Corso di Robotica 1

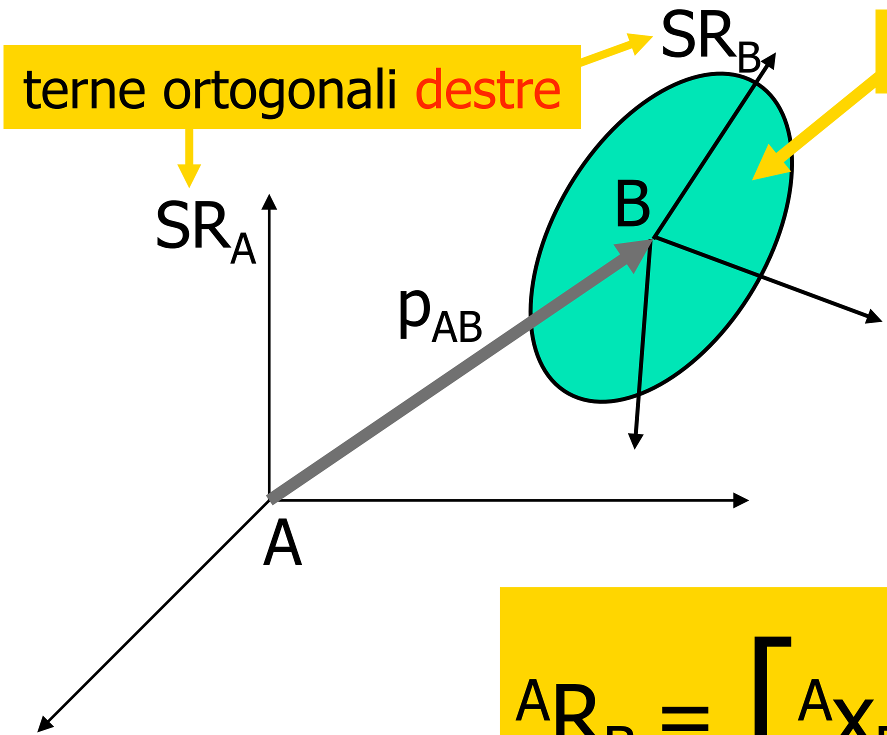
Posizione e orientamento di corpi rigidi

Prof. Alessandro De Luca

Dipartimento di Informatica e Sistemistica Antonio Ruberti

Sapienza Università di Roma

Posizione e orientamento



corpo rigido

- posizione:

  ${}^Ap_{AB}$ (vettore $\in \mathbf{R}^3$), espresso in SR_A

- orientamento:

  matrice 3x3 ortonormale

  ($R^T = R^{-1} \Rightarrow \; {}^AR_B \, {}^BR_A = I$), con det = +1

$$ {}^AR_B = \left[{}^Ax_B \;\; {}^Ay_B \;\; {}^Az_B \right] $$

- $x_A \; y_A \; z_A$ ($x_B \; y_B \; z_B$) sono i versori (norma unitaria) della terna SR_A (SR_B)
- le componenti di ${}^AR_B$ sono i coseni direttori degli assi di SR_B rispetto a SR_A

Matrice di rotazione

ortonormale, a det = +1

$$
{}^A R_B = \begin{bmatrix} x_B^T x_A & y_B^T x_A & z_B^T x_A \\ x_B^T y_A & y_B^T y_A & z_B^T y_A \\ x_B^T z_A & y_B^T z_A & z_B^T z_A \end{bmatrix}
$$

coseno direttore di z_B rispetto a x_A

struttura algebrica di gruppo SO(3) (elemento neutro = I; elemento inverso = R^T)

