Prova Scritta di Sistemi Digitali di Controllo

15 Giugno 2010

Esercizio 1

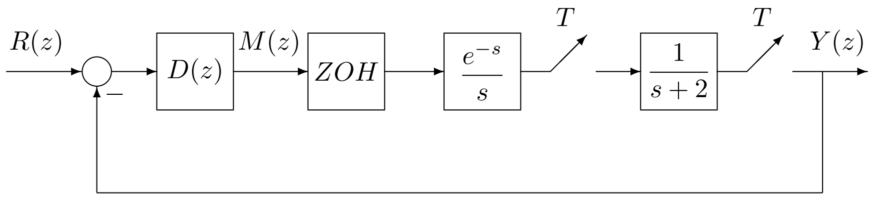

Figura 1: Sistema di controllo digitale

Si consideri il sistema di controllo in Fig. 1, dove $D(z)$ è un controllore digitale e il processo presenta un ritardo finito $\tau = 1$ s e due campionamenti sincroni sulle sue variabili. Avendo scelto un tempo di campionamento pari a $T = 0.5$ s, si progetti $D(z)$ in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

a) il sistema ad anello chiuso sia asintoticamente stabile;

b) l'errore a regime permanente in risposta a un gradino campionato sia nullo;

c) l'ordine del controllore (ossia, il grado del denominatore di $D(z)$) sia il minimo possibile.

[90 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzione

15 Giugno 2010

La funzione di trasferimento campionata del processo è ottenuta ponendo in cascata i due blocchi campionati, in cui il primo tiene conto dell'organo di tenuta $H_0(s)$ e del ritardo finito pari a due passi di campionamento ($\tau = 2T = 1$):

$$G_1(z) = \mathcal{Z}\left[H_0(s)\,\frac{e^{-2Ts}}{s}\right] = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[\frac{e^{-2Ts}}{s^2}\right] = \frac{z-1}{z}\,\frac{1}{z^2}\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{z-1}{z^3}\,\frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{0.5}{z^2(z-1)}$$

$$G_2(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+2}\right] = \frac{z}{z-e^{-2T}} = \frac{z}{z-e^{-1}} = \frac{z}{z-0.3678}$$

$$G(z) = G_1(z)G_2(z) = \frac{0.5}{z(z-1)(z-0.3678)}.$$

Il processo ha un'azione integrale ed il sistema di controllo è quindi di tipo 1 (specifica b)). Tenendo conto della specifica c), si sceglie

$$D(z) = k \tag{1}$$

e si verifica se esiste un intervallo di valori per k che garantisca la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso (specifica a)). La funzione di trasferimento ad anello chiuso è

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{kG(z)}{1+kG(z)} = \frac{0.5k}{z(z-1)(z-0.3678)+0.5k}.$$

Posto $k' = 0.5k$, lo studio della stabilità si può fare qualitativamente tracciando il luogo delle radici per

$$z(z-1)(z-0.3678) + k' = 0. \tag{2}$$

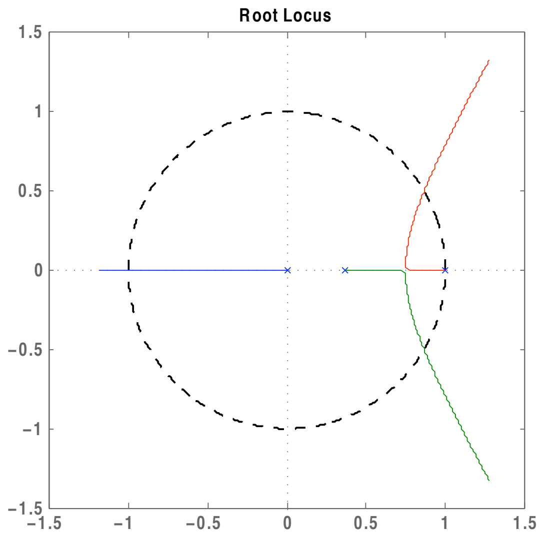

Figura 2: Luogo delle radici per $k' \in [0, 4]$

Dal luogo in Fig. 2 si verifica quindi l'esistenza di un intervallo di valori positivi $(0, k'_{\max})$ di stabilità asintotica. La scelta (1) è pertanto sufficiente (controllore di ordine 0, ossia istantaneo o statico). Per trovare il valore limite $k'_{\max}$ si applica alla (2) uno dei criteri di stabilità.

Procedendo con il criterio di Jury, si riscrive la (2) in forma polinomiale espansa

$$P(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = z^3 - 1.3678z^2 + 0.3678z + k' = 0.$$

Le prime tre condizioni si scrivono direttamente a partire dai coefficienti di $P(z)$ e sono:

1. $|a_3| < a_0 \quad \rightarrow \quad |k'| < 1$;
2. $P(z)|_{z=1} > 0 \quad \rightarrow \quad |k'| > 0$;
3. $P(z)|_{z=-1} < 0$ ($n = 3$ negativo) $\quad \rightarrow \quad |k'| < 2.7356$.

