SISTEMI DIGITALI DI CONTROLLO

Prof. Alessandro De Luca

DIS, Università di Roma “La Sapienza”

deluca@dis.uniroma1.it

Lucidi tratti dal libro

C. Bonivento, C. Melchiorri, R. Zanasi: “Sistemi di Controllo Digitale”

Capitolo 9: Progetto mediante luogo delle radici

Si ringraziano gli autori

Progetto basato sul luogo delle radici

Studio parametrico della equazione caratteristica del sistema in anello chiuso

$$1 + k\,G_0(z) = 0$$

dove il parametro di interesse k (che può rappresentare il guadagno o altro) si fa variare tra 0 e $+\infty$ (luogo positivo) o tra $-\infty$ e 0 (luogo negativo)

Nel caso di retroazione unitaria, la catena diretta è costituita dal prodotto del controllore digitale $D(z) = kA_D(z)/B_D(z)$ (i cui poli e zeri vanno progettati) e dal processo (con un organo di tenuta) discretizzato $HG(z) = A_{HG}(z)/B_{HG}(z)$, dove A_{-} e B_{-} sono polinomi con potenze positive di z

Si ha allora

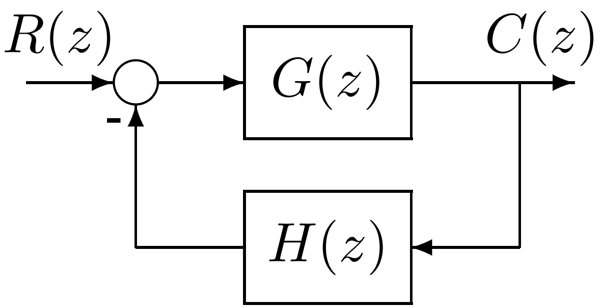
$$G_0(z) = \frac{A_D(z)}{B_D(z)}\frac{A_{HG}(z)}{B_{HG}(z)} \;\Rightarrow\; 1 + k\,G_0(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; B_D(z)B_{HG}(z) + kA_D(z)A_{HG}(z) = 0$$

e il luogo delle radici si ottiene al variare di k

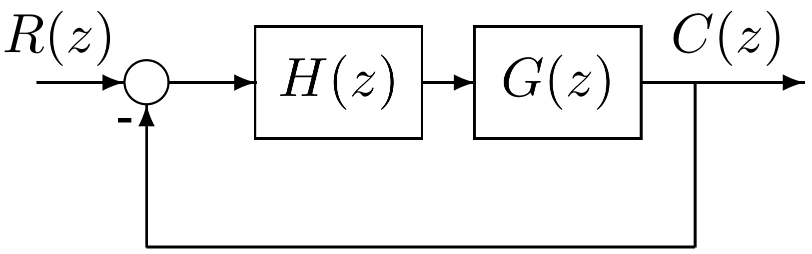
Quando è possibile evidenziare nella stessa forma moltiplicativa un altro parametro variabile di interesse, come la costante di tempo di un polo o la posizione di uno zero reale, si parla più propriamente di contorno delle radici

Effetti di cancellazioni ammissibili

Consideriamo una cancellazione polo/zero ammissibile (interna al cerchio unitario) nell'anello di controllo e il suo effetto sul luogo delle radici



(a)



(b)

$$G(z) = \frac{G_1(z)}{z+a} \qquad H(z) = (z+a)H_1(z)$$

In (a): $G_0(z) = G(z)H(z) = G_1(z)H_1(z)$, sebbene sia

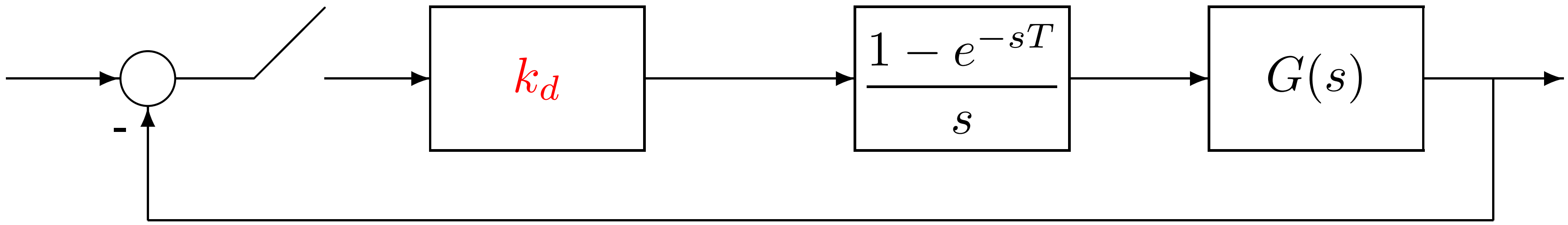
$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)}{(z+a)[1+G_1(z)H_1(z)]}$$

In (b): $G_0(z) = G_1(z)H_1(z)$, ma ora anche

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)H_1(z)}{[1+G_1(z)H_1(z)]}$$

