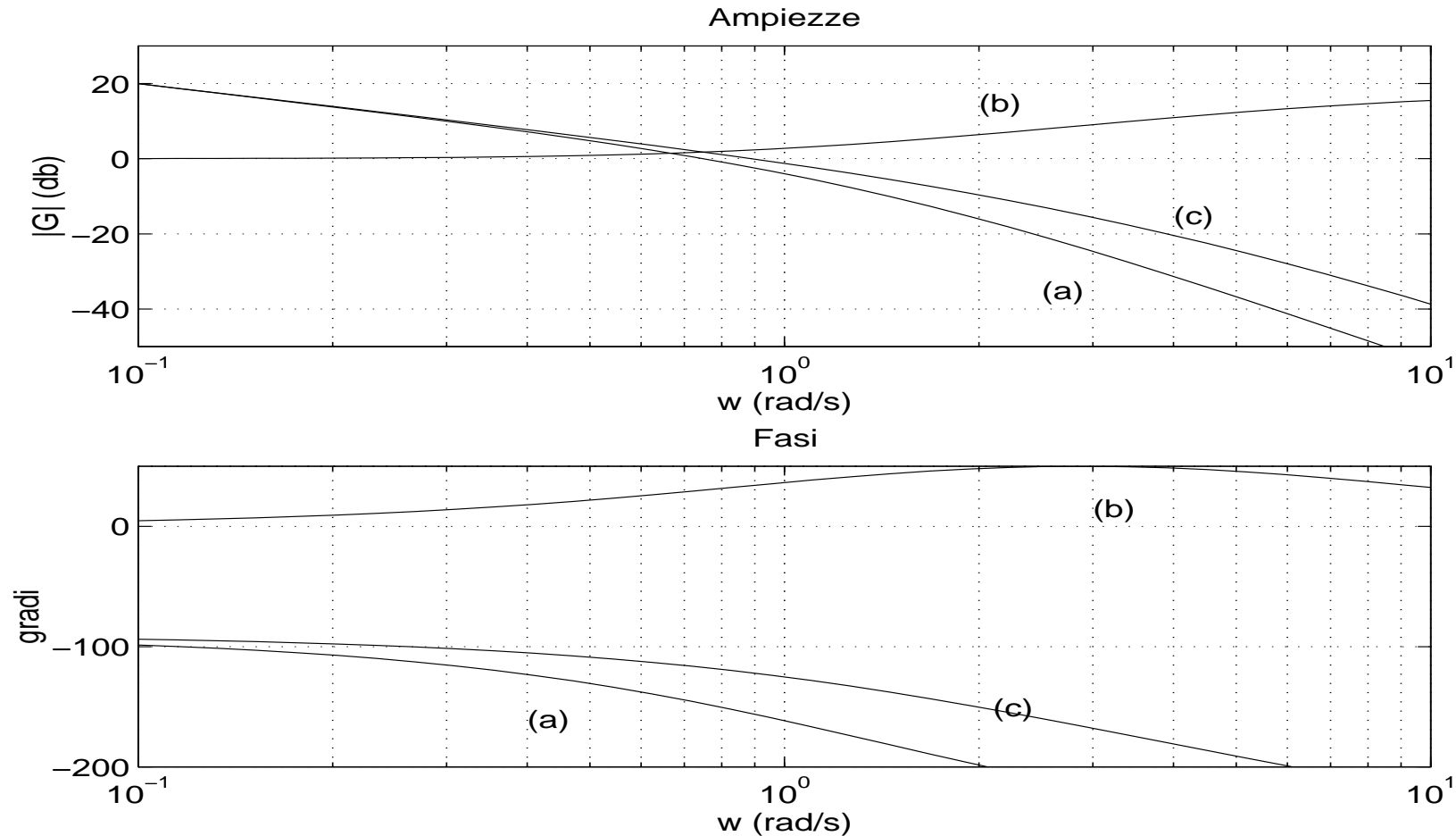
In un **primo tentativo**, si progetta una rete che introduce un anticipo (massimo)  $\Phi_m = 35^\circ$  ottenendo

$$\alpha = 0.271 \Rightarrow @\Omega^* \quad |G(j\Omega^*)| = \frac{\alpha}{2} = -17.36 \text{ db} = 2.16 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \tau_p = 0.241 \text{ s}, \quad \tau_0 = 0.8893 \text{ s}$$

