

Sapienza Università di Roma
Unità Didattica Sistemi Digitali di Controllo
Prova Scritta del 3 Giugno 2009

1. Data la funzione di trasferimento di un regolatore analogico

$$R^o(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s+1}$$

determinare la funzione di trasferimento $R^*(z)$ del corrispondente regolatore digitale ottenuto utilizzando il metodo di Eulero all'indietro e $T = 1$. Determinare quindi la relativa equazione alle differenze ingresso-uscita del regolatore digitale.

Nota: si ricorda che con il metodo di Eulero all'indietro si ha $s = \frac{z-1}{Tz}$.

2. Si consideri il sistema a segnali campionati in Figura 1

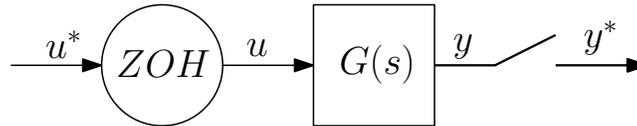


Figura 1: Sistema a segnali campionati.

in cui

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1 + \pi^2} \quad (1)$$

e $T = 1$.

- (a) Si determini la funzione di trasferimento del sistema a segnali campionati.
- (b) Si indichi se il sistema a segnali campionati è raggiungibile ed osservabile giustificando l'indicazione.

Proposta di soluzione

1. Si ha

$$R^*(z) = \frac{U^*(z)}{E^*(z)} = R^o \left(\frac{z-1}{z} \right) = \frac{\frac{1}{2}z}{z - \frac{1}{2}}. \quad (2)$$

La corrispondente equazione alle differenze ingresso-uscita è data da

$$u^*(k) = \frac{1}{2}u^*(k-1) + \frac{1}{2}e^*(k). \quad (3)$$

2. (a) La funzione di trasferimento $G^*(z)$ del sistema a segnali campionati può essere calcolata usando la apposita procedura e si ottiene

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s(s^2 + 2s + 1 + \pi^2)} = \frac{1}{\pi^2 + 1} \left[\frac{1}{s} + \frac{-\pi + j}{2\pi(s + 1 - j\pi)} + \frac{-\pi - j}{2\pi(s + 1 + j\pi)} \right] \\ y(t) &= \frac{1}{\pi^2 + 1} \left[1 + \frac{-\pi + j}{2\pi} e^{(-1+j\pi)t} + \frac{-\pi - j}{2\pi} e^{(-1-j\pi)t} \right] \text{sca}(t) \\ y^*(k) &= y(k) = \frac{1}{\pi^2 + 1} \left[1 + \frac{-\pi + j}{2\pi} e^{-k} (-1)^k + \frac{-\pi - j}{2\pi} e^{-k} (-1)^k \right] \text{sca}^*(k) = \\ &= \frac{1}{\pi^2 + 1} [1 - (-e^{-1})^k] \text{sca}^*(k) \\ Y^*(z) &= \frac{1}{\pi^2 + 1} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+e^{-1}} \right) \\ G^*(z) &= Y^*(z) \frac{z-1}{z} = \frac{1+e^{-1}}{(\pi^2+1)(z+e^{-1})}. \end{aligned}$$

(b) Dalla teoria si ricava che il sistema a segnali campionati è di ordine due; visto che $G^*(z)$ possiede un polo, ne segue che il sistema a segnali campionati non è contemporaneamente raggiungibile ed osservabile.