L'ultima condizione è ricavata dalla tabella (che ha $2n - 3 = 3$ righe):

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	$a_3 = k'$	$a_2 = 0.3678$	$a_1 = -1.3678$	$a_0 = 1$
2	$a_0 = 1$	$a_1 = -1.3678$	$a_2 = 0.3678$	$a_3 = k'$
3	b_2	b_1	b_0	

dove serve calcolare solo

$$b_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_0 \\ a_0 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k' & 1 \\ 1 & k' \end{vmatrix} = k'^2 - 1$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k' & 0.3678 \\ 1 & -1.3678 \end{vmatrix} = -1.3678k' - 0.3678.$$

La condizione rimanente,

4. $|b_2| > |b_0| \quad \rightarrow \quad |k'^2 - 1| > |-1.3678k' - 0.3678|$,

tenendo conto delle condizioni 1. e 2., si riscrive come

$$1 - k'^2 > 1.3678k' + 0.3678 \quad \rightarrow \quad k'^2 + 1.3678k' - 0.6322 < 0.$$

Le due radici della associata equazione del secondo ordine sono $k'_1 = -1.7327$ e $k'_2 = 0.3649$, e la disequazione è soddisfatta nell'intervallo compreso tra esse. Il valore limite per la stabilità è quindi $k'_{\max} = 0.3649$.

Pertanto, la classe di controllori istantanei che risolve il problema è

$$D(z) = k \qquad \text{con } k \in (0, 0.7298).$$

E' chiaro che valor troppo piccoli di k in questo intervallo forniscono un transitorio monotóno nella risposta al gradino, ma eccessivamente lento. Viceversa, valori prossimi al limite superiore rendono il comportamento fortemente oscillatorio. Una scelta intermedia, in prossimità del punto singolare del luogo in Fig. 2, dovrebbe risultare appropriata in quanto i tre poli ad anello chiuso sono più interni al cerchio unitario. Nei grafici di Fig. 3 sono riportate le risposte indiciali del sistema $W(z)$ ad anello chiuso (simulazione a tempo discreto ottenuta con Matlab) per i tre valori $k = 0.05$, $k = 0.35$ e $k = 0.65$, relativamente ai primi 60 campioni in uscita (30 s). Come previsto, nel secondo caso si ottiene un buon comportamento complessivo.

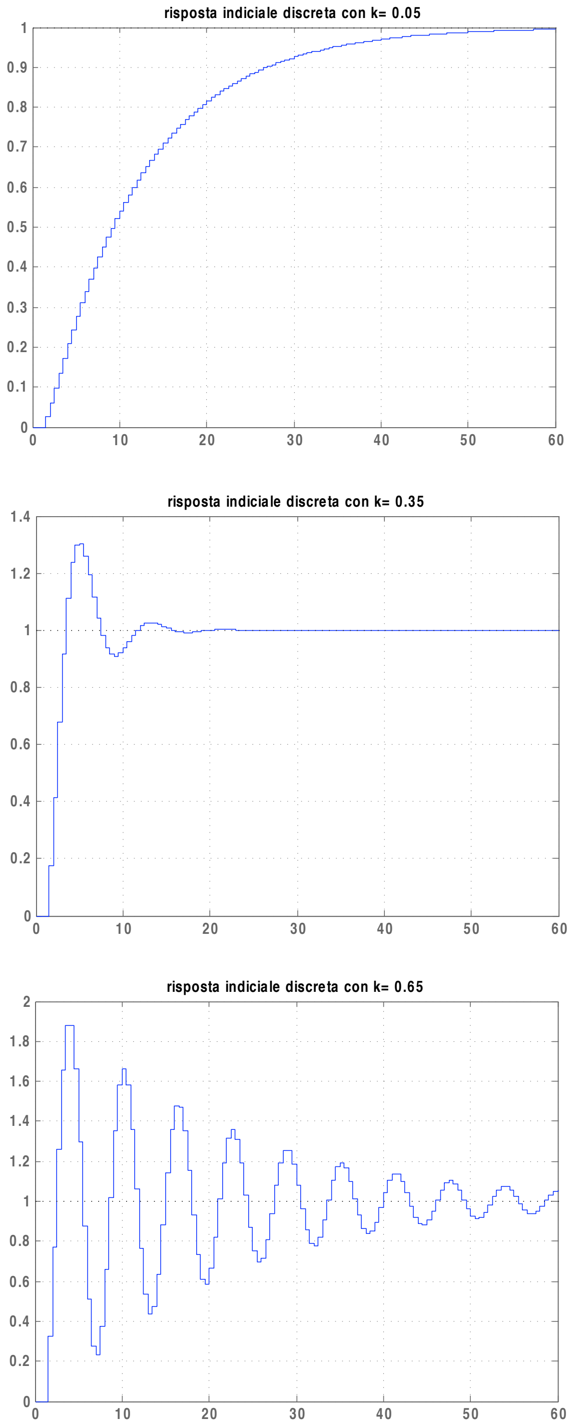

Figura 3: Risposte indiciali del sistema discreto ad anello chiuso per $k = 0.05$, $k = 0.35$ e $k = 0.65$

$* * * * *$