Sapienza Università di Roma

Unità Didattica Sistemi Digitali di Controllo

Prova Scritta del 14 Aprile 2008

Si consideri il sistema digitale di controllo rappresentato in Fig. 1

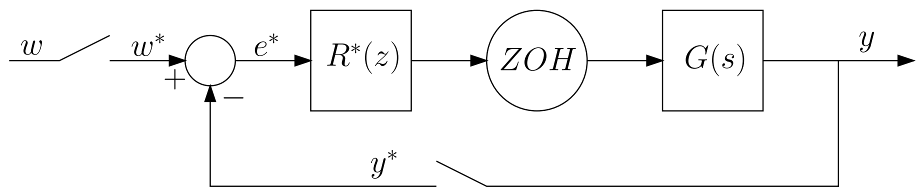

Figura 1: Sistema digitale di controllo

in cui il periodo di campionamento e' pari a **2** e

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+1+\pi^2)} \; .$$

Progettare $R^*(z)$ in modo tale che l'errore e^* corrispondente ad un riferimento a scalino sia nullo a regime permanente.

Nota: dati $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\right] &= e^{-at}\cos(bt) \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right] &= e^{-at}\sin(bt) \; . \end{aligned}$$

Proposta di soluzione

Al fine del soddisfacimento delle specifiche è sufficente considerare il sistema di controllo a tempo discreto di Fig. 2.

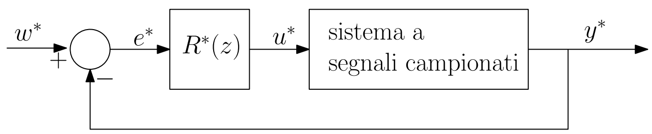

Figura 2: Sistema di controllo a tempo discreto

La funzione di trasferimento $G^*(z)$ del sistema a segnali campionati può essere calcolata usando la apposita procedura. Dapprima si considera

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s^2+2s+1+\pi^2)} \ . \tag{1}$$

È noto che il secondo membro dell'espressione sopra si puó esprimere come segue

$$\frac{1}{s(s+1)(s^2+2s+1+\pi^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+1-j\pi} + \frac{\bar{C}}{s+1+j\pi},$$

dove A, B, e C sono coefficienti da determinare. Tuttavia per evitare di dover eseguire calcoli con numeri complessi, è conveniente esprimere il secondo membro della (1) come

$$\frac{1}{s(s+1)(s^2+2s+1+\pi^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Ds+E}{s^2+2s+1+\pi^2} \ , \tag{2}$$

dove A, B, C, e D sono coefficienti da determinare. I coefficienti A e B possono essere calcolati nel seguente modo

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{1}{1+\pi^2} \ , \\ B &= \lim_{s\to -1} (s+1)Y(s) = -\frac{1}{\pi^2} \ . \end{aligned}$$

Per calcolare D, moltiplichiamo per s il primo e il secondo membro della (2), e calcoliamo il limite per $s \to \infty$ di entrambi i membri dell'equazione risultante; si ottiene

$$0 = A + B + D \ ,$$

da cui segue

$$D = \frac{1}{\pi^2(1+\pi^2)} \ .$$

Per ricavare E, poniamo $s = 1$ nella (2) e otteniamo

$$\frac{1}{2(4+\pi^2)} = A + \frac{B}{2} + \frac{D+E}{4+\pi^2} \ . \tag{3}$$

Sostituendo nella (3) i valori trovati per A, B, e D si ricava

$$E = \frac{1-\pi^2}{\pi^2(1+\pi^2)} \ .$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{(1+\pi^2)s} - \frac{1}{\pi^2(s+1)} + \frac{s+1-\pi^2}{\pi^2(1+\pi^2)[(s+1)^2+\pi^2]} \\
y(t) &= \left[\frac{1}{1+\pi^2} - \frac{1}{\pi^2}e^{-t} + \frac{1}{\pi^2(1+\pi^2)}e^{-t}(\cos(\pi t) - \pi\sin(\pi t))\right]\mathrm{sca}(t) \\
y^*(k) &= y(2k) = \frac{1}{1+\pi^2}(1-e^{-2k})\mathrm{sca}^*(k) \\
Y^*(z) &= \frac{1}{1+\pi^2}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2}}\right) \\
G^*(z) &= Y^*(z)\frac{z-1}{z} = \frac{1-e^{-2}}{(1+\pi^2)(z-e^{-2})} \ .
\end{aligned}$$

Notare che essendo il grado del denominatore di $G^*(z)$ pari a 1, nel sistema a segnali campionati è presente una sottosistema non contemporaneamente raggiungibile ed osservabile la cui dimensione è pari a 2 e i cui autovalori sono coincidenti e pari a e^{-2}. Essendo il modulo di tali autovalori minore di 1, è comunque possibile soddisfare la specifica. A tale scopo poniamo

$$\tilde{G}(z) = \frac{z}{z-1}G^*(z) = \frac{(1-e^{-2})z}{(1+\pi^2)(z-1)(z-e^{-2})} \ ,$$

e determiniamo una $\tilde{R}(z)$ tale che gli autovalori del sistema retroazionato siano tutti interni al cerchio unitario. Essendo il grado del denominatore di $\tilde{G}(z)$ pari a 2, ciò si può ottenere con una $\tilde{R}(z)$ con grado del numeratore e del denominatore pari a 1. Per semplificare i calcoli, poniamo

$$\tilde{R}(z) = \frac{(1+\pi^2)(z-e^{-2})q_0}{(1-e^{-2})z} \ ,$$

e determiniamo q_0 imponendo che

$$z - 1 + q_0 = z \ .$$

Pertanto

$$q_0 = 1 \ ,$$

e

$$R^*(z) = \frac{(1+\pi^2)(z-e^{-2})}{(1-e^{-2})(z-1)} \ .$$