Esempio di uso del luogo delle radici – 1

Analisi del margine di guadagno per la stabilità al variare del passo di campionamento



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \qquad \text{per } T = 1, 2, 4 \text{ s}$$

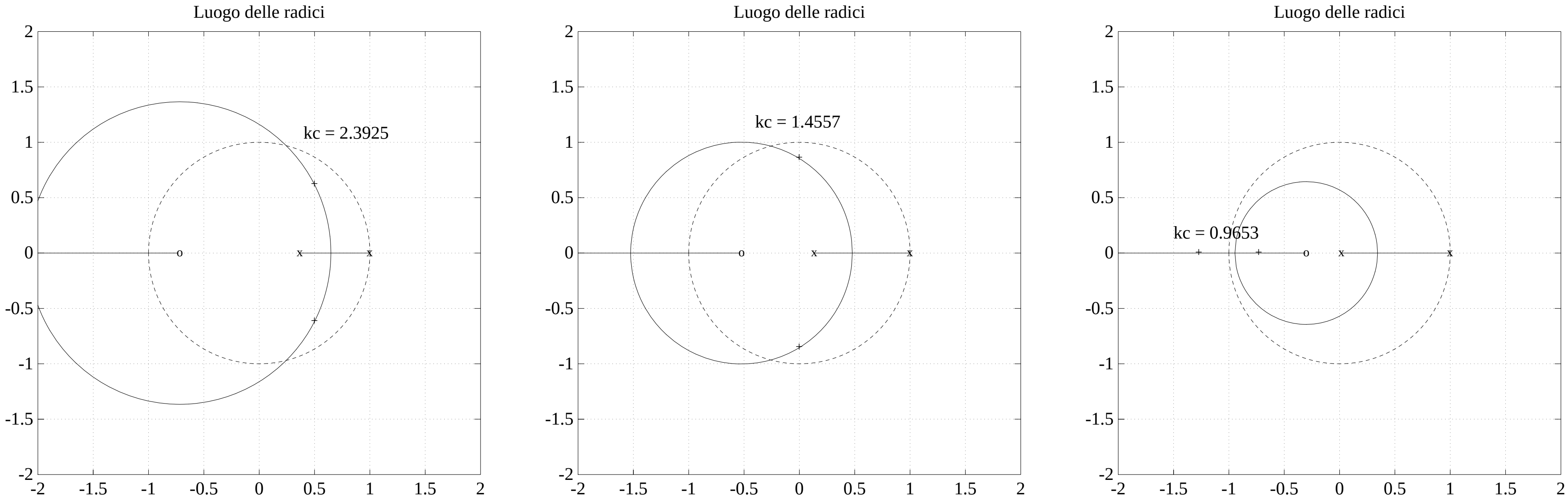
Tenendo conto dell'organo di tenuta $H_0(s)$, dalle tabelle si ha in modo parametrico rispetto a k_d e T

$$H_0G(z) = k_d \frac{(T - 1 + e^{-T})z + (1 - e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} = k_d(T - 1 + e^{-T}) \frac{z + \frac{1-e^{-T}-Te^{-T}}{T-1+e^{-T}}}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

e si può porre $k = k_d\,(T - 1 + e^{-T}) \geq 0$

Esempio di uso del luogo delle radici – 2

$T = 1$ s	$T = 2$ s	$T = 4$ s
$\dfrac{k_d\,0.3679(z+0.7181)}{(z-1)(z-0.3679)}$	$\dfrac{k_d\,1.1353(z+0.5232)}{(z-1)(z-0.1353)}$	$\dfrac{k_d\,3.0183(z+0.3010)}{(z-1)(z-0.0183)}$



(a) T = 1 s (b) T = 2 s (c) T = 4 s

All'aumentare del periodo di campionamento, il valore critico $k_c > 0$ di k_d diminuisce

Primo esempio di progetto mediante luogo delle radici – 1

Per il processo

$$G(s) = \frac{0.1}{s(s+0.1)}$$

si vuole progettare un controllore digitale con $T = 1$ s. Tenendo conto dello ZOH, si ha

$$H_0G(z) = 0.0484\,\frac{z+0.9672}{(z-1)(z-0.9048)}$$

Le specifiche di progetto per il sistema in catena chiusa sono

$$S\% \leq 16 \qquad T_a(5\%) \leq 6 \text{ s} \qquad \text{errore r.p. a rampa unitaria} \leq 1 \;\Rightarrow\; k_v \geq 1$$

