Sapienza Università di Roma

Unità Didattica Sistemi Digitali di Controllo

Prova Scritta del 23 Giugno 2008

Si consideri il sistema digitale di controllo rappresentato in Fig. 1

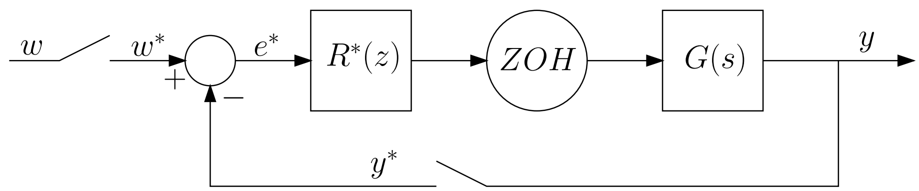

Figura 1: Sistema digitale di controllo

in cui il periodo di campionamento e' pari a 1 e

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-s} \; .$$

Progettare $R^*(z)$ **strettamente propria** in modo tale che l'errore e^* corrispondente ad un riferimento a scalino sia nullo a regime permanente.

Proposta di soluzione

Al fine del soddisfacimento delle specifiche è sufficente considerare il sistema di controllo a tempo discreto di Fig. 2.

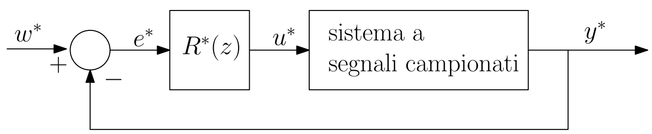

Figura 2: Sistema di controllo a tempo discreto

La funzione di trasferimento $G^*(z)$ del sistema a segnali campionati può essere calcolata usando la apposita procedura e si ottiene

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s(s+1)}e^{-s} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)e^{-s} \\
y(t) &= (1 - e^{-(t-1)})\mathrm{sca}(t-1) \\
y^*(k) &= y(k) = (1 - e^{-(k-1)})\mathrm{sca}^*(k-1) \\
Y^*(z) &= \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}}\right)\frac{1}{z} \\
G^*(z) &= Y^*(z)\frac{z-1}{z} = \frac{1-e^{-1}}{z(z-e^{-1})}\ .
\end{aligned}$$

Dalla teoria si ricava che il sistema a segnali campionati è di ordine 2; visto che $G^*(z)$ possiede 2 poli, ne segue che il sistema a segnali campionati è raggiungibile ed osservabile.

Per soddisfare la specifica sulla precisione a regime permanente e tenendo conto che si richiede che $R^*(z)$ sia strettamente propria, consideriamo il processo "allargato"

$$\tilde{G}(z) = \frac{1}{z-1}G^*(z) = \frac{1-e^{-1}}{(z-1)z(z-e^{-1})}\ ,$$

e determiniamo una $\tilde{R}(z)$ tale che gli autovalori del sistema retroazionato siano tutti interni al cerchio unitario. Essendo il grado del denominatore di $\tilde{G}(z)$ pari a 3, ciò si può ottenere con una $\tilde{R}(z)$ con grado del numeratore e del denominatore pari a 2. Per semplificare i calcoli, poniamo

$$\tilde{R}(z) = \frac{z(z-e^{-1})q_0}{(1-e^{-1})(z^2+p_1z+p_0)}\ ,$$

e determiniamo $q_0,\ p_1, p_0$ imponendo che

$$(z-1)(z^2+p_1z+p_0)+q_0 = z^3\ . \tag{1}$$

Applicando il principio di identità dei polinomi e risolvendo il risultante sistema di equazioni lineari nelle incognite q_0, p_1, e p_0, si trova che

$$\begin{aligned}
p_0 &= 1 \\
p_1 &= 1 \\
q_0 &= 1\ .
\end{aligned}$$

Pertanto

$$R^*(z) = \frac{1}{z-1}\tilde{R}(z) = \frac{z(z-e^{-1})}{(1-e^{-1})(z-1)(z^2+z+1)}\ . \tag{2}$$

Notare che la $R^*(z)$ risulta strettamente propria grazie alla scelta effettuata di $\tilde{G}(z)$.