Il margine di fase ottenuto per  $D(w)G(w)$  è pari a  $45^\circ$ , ancora insufficiente; anche variando il centraggio di  $\Omega_m$  (ad esempio portandolo a  $2\Omega^*$ ), non si riesce a rispettare la specifica di fase

# Esempio di progetto con rete anticipatrice nel piano $w$ (cont)

Diagrammi di Bode: (a)  $G(w)$ , (b)  $D(w)$  a progetto completato, con conseguente (c) funzione di anello  $D(w)G(w)$



## Esempio di progetto con rete anticipatrice nel piano $w$ (cont)

Si ricomincia con un **secondo tentativo**, utilizzando una rete anticipatrice “più forte” che fornisce un anticipo massimo pari a  $\Phi_m = 45^\circ$

Si ha

$$\alpha = 0.1715 \Rightarrow @\Omega^* \left| |G(j\Omega^*)| = \frac{\alpha}{2} = -21.33 \text{ db} = 2.61 \text{ rad/s} \Rightarrow \tau_p = 0.1587 \text{ s}, \tau_0 = 0.9252 \text{ s}$$

con un margine di fase complessivo di  $53^\circ$

Spostando leggermente il punto di lavoro della rete a  $\Omega_m = 2.2 \text{ rad/s}$  si ottiene infine

$$D(w) = \frac{1 + 1.0973 w}{1 + 0.1883 w}$$

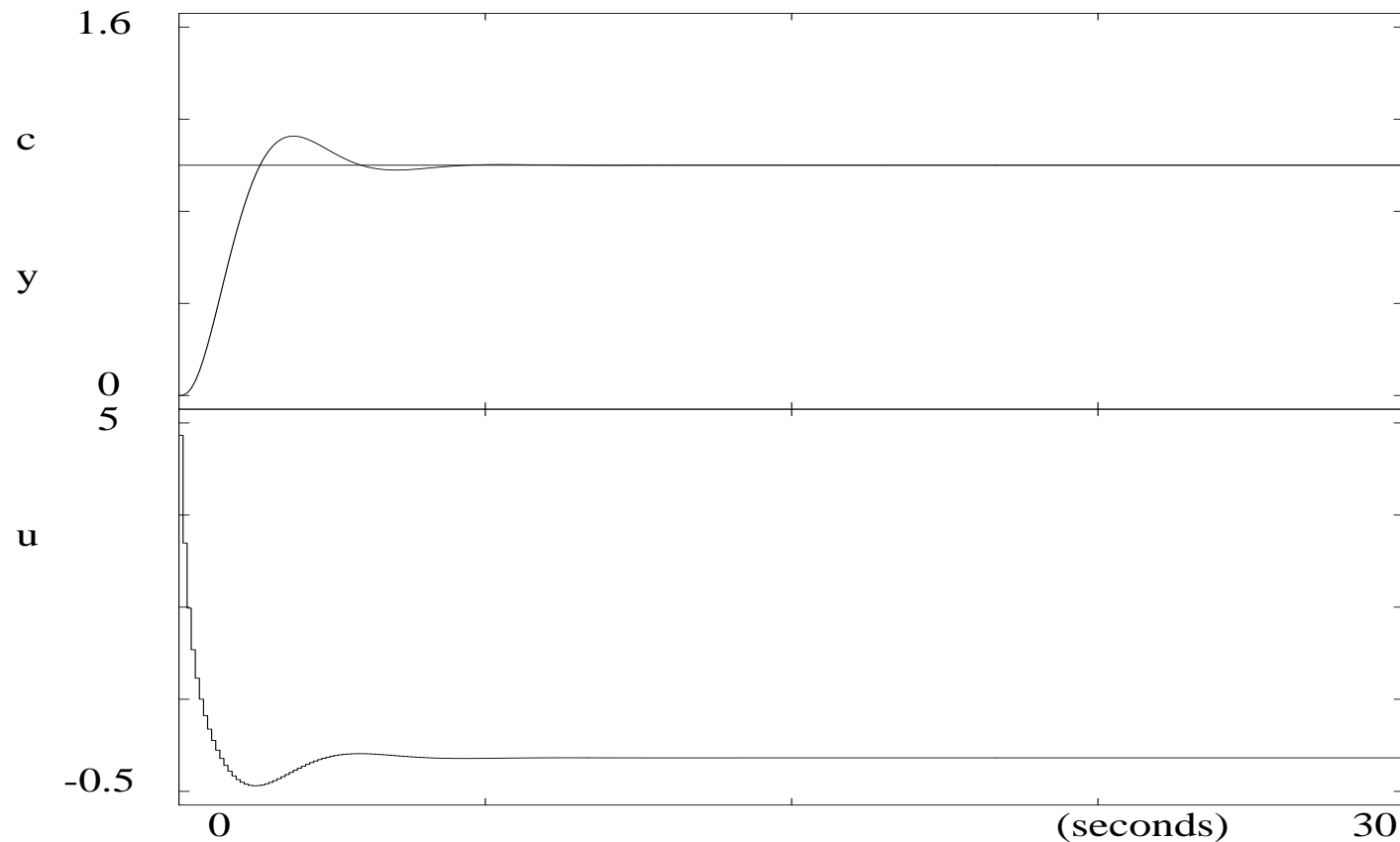
che fornisce il margine prescritto  $m_f = 55^\circ$