Assumendo inizialmente $D(z) = k$, l'equazione caratteristica diventa

$$1 + 0.0484\,k\,\frac{z+0.9672}{(z-1)(z-0.9048)} = 0$$

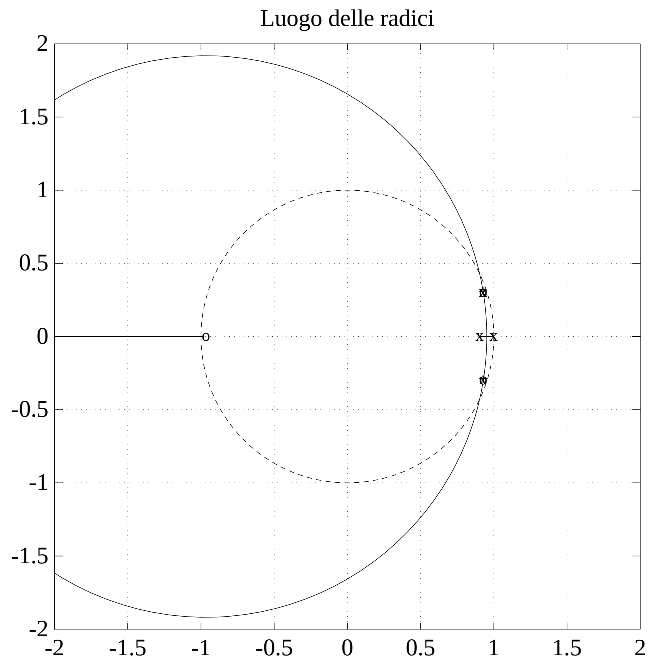
con $G_0(z) = H_0G(z)$

Primo esempio di progetto mediante luogo delle radici – 2

La specifica a regime permanente

$$k_v = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)k\, H_0 G(z)}{Tz} = k\, 0.0484\, \frac{1+0.9672}{1-0.9048} = k \geq 1$$

è soddisfatta al minimo con $k = 1$ e impone i poli ad anello chiuso in $z = 0.9282 \pm j0.3$.



Inoltre $k < k_c = 2$ per la stabilità

Primo esempio di progetto mediante luogo delle radici – 3

Nel caso tempo continuo, le specifiche su $S\%$ e $T_a(5\%)$ implicano un coefficiente di smorzamento e una pulsazione naturale per la coppia di poli dominanti del sistema a anello chiuso pari a $\delta = 0.5$, e $\omega_n = 1$ rad/s, ossia poli in

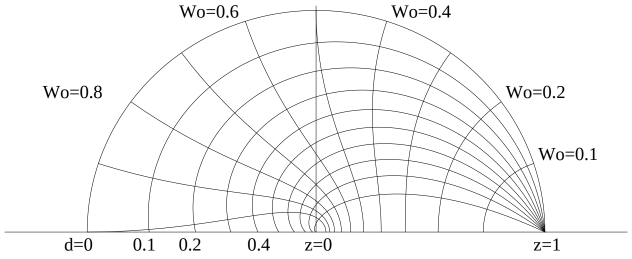
$$s = -0.5 \pm j0.867$$

Nel caso tempo discreto, effettuando la trasformazione $z = e^{sT}$, questi corrispondono a

$$z = 0.393 \pm j0.462$$

Nel piano z, il posizionamento dei poli del sistema in retroazione devono quindi essere

- interno al cerchio di raggio $r = e^{-\delta\omega_n} = 0.6065$
- entro la zona delimitata dal luogo a spirale logaritmica per $\delta = 0.5$



Con la scelta di un controllore istantaneo avente $k = 1$, o comunque al massimo < 2, non possono essere soddisfatte le specifiche sul transitorio (né su $S\%$ né su T_a)

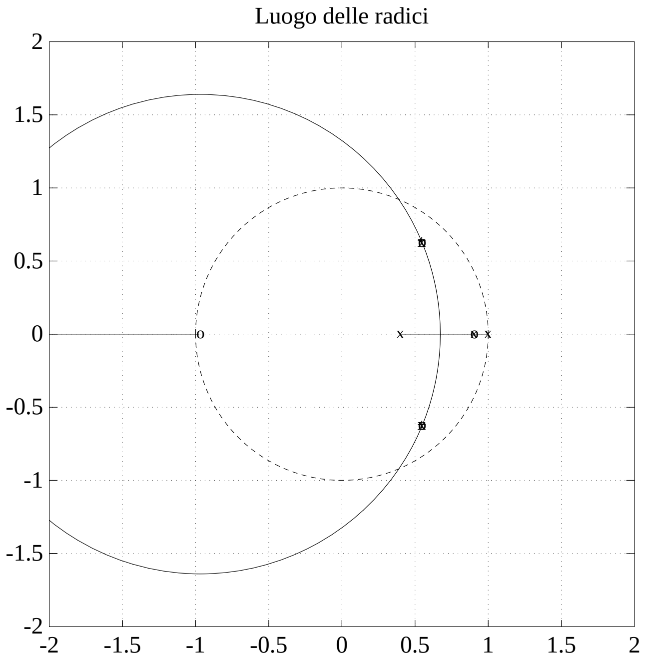
Primo esempio di progetto mediante luogo delle radici – 4

