Sapienza Università di Roma

Unità Didattica Sistemi Digitali di Controllo

Prova Scritta del 9 Luglio 2009

Si consideri il sistema digitale di controllo rappresentato in Fig. 1 in cui il periodo di campionamento e'

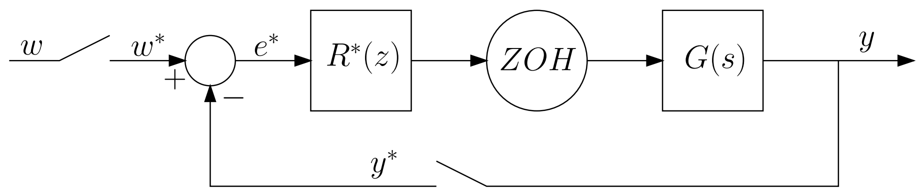

Figura 1: Sistema digitale di controllo

pari ad 1 e

$$G(s) = \frac{s + 1 - e^{-1}}{s(s+1)} \ .$$

Progettare $R^*(z)$ in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

1. l'errore e^* corrispondente ad un riferimento a scalino sia nullo a regime permanente;
2. la funzione di trasferimento del corrispondente sistema retroazionato tempo discreto abbia due poli e tali poli siano pari a zero.

Nota: si ricorda che il numero di Nepero e è compreso tra 2 e 3.

Proposta di soluzione

Al fine del soddisfacimento delle specifiche è sufficente considerare il sistema di controllo a tempo discreto di Fig. 2

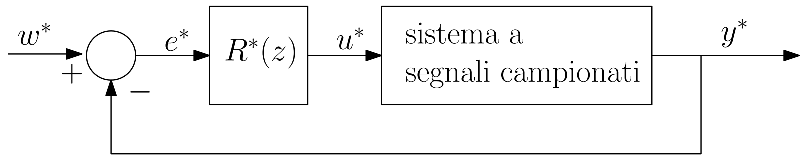

Figura 2: Sistema di controllo a tempo discreto

La funzione di trasferimento $G^*(z)$ del sistema a segnali campionati può essere calcolata usando la apposita procedura e si ottiene

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s+1-e^{-1}}{s^2(s+1)} = -\frac{e^{-1}}{s+1} + \frac{1-e^{-1}}{s^2} + \frac{e^{-1}}{s} \\
y^*(k) &= y(k) = [-e^{-1}e^{-k} + (1-e^{-1})k + e^{-1}]\mathrm{sca}^*(k) \\
Y^*(z) &= -e^{-1}\frac{z}{z-e^{-1}} + (1-e^{-1})\frac{z}{(z-1)^2} + e^{-1}\frac{z}{z-1} \\
G^*(z) &= Y^*(z)\frac{z-1}{z} = -e^{-1}\frac{z-1}{z-e^{-1}} + (1-e^{-1})\frac{1}{z-1} + e^{-1} = \frac{(1-e^{-2})z + 2e^{-1}(e^{-1}-1)}{(z-1)(z-e^{-1})} \; .
\end{aligned}$$

Notare che poichè il processo possiede autovalori reali e distinti, dalla teoria si ricava che il sistema a segnali campionati è raggiungibile ed osservabile.

Per determinare $R^*(z)$ utilizziamo il metodo di assegnamento del modello. Dapprima dobbiamo determinare una funzione di trasferimento del sistema retroazionato

$$F^*(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{1}$$

che renda le specifiche soddisfatte. $F^*(z)$ deve avere grado relativo pari almeno ad 1 in modo da garantire la realizzabilità di $R^*(z)$. Notare che $G^*(z)$ possiede uno zero in

$$\frac{2e^{-1}(1-e^{-1})}{1-e^{-2}} = \frac{2(e-1)}{e^2-1} = \frac{2}{e+1} \tag{2}$$

che è in modulo minore di 1; osservare che anche il polo di $G^*(z)$ in e^{-1} è in modulo minore di 1. Pertanto sia lo zero di $G^*(z)$ che il polo in e^{-1} possono essere cancellati da $R^*(z)$. Osservare che deve essere soddisfatta le relazione $A(1) = B(1)$ in modo da consentire sia la stabilità asintotica del sistema retroazionato che il soddisfacimento della specifica 1. In aggiunta la specifica 2 richiede che $A(z) = z^2$ e $B(0) \neq 0$. Poniamo allora $B(z) = 1$. Di conseguenza risulta

$$R^*(z) = \frac{(z-1)(z-e^{-1})}{(1-e^{-2})z + 2e^{-1}(e^{-1}-1)} \cdot \frac{1}{z^2-1} = \frac{z-e^{-1}}{[(1-e^{-2})z + 2e^{-1}(e^{-1}-1)](z+1)} \; . \tag{3}$$