Antitrasformando la  $D(w)$  si ha pertanto

$$D(z) = 4.8146 \frac{z - 0.9129}{z - 0.5803}$$

## Esempio di progetto con rete anticipatrice nel piano $w$ (fine)

Risposta a gradino del processo in retroazione e relativa variabile di controllo



Da notare che la risposta è **più pronta** del caso di sintesi con rete attenuatrice, a spese di un **maggiore sforzo di controllo** (iniziale)

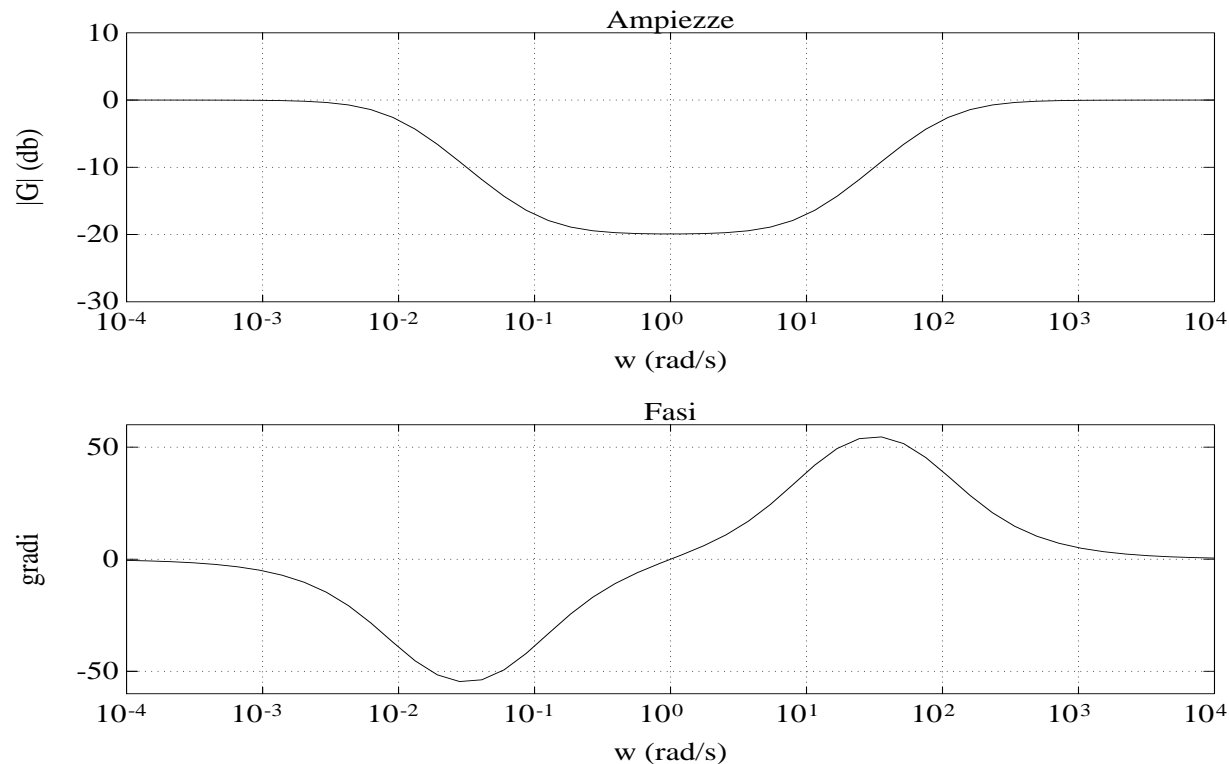
Inoltre, nel caso della rete anticipatrice **non** ci sono problemi numerici sulla precisione dei parametri del controllore digitale