Si introduce allora un regolatore dinamico $D(z) = k\,\frac{z-z_0}{z-z_p}$

Primo tentativo: z_0 cancella il polo $z = 0.9048$ del processo e si fissa z_p del regolatore a sinistra, ad esempio in $z_p = 0.4$ (il punto singolare è circa a metà tra z_p e 1). Dalla

$$k_v = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)k\frac{z-z_0}{z-z_p}H_0G(z)}{Tz} = 0.0484\,\frac{1+0.9672}{1-0.4}\,k = 0.1586\,k \geq 1$$

si pone al minimo $k = 6.3$, con i poli posizionati quindi in $z = 0.5476 \pm j0.6284$

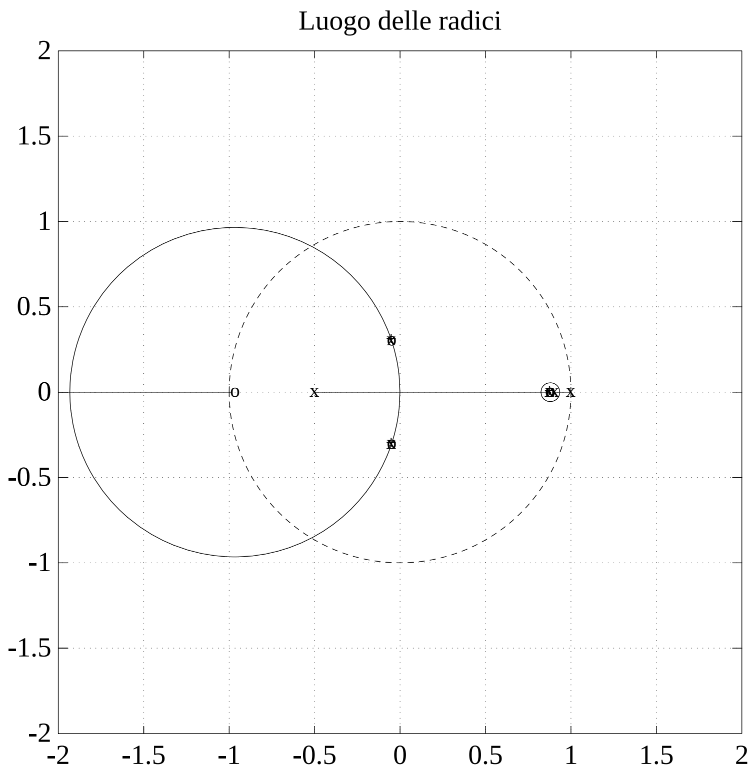


(a)

Ne risulta $\delta = 0.21$ e quindi non è ancora soddisfatta la specifica sul transitorio

Primo esempio di progetto mediante luogo delle radici – 5

Secondo tentativo: si trasla lo zero in $z_0 = 0.88$ (subito a sinistra del polo in $z = 0.9048$) in modo da attrarre i rami del luogo più all'interno del cerchio unitario, e si pone il polo in $z_p = -0.5$. Il valore minimo di k che soddisfa la specifica $k_v \geq 1$ è $k = 13$, per cui i poli ad anello chiuso sono in $z = -0.04986 \pm j0.3035$ (poli dominanti) e $z = 0.8757$

