Prova Scritta di Sistemi Digitali di Controllo

7 Luglio 2010

Si consideri lo schema di controllo a tempo discreto con retroazione non unitaria della Fig. 1, dove

$$G_p(z) = \frac{(1 - 3z^{-1})z^{-1}}{1 + 2.5z^{-1} + z^{-2}}.$$

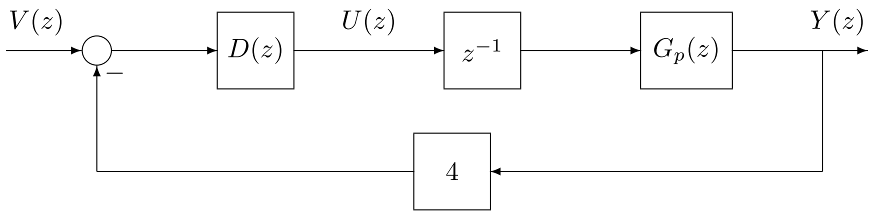

Figura 1: Sistema di controllo digitale

Progettare un controllore digitale $D(z)$ che fornisca un'uscita $Y(z)$ unitaria a partire da un campione di indice ℓ minimo, in risposta ad un ingresso per l'anello di controllo $V(z)$ a gradino e di ampiezza opportuna. Fornire l'espressione dei campioni della legge di controllo risultante $u(k)$ in termini di equazione ricorsiva alle differenze.

[90 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzione

7 Luglio 2010

E' conveniente anzitutto riscrivere la funzione di trasferimento del processo in termini di potenze positive di z. Moltiplicando numeratore e denominatore per z^2 si ha

$$G_p(z) = \frac{(1-3z^{-1})z^{-1}}{1+2.5z^{-1}+z^{-2}} = \frac{z-3}{z^2+2.5z+1} = \frac{z-3}{(z+0.5)(z+2)},$$

dove si è messa in evidenza la presenza di un polo instabile in $z=-2$ (oltre a uno zero a fase non minima in $z=3$). Inglobando anche il blocco di ritardo si ottiene

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{1}{z}\,G_p(z) = \frac{z-3}{z(z^2+2.5z+1)} = \frac{n_G(z)}{d_G(z)}.$$

Poiché lo schema ha una retroazione non unitaria con $1/K_d = 4$, l'ingresso di riferimento $V(z)$ all'anello di controllo e il riferimento desiderato unitario $Y_d(z)$ per l'uscita sono legati dalla

$$V(z) = \frac{1}{K_d}\,Y_d(z) = 4\,\frac{z}{z-1},$$

per cui $V(z)$ sarà un gradino di ampiezza pari a 4. Posto $E(z) = Y_d(z) - Y(z) = 0.25\,V(z) - Y(z)$ e per il controllore

$$\frac{U(z)}{E(z)} = D(z) = \frac{n_D(z)}{d_D(z)},$$

la funzione di trasferimento ad anello chiuso sarà

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = W(z) = \frac{G(z)D(z)}{1+\frac{1}{K_d}\,G(z)D(z)} = \frac{n_G(z)n_D(z)}{d_G(z)d_D(z)+4\,n_G(z)n_D(z)}.$$

La specifica di errore $E(z)$ nullo a regime impone l'introduzione di un'azione integrale nella $D(z)$. Per avere tempo di risposta finito e minimo, i poli della $W(z)$, ossia le radici di

$$d_G(z)d_D(z)+4\,n_G(z)n_D(z) = 0,$$

devono essere assegnati tutti nell'origine. Procedendo per cancellazione dei due poli stabili della $G(z)$, la struttura del controllore sarà data da

$$D(z) = \frac{0.25\,(z+0.5)z}{z-1}\,\frac{az+b}{z^2+cz+d}.$$

Eseguite le cancellazioni, l'equazione di progetto è allora

$$(z+2)(z-1)(z^2+cz+d)+(z-3)(az+b) = z^4$$

con $\ell = 4$. Tale valore è consistente con la formula $\ell = (n-m)+n_p+m_z$, dove $n-m=2$ è l'eccesso poli-zeri della $G(z)$, $n_p = 1$ è il numero di poli non cancellati e $m_z = 1$ è quello degli zeri non cancellati nel progetto. Sviluppando i prodotti

$$z^4+(c+1)z^3+(a+c+d-2)z^2+(-3a+b-2c+d)z-(3b+2d) = z^4$$

e applicando il principio di identità dei polinomi, si ottengono quattro equazioni nelle quattro incognite a, b, c e d:

$$
\begin{aligned}
c + 1 &= 0 \\
a + c + d - 2 &= 0 \\
-3a + b - 2c + d &= 0 \\
3b + 2d &= 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
a &= 0.9 \\
b &= -1.4 \\
c &= -1 \\
d &= 2.1.
\end{aligned}
$$

Il controllore finale è quindi

$$
D(z) = \frac{0.25\, z(z+0.5)(0.9z-1.4)}{(z-1)(z^2-z+2.1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{0.9 - 0.95z^{-1} - 0.7z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 3.1z^{-2} - 2.1z^{-3}} = \frac{U(z)}{E(z)},
$$

e l'associata equazione alle differenze è

$$
u(k) = 0.25\,(0.9\,e(k) - 0.95\,e(k-1) - 0.7\,e(k-2)) + 2\,u(k-1) - 3.1\,u(k-2) + 2.1\,u(k-3).
$$