## Rete a sella (attenuatrice-anticipatrice)

Rete con due zeri e due poli reali (**interagenti**, ossia attenuatrice e anticipatrice sufficientemente vicine)

$$D(w) = \frac{(1 + \tau_1 w)(1 + \tau_2 w)}{(1 + \alpha \tau_1 w)(1 + (\tau_2/\alpha)w)} \quad \alpha < 1$$

Per  $\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$  si ha sfasamento **nullo** e attenuazione  $|D(j\Omega_m)| = \frac{\tau_1 + \tau_2}{(\tau_2/\alpha + \alpha \tau_1)}$



qui con  $\tau_1 = 0.1$  s,  $\tau_2 = 10$  s,  $\alpha = 0.1$

Progetto con specifica sul **marginale di ampiezza**  $m_a$

1. Si individua la pulsazione  $\Omega^*$  alla quale il sistema presenta una fase di  $-\pi$ , e si pone

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = \Omega^*$$

2. Si impone che l'attenuazione introdotta dalla rete produca il margine di ampiezza  $m_a$  desiderato

$$|G(j\Omega^*)| \frac{\tau_1 + \tau_2}{(\tau_2/\alpha + \alpha\tau_1)} = \frac{1}{m_a}$$

3. Si ricavano i valori di  $\tau_1$  e  $\tau_2$  in funzione del terzo parametro  $\alpha$ , il quale è fissato in base ad ulteriori specifiche

Progetto con specifica sul margine di fase  $m_f$

1. Si cerca la pulsazione  $\Omega^+$  per la quale il sistema non compensato presenta il margine di fase desiderato  $m_f$
2. Si calcola l'attenuazione che occorre introdurre affinché  $\Omega^+$  diventi la pulsazione di attraversamento per il sistema compensato
3. Si impone quindi

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = \Omega^+$$
$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{(\tau_2/\alpha + \alpha\tau_1)} = \frac{1}{|G(j\Omega^+)|}$$

4. Il grado di libertà residuo viene fissato come prima sulla base di ulteriori specifiche

In entrambi i metodi progettuali, si pone

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = \Omega_m \quad \frac{\tau_1 + \tau_2}{(\tau_2/\alpha + \alpha\tau_1)} = k$$

e si ricavano

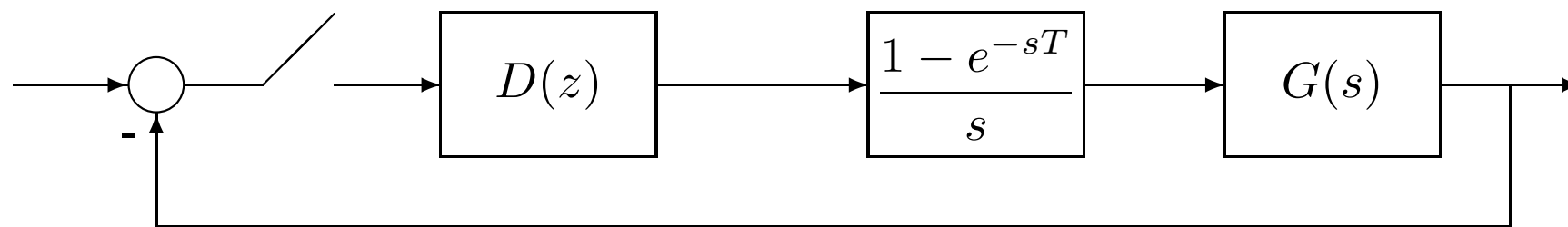
$$\tau_2 = \frac{1}{\Omega_m} \sqrt{\frac{\alpha - \alpha^2 k}{k - \alpha}} \quad \tau_1 = \frac{1}{\Omega_m^2 \tau_2}$$

in funzione del terzo parametro  $\alpha$

In genere, con l'uso di una rete a sella si ottiene un **compromesso** tra prontezza di risposta (elevata, tipica di una rete anticipatrice) e sforzo di controllo (ridotto, tipico di una rete attenuatrice)



## Esempio di progetto con rete a sella nel piano $w$



$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

Progettare una rete digitale a sella  $D(z)$  che garantisca al sistema in retroazione un margine di fase  $m_f = 55^\circ$ , avendo come primo posto  $T = 0.1$  s