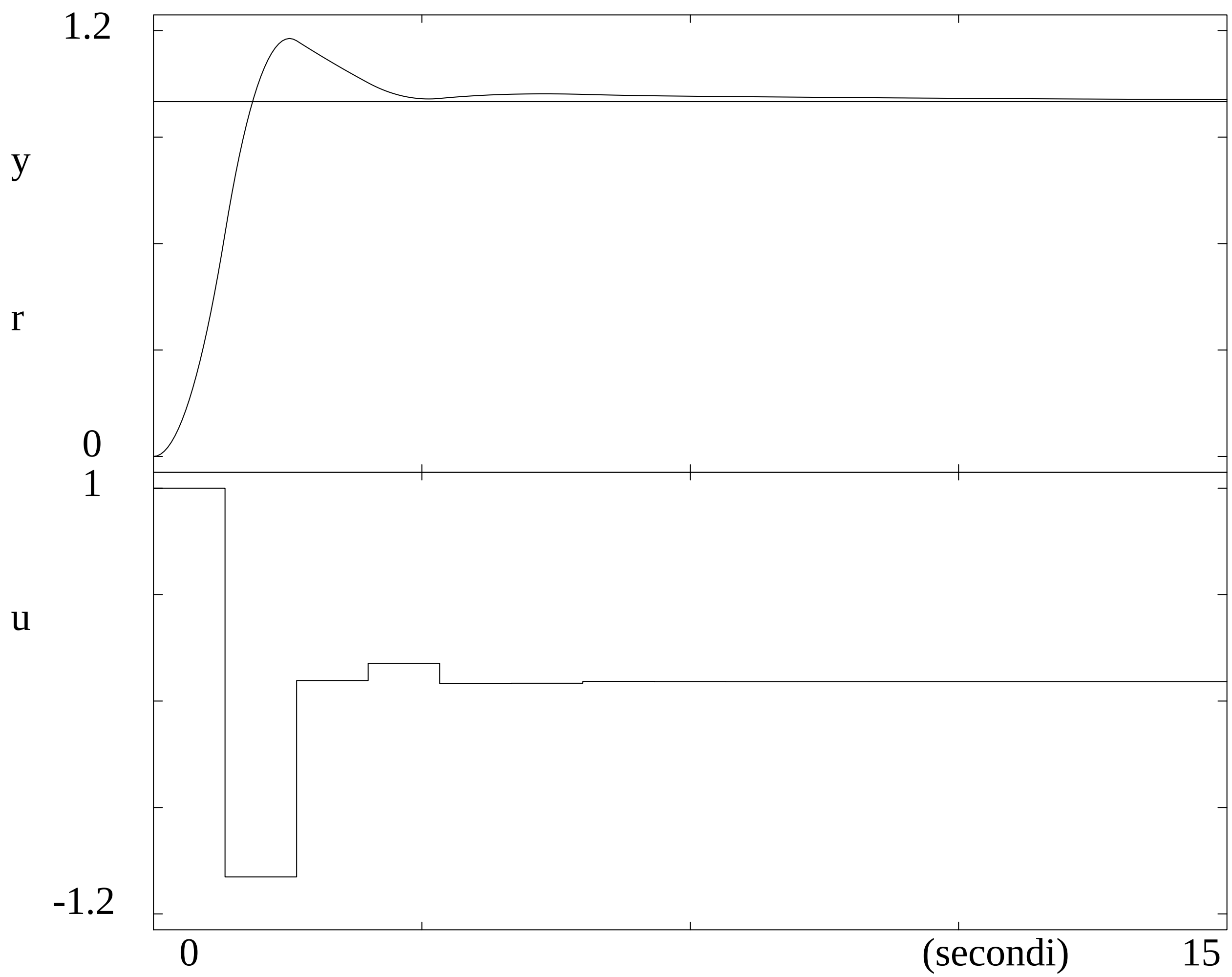


(b)

Regolatore finale: $D(z) = 13\,\dfrac{z - 0.88}{z + 0.5}$

Primo esempio di progetto mediante luogo delle radici – 6

Verifica in simulazione delle specifiche sul transitorio nella risposta indiciale e relativo controllo



Secondo esempio di progetto mediante luogo delle radici – 1

Per il processo con ritardo finito

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$$

si vuole progettare un controllore digitale con $T = 1$ s. Tenendo conto dello ZOH, si ha

$$G(z) = (1 - z^{-1})z^{-2}\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{0.6321}{z^2(z - 0.3679)}$$

Si vuole progettare un regolatore PI (a struttura fissa)

$$D(z) = k_P + k_I\,\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

tale che:

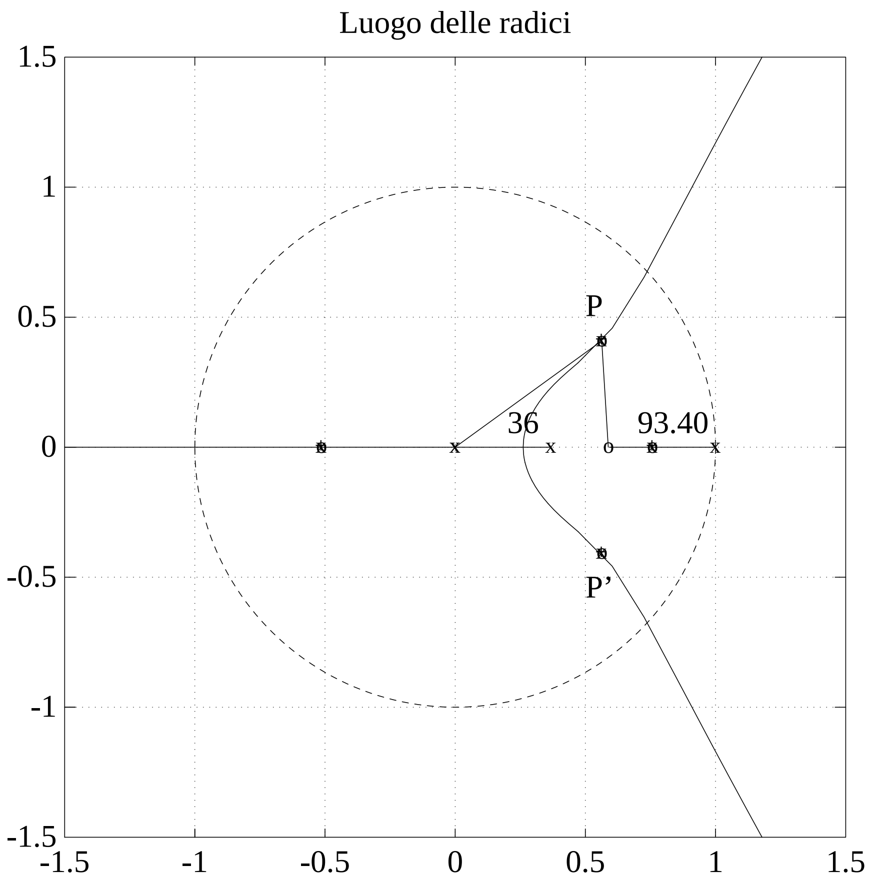
- i poli dominanti ad anello chiuso abbiano smorzamento $\delta = 0.5$
- il numero di campioni per periodo della relativa oscillazione smorzata sia 10 (luoghi a $z = e^{j\omega_n T}$ costante)