A scopo di verifica, calcoliamo analiticamente anche i valori della $Y(z)$ a partire dalla $W(z)$ che è pari a

$$
W(z) = \frac{0.25\,(z-3)(0.9z-1.4)}{z^4} = \frac{Y(z)}{V(z)}.
$$

Da questa segue

$$
Y(z) = W(z)V(z) = \frac{0.25\,(z-3)(0.9z-1.4)}{z^4} \cdot 4\,\frac{z}{z-1} = \left(0.9z^{-2} - 4.1z^{-3} + 4.2z^{-4}\right)\frac{1}{1-z^{-1}}.
$$

Le sequenze discrete sono allora:

k	-1	0	1	2	3	4	5	...
$y_d(k)$	0	1	1	1	1	1	1	...
$v(k)$	0	4	4	4	4	4	4	...
$y(k) - y(k-1)$	0	0	0	0.9	-4.1	4.2	0	...
$y(k)$	0	0	0	0.9	-3.2	1	1	...

Come previsto, l'uscita assume il valore unitario desiderato a partire dal quarto valore ($\ell = 4$) nella sequenza discreta. I risultati di una simulazione discreta ottenuti con lo schema Simulink di Fig. 2 sono mostrati in Fig. 3 (i valori sono graficati per comodità a tempo continuo, ogni $T = 1$ s).

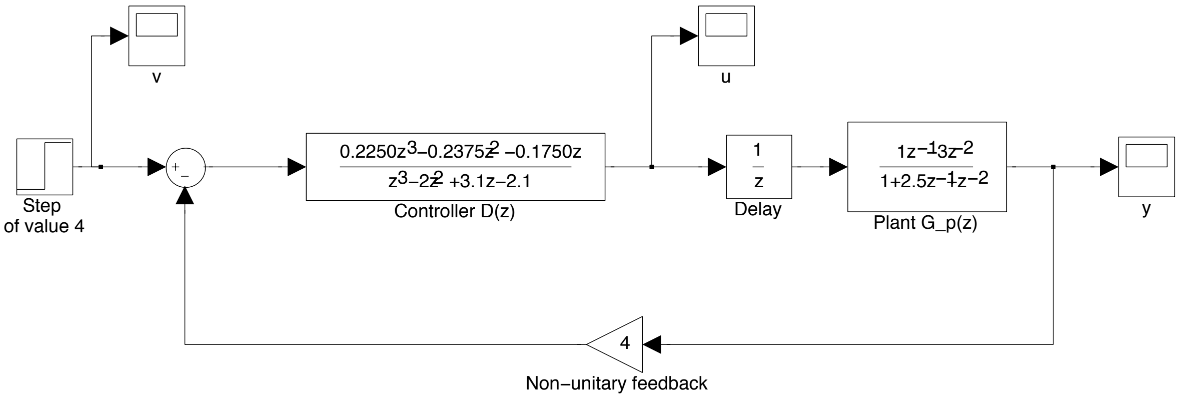

Figura 2: Schema di simulazione a tempo discreto

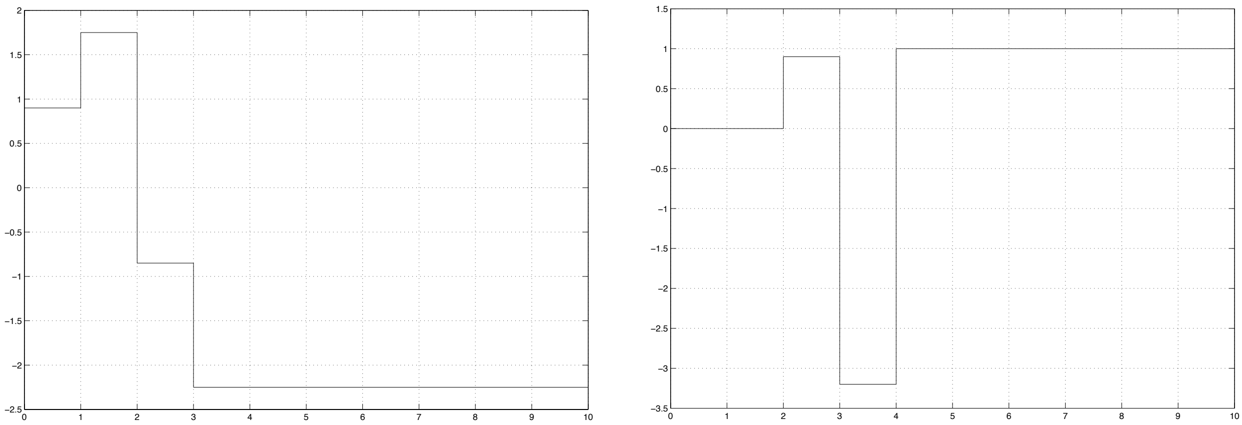

Figura 3: Comando di controllo $u(k)$ [a sinistra] e uscita $y(k)$ [a destra]

* * * * *