Dalle

$$\Omega^+ = 0.41 \text{ rad/s} \quad \text{Arg}[G(j\Omega^+)] = -125^\circ \quad |G(j\Omega^+)| = 2.216 = 6.91 \text{ db}$$

si ottiene (con  $\alpha = 0.1$ )

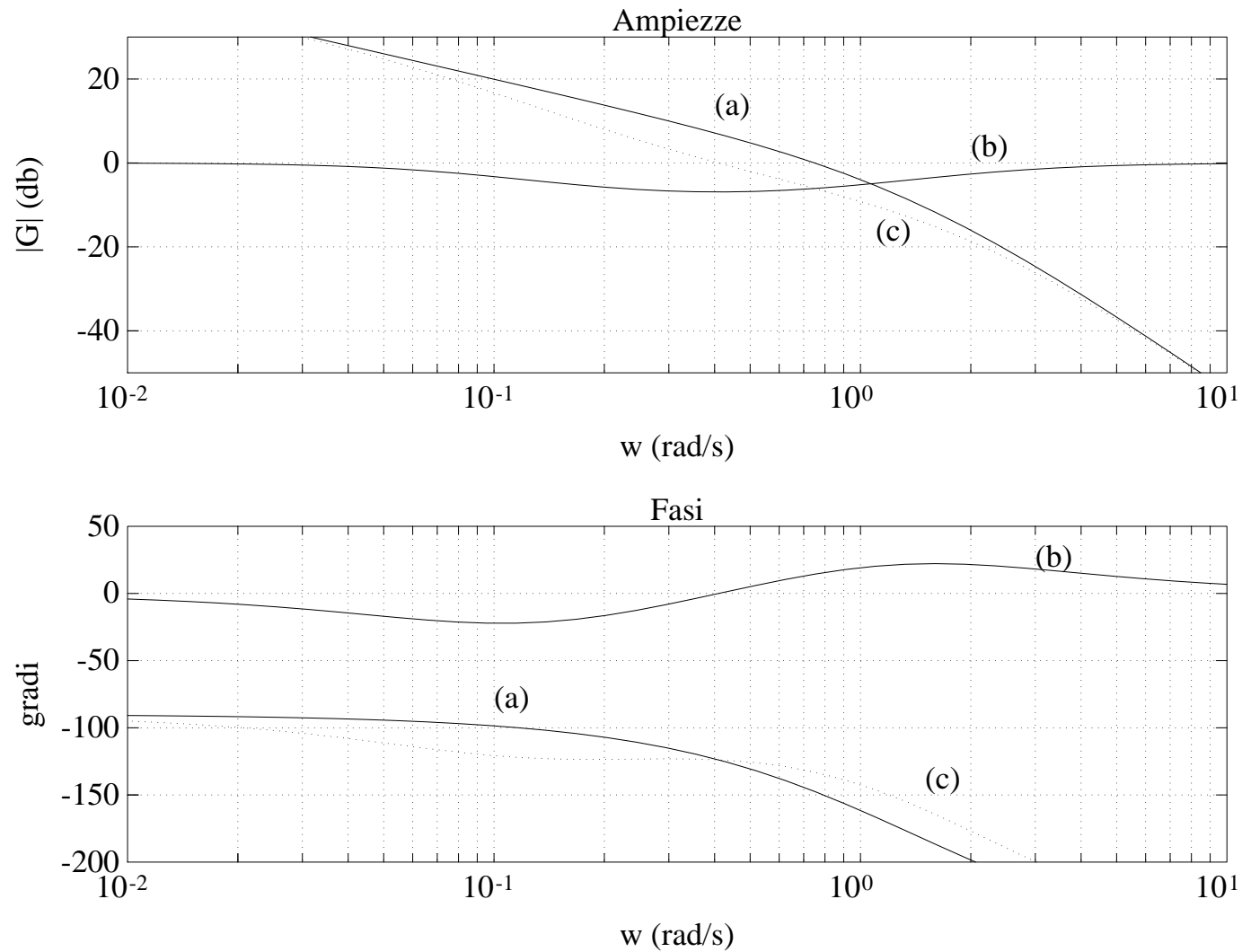
$$D(w) = \frac{(1 + 4.6779 w)(1 + 1.27167 w)}{(1 + 0.46779 w)(1 + 12.7167 w)}$$