La funzione di trasferimento in catena aperta si può riscrivere come

$$D(z)H_0G(z) = \frac{k(z - z_0)}{z - 1}\,\frac{0.6321}{z^2(z - 0.3679)} \qquad k = k_P + k_I \quad z_0 = \frac{k_P}{k_P + k_I}$$

Secondo esempio di progetto mediante luogo delle radici – 2

La coppia di poli deve trovarsi: a) sulle semirette $\pm 360°/10 = \pm 36°$; b) sulla spirale logaritmica $\delta = 0.5$



Le condizioni individuano la posizione P e P' dei poli in

$$z = 0.5629 \pm j0.4090$$

Secondo esempio di progetto mediante luogo delle radici – 3

La posizione dello zero $z = z_0$ è determinata dalla condizione sulle fasi (per l'appartenenza al luogo positivo) a partire dai 4 poli e dal singolo zero ad anello aperto

$$\sum Arg(z - z_i) - \sum Arg(z - p_j) = -\pi \;(\text{mod } 2\pi) \quad \Rightarrow \quad \alpha - 2 \cdot (36^\circ) - 137^\circ - 64.6^\circ = -180^\circ$$

da cui

$$\alpha = 93.4^\circ$$

e quindi lo zero z_0 si porrà in

$$z_0 = \frac{k_P}{k_P + k_I} = 0.588$$

Dalla condizione sui moduli $k|D(z)H_0G(z)|_{z=P} = 1$ si ha d'altronde

$$k = k_P + k_I = 0.507$$

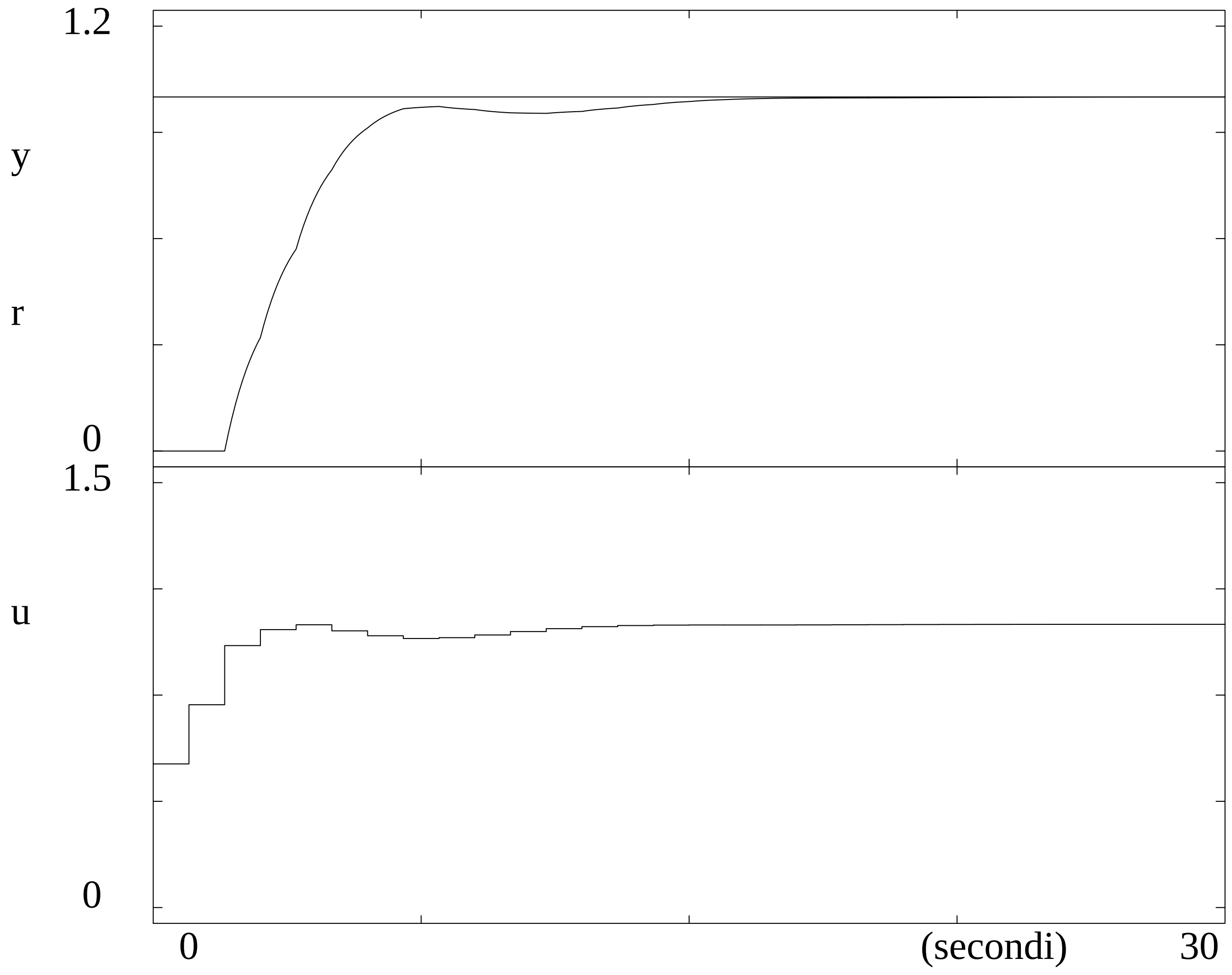
da cui i parametri del regolatore sono quindi ottenuti come

