Sapienza Università di Roma

Unità Didattica Sistemi Digitali di Controllo

Prova Scritta del 18 Settembre 2007

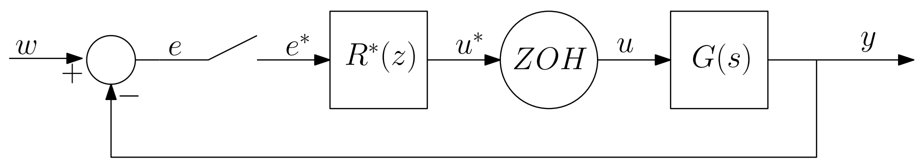

Figura 1: Sistema digitale di controllo

Si consideri il sistema digitale di controllo rappresentato in Fig. 1 in cui il periodo di campionamento e' pari ad 1 e

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \ .$$

Progettare $R^*(z)$ in modo che l'errore campionato e^* corrispondente al riferimento $w(t) = t$ sca(t), sia a regime permanente in valore assoluto minore di 0,01.

Nota: si puo' approssimare il numero di Nepero e con 2,72 ed il suo inverso con 0,37.

Soluzione Proposta

Al fine del soddisfacimento delle specifiche, lo schema di Fig. 1 è equivalente allo schema di Fig. 2 che,

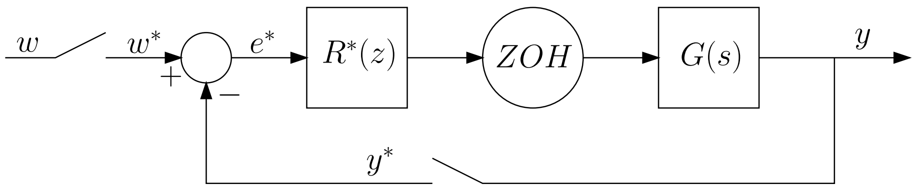

Figura 2: Sistema digitale di controllo con riferimento e uscita campionati

per il soddisfacimento delle specifiche, a sua volta è equivalente al sistema di controllo a tempo discreto di Fig. 3

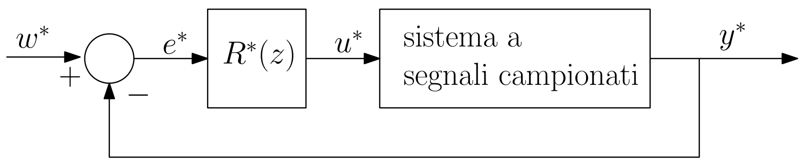

Figura 3: Sistema di controllo a tempo discreto

La funzione di trasferimento $G^*(z)$ del sistema a segnali campionati può essere calcolata usando la apposita procedura e si ottiene

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \\
y^*(k) &= (e^{-k} + k - 1)\mathrm{sca}^*(k) \\
Y^*(z) &= \frac{z}{z - e^{-1}} + \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} \\
G^*(z) &= Y^*(z)\frac{z-1}{z} = \frac{e^{-1}(z+e-2)}{(z-1)(z-e^{-1})} \simeq \frac{0,37(z+0,72)}{(z-1)(z-0,37)} \; .
\end{aligned}
$$

Dalla teoria si ricava che il sistema a segnali campionati è di ordine due; visto che $G^*(z)$ possiede due poli, ne segue che il sistema a segnali campionati è raggiungibile ed osservabile.

Dal momento che $G^*(z)$ possiede un polo in $z = 1$, se il sistema retroazionato è stabile asintoticamente, quest'ultimo è almeno di tipo 1; allora, per il teorema del valore finale, il valore a regime permanente di e^* in corrispondenza al riferimento $w^*(k) = k\ \mathrm{sca}^*(k)$, è dato da

$$
e^*_\infty = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{1+R^*(z)G^*(z)}\frac{z}{(z-1)^2} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{R^*(z)G^*(z)(z-1)} \; . \tag{1}
$$

Per soddisfare la specifica si può allora provare a cercare una $R^*(z)$ che renda il sistema retroazionato stabile asintoticamente, che non abbia poli in $z = 1$, e tale che

$$
|e^*_\infty| = \left|\frac{1}{R^*(1)\mu^*}\right| < 0,01 \tag{2}
$$

dove

$$
\mu^* = \lim_{z\to 1}(z-1)G^*(z) = 1 \; , \tag{3}
$$

ovvero tale che

$$|R^*(1)| \geq 100 \; . \tag{4}$$

Tuttavia non appare immediato determinare una tale $R^*(z)$. Si preferisce allora ottenere un sistema retroazionato di tipo 2 introducendo un polo in $z = 1$ in $R^*(z)$; infatti, se il sistema è di tipo 2, allora la specifica è soddisfatta. Pertanto poniamo

$$\tilde{G}(z) = \frac{1}{z-1} G^*(z) \simeq \frac{0,37(z+0,72)}{(z-1)^2(z-0,37)} \tag{5}$$

e determiniamo una $\tilde{R}(z)$ tale che gli autovalori del sistema rtroazionato siano tutti interni al cerchio unitario. Essendo $\tilde{G}(z)$ del terzo ordine, ciò si può ottenere con una $\tilde{R}(z)$ del secondo ordine. Per semplificare i calcoli, poniamo

$$\tilde{R}(z) = \frac{(z-0,37)(q_1 z + q_0)}{0,37(z+0,72)(z+p_0)} \; ,$$

e determiniamo q_1, q_0, e p_0 imponendo che

$$(z-1)^2(z+p_0) + q_1 z + q_0 = z^3 \; .$$

Applicando il principio di identità dei polinomi e risolvendo il risultante sistema di equazioni lineari nelle incognite q_1, q_0, e p_0, si trova che

$$\begin{array}{rcl} p_0 & = & 2 \\ q_0 & = & -2 \\ q_1 & = & 3 \; . \end{array}$$

Pertanto

$$R^*(z) = \frac{(z-0,37)(3z-2)}{0,37(z-1)(z+0,72)(z+2)} \; . \tag{6}$$