e mediante la trasformazione bilineare

$$D(z) = 0.94527 \frac{(z - 0.97884)(z - 0.92433)}{(z - 0.80687)(z - 0.99216)}$$

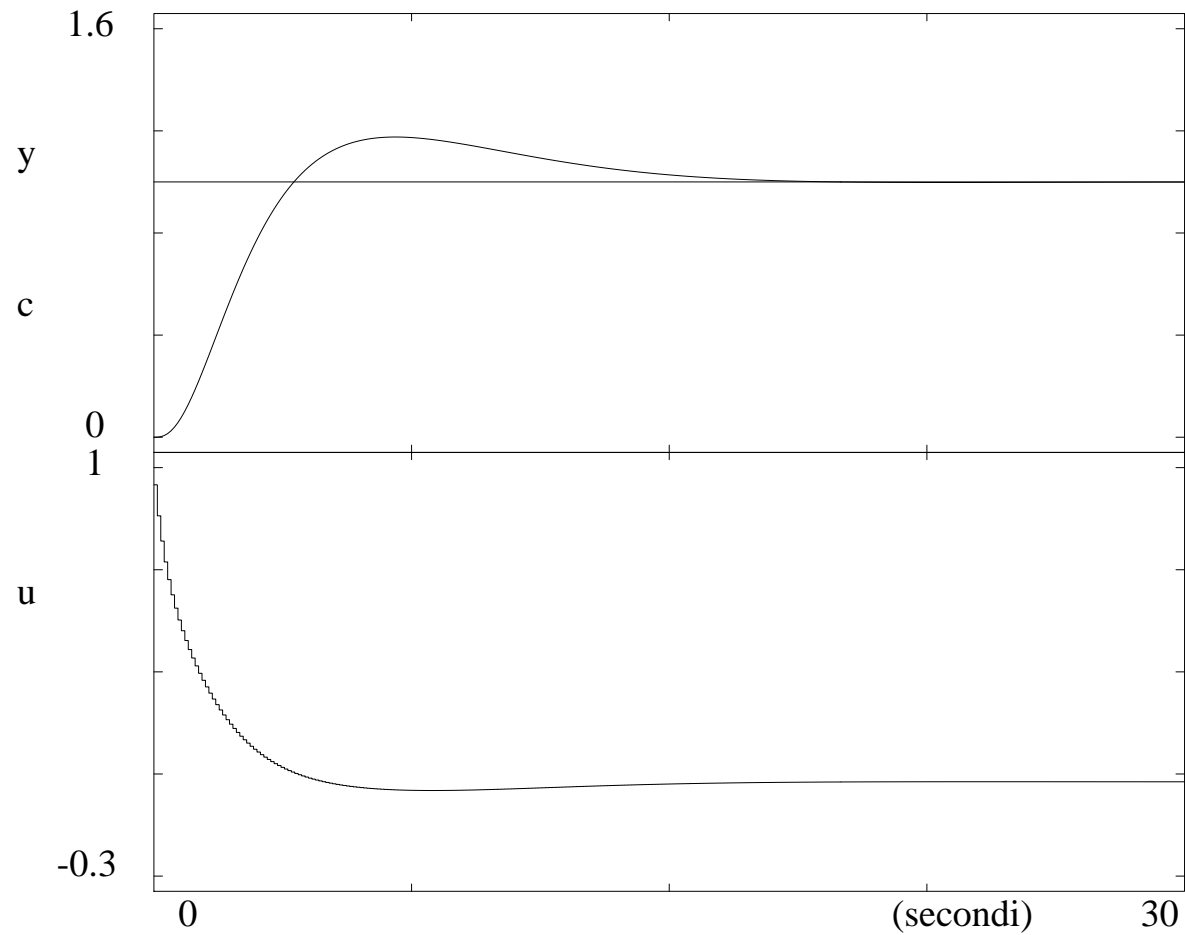
# Esempio di progetto con rete a sella nel piano $w$ (cont)

Diagrammi di Bode: (a)  $G(w)$ , (b)  $D(w)$ , (c) funzione di anello  $D(w)G(w)$



## Esempio di progetto con rete a sella nel piano $w$ (cont)

Risposta a gradino del processo in retroazione e relativa variabile di controllo



## Esempio di progetto con rete a sella nel piano $w$ (fine)

Confronto delle risposte al gradino con la rete di correzione attenuatrice, anticipatrice o a sella, e relative variabili di controllo