$$k_P = 0.2982 \quad k_I = 0.2088 \quad \Rightarrow \quad D(z) = 0.507\,\frac{z - 0.588}{z - 1}$$

Il terzo e quarto polo in catena chiusa, per le condizioni di progetto adottate, si ritrovano posizionati in $z = -0.5142$ e $z = 0.7571$

Secondo esempio di progetto mediante luogo delle radici – 4

Verifica in simulazione della risposta indiciale e del relativo controllo



Terzo esempio di progetto mediante luogo delle radici – 1

Per il processo

$$G(s) = \frac{1}{1+10s}$$

si vuole progettare un controllore digitale, con organo di tenuta ZOH, con le seguenti specifiche:

- errore a regime nullo per ingressi constanti
- poli ad anello chiuso con smorzamento $\delta \geq 0.7$ e modulo $|z| \leq 0.5$

Si pone $T = 5$ s e si ha

$$H_0G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{0.1}{s(s+0.1)}\right] = \frac{0.4}{z-0.6}$$

Per la specifica a regime (sistema di tipo 1), una prima scelta del controllore è

$$D(z) = \frac{k_d}{z-1}$$

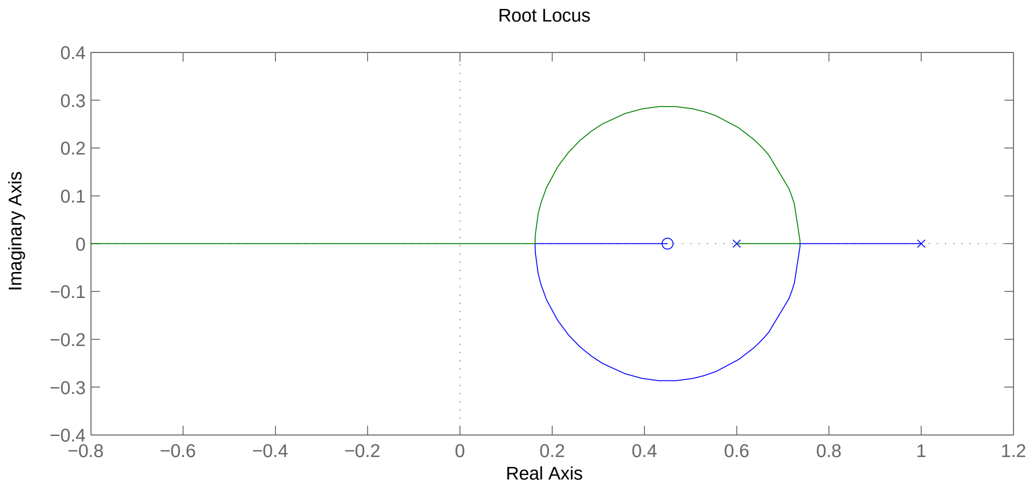
ma dal luogo delle radici si vede che i due rami non entrano mai nella zona desiderata del piano z (con $k_d < k_c = 1$ per la stabilità $\leftarrow$ Jury o trasformazione bilineare + Routh o condizione sui moduli del luogo)

Terzo esempio di progetto mediante luogo delle radici – 2

Si può allora aggiungere uno zero nel controllore (senza perdita di realizzabilità!)

$$D(z) = k_d \, \frac{z - z_0}{z - 1}$$

e studiare (anche analiticamente) il luogo al variare di z_0 reale. Si sceglie allora lo zero a sinistra di $z = 0.6$, ad esempio in $z_0 = 0.45$

