Sapienza Università di Roma

Unità Didattica Sistemi Digitali di Controllo

Prova Scritta del 14 Gennaio 2009

Si consideri il sistema digitale di controllo rappresentato in Fig. 1

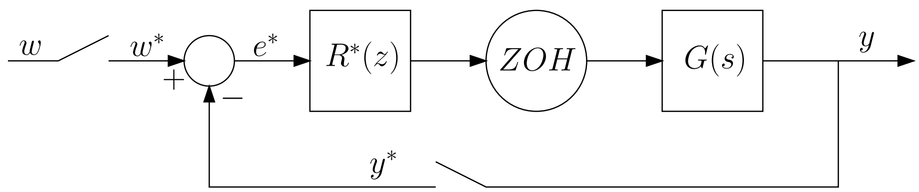

Figura 1: Sistema digitale di controllo

in cui il periodo di campionamento e' pari a 1 e

$$G(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}s} \ .$$

Progettare $R^*(z)$ in modo tale che l'errore e^* corrispondente ad un riferimento a scalino sia nullo a regime permanente.

Proposta di soluzione

Al fine del soddisfacimento delle specifiche è sufficente considerare il sistema di controllo a tempo discreto di Fig. 2.

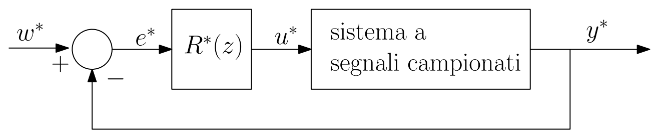

Figura 2: Sistema di controllo a tempo discreto

La funzione di trasferimento $G^*(z)$ del sistema a segnali campionati può essere calcolata usando la apposita procedura e si ottiene

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s(s+\frac{1}{2})}e^{-\frac{1}{2}s} = 2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}s} \\
y(t) &= 2\left(1 - e^{-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2})}\right)\mathrm{sca}(t-\tfrac{1}{2}) \\
y^*(k) &= y(k) = 2(1-e^{-\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})})\mathrm{sca}\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\ .
\end{aligned}
$$

Ai fini del calcolo della $Y^*(z)$ è utile notare che $\mathrm{sca}(k-\frac{1}{2}) = \mathrm{sca}^*(k-1)$ e riscrivere $y^*(k)$ come segue

$$
y^*(k) = 2(1-e^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}(k-1)})\mathrm{sca}^*\left(k-1\right)\ .
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
Y^*(z) &= 2\left(\frac{z}{z-1} - \frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\frac{z}{z-e^{-\frac{1}{2}}}\right)\frac{1}{z} \\
G^*(z) &= Y^*(z)\frac{z-1}{z} = \frac{2}{e^{\frac{1}{4}}}\frac{(e^{\frac{1}{4}}-1)z+1-e^{-\frac{1}{4}}}{z(z-e^{-\frac{1}{2}})}\ .
\end{aligned}
$$

Dalla teoria si ricava che il sistema a segnali campionati è di ordine 2; visto che $G^*(z)$ possiede 2 poli, ne segue che il sistema a segnali campionati è raggiungibile ed osservabile.

Per soddisfare la specifica sulla precisione a regime permanente consideriamo il processo “allargato”

$$
\tilde{G}(z) = \frac{z}{z-1}G^*(z) = \frac{2}{e^{\frac{1}{4}}}\frac{(e^{\frac{1}{4}}-1)z+1-e^{-\frac{1}{4}}}{(z-1)(z-e^{-\frac{1}{2}})}\ ,
$$

e determiniamo una $\tilde{R}(z)$ tale che gli autovalori del sistema retroazionato siano tutti interni al cerchio unitario. Essendo il grado del denominatore di $\tilde{G}(z)$ pari a 2, ciò si può ottenere con una $\tilde{R}(z)$ con grado del numeratore e del denominatore pari a 1.

Il valore assoluto dello zero di $G^*(z)$ è pari a

$$
|z_1| = \frac{1-e^{-\frac{1}{4}}}{e^{\frac{1}{4}}-1}
$$

e risulta $|z_1| < 1$ in quanto $1-e^{-\frac{1}{4}} < e^{\frac{1}{4}}-1$ poichè $\cosh(1/4) > 1$. Pertanto lo zero z_1 può essere cancellato senza compromettere la stabilità asintotica del sistema retroazionato in figura.

Quindi per semplificare i calcoli, poniamo

$$
\tilde{R}(z) = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{2}\frac{q_0(z-e^{-\frac{1}{2}})}{(e^{\frac{1}{4}}-1)z+1-e^{-\frac{1}{4}}}
$$

e determiniamo q_0, imponendo che

$$z - 1 + q_0 = z \ .$$

da cui segue che

$$q_0 \quad = \quad 1 \ .$$

Pertanto

$$R^*(z) = \frac{z}{z-1}\tilde{R}(z) = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{2}\frac{z(z-e^{-\frac{1}{2}})}{((e^{\frac{1}{4}}-1)z+1-e^{-\frac{1}{4}})(z-1)} \ .$$