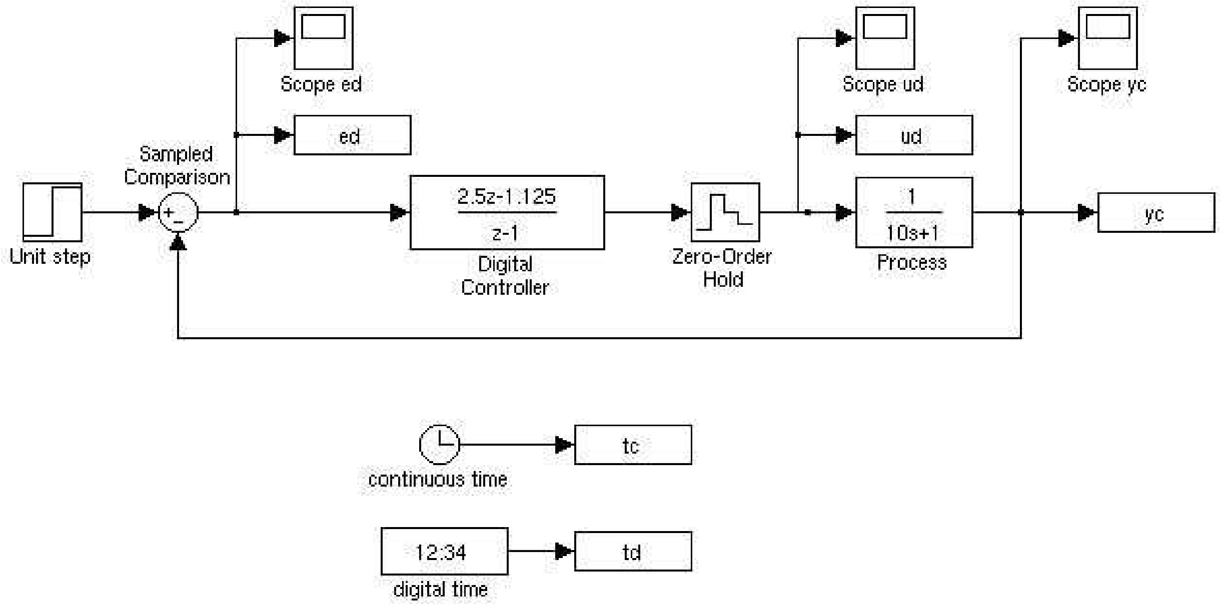


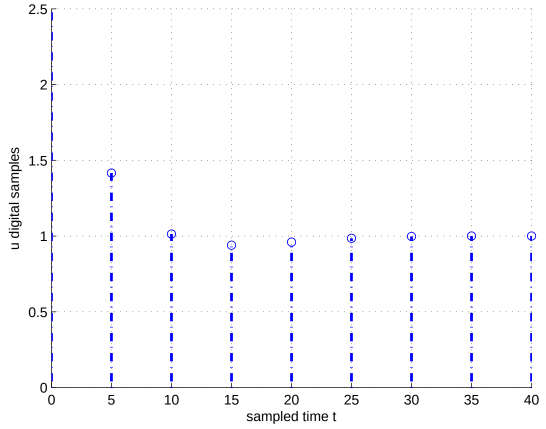
la circonferenza del luogo positivo è centrata in z_0 e ha raggio pari a $\sqrt{|1 - z_0| \cdot |0.6 - z_0|}$

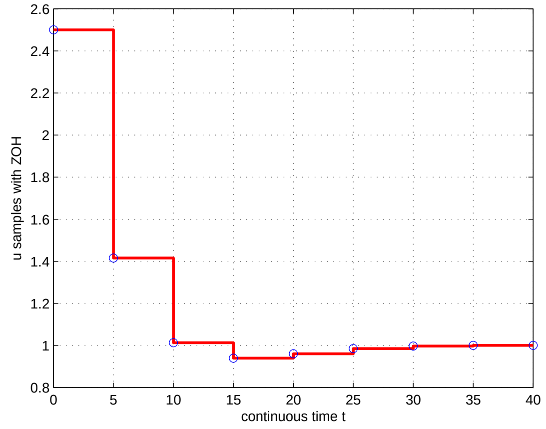
La seconda specifica è soddisfatta con $k_d = 2.5$

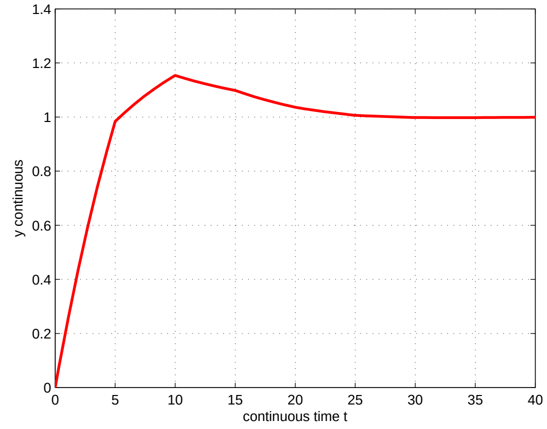
$$D(z) = 2.5 \, \frac{z - 0.45}{z - 1} \qquad \Rightarrow \qquad W(z) = \frac{z - 0.45}{(z - 0.6)(z - 1) + (z - 0.45)}$$

Terzo esempio di progetto mediante luogo delle radici – 3









campioni di controllo | uscita dello ZOH | uscita continua del processo