proprietà di concatenazione

$$
{}^k R_i \cdot {}^i R_j = {}^k R_j
$$

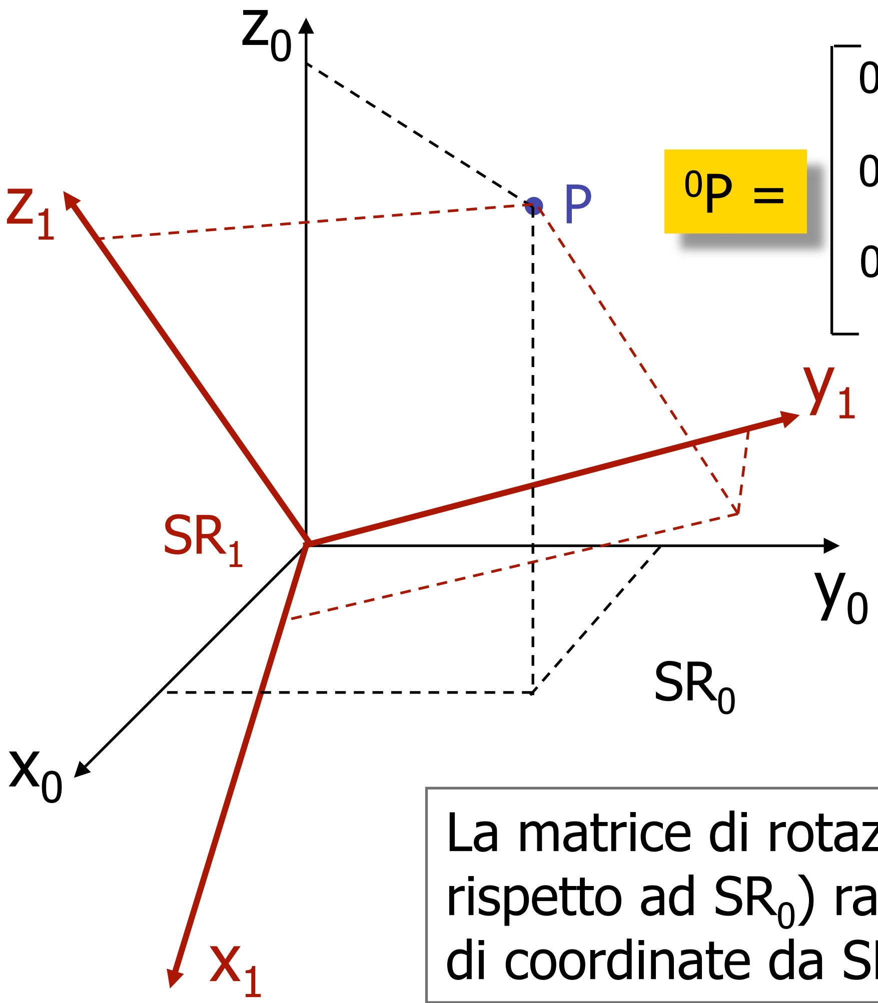
orientamento di SR_i rispetto a SR_k

orientamento di SR_j rispetto a SR_i

orientamento di SR_j rispetto a SR_k

N.B. il prodotto di matrici di rotazione non commuta in generale!

Cambiamento di coordinate



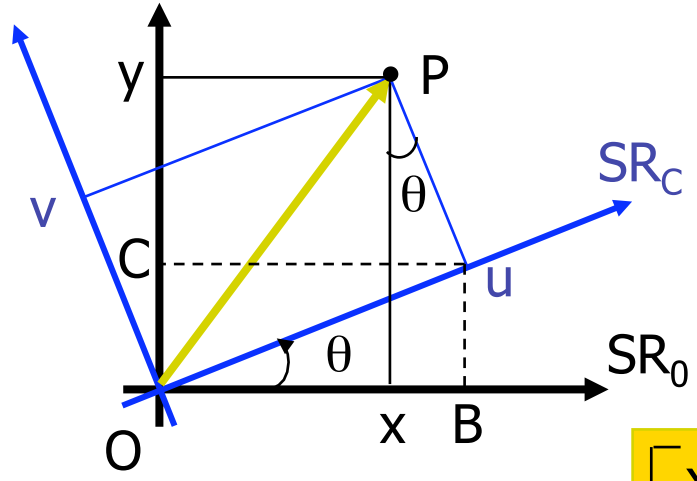
$$ {}^0P = \begin{bmatrix} {}^0p_x \\ {}^0p_y \\ {}^0p_z \end{bmatrix} = {}^1p_x \, {}^0\mathbf{x}_1 + {}^1p_y \, {}^0\mathbf{y}_1 + {}^1p_z \, {}^0\mathbf{z}_1 $$

$$ = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{x}_1 & {}^0\mathbf{y}_1 & {}^0\mathbf{z}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1p_x \\ {}^1p_y \\ {}^1p_z \end{bmatrix} $$

$$ = {}^0R_1 \, {}^1P $$

La matrice di rotazione ${}^0R_1$ (orientamento di SR_1 rispetto ad SR_0) rappresenta anche il cambiamento di coordinate da SR_1 ad SR_0

Es: Orientamento di terne in un piano
(rotazione elementare intorno a z)



$x = OB - xB = u \cos\theta - v \sin\theta$

$y = OC + Cy = u \sin\theta + v \cos\theta$

$z = w$

ossia…

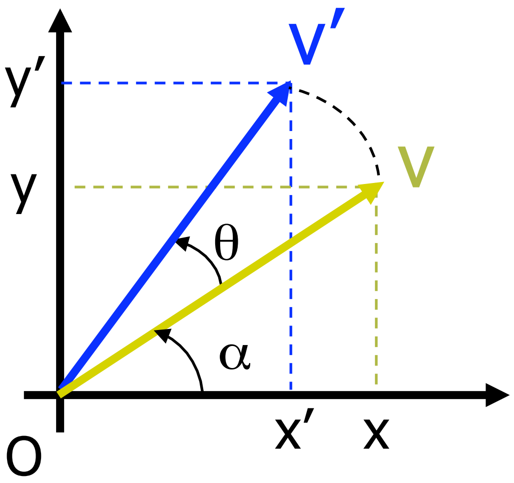
$$
\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{{}^0OP} = \begin{bmatrix} \overset{{}^0x_C}{\cos\theta} & \overset{{}^0y_C}{-\sin\theta} & \overset{{}^0z_C}{0} \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = R_z(\theta) \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{{}^CP}
$$

$$\boxed{R_z(-\theta) = R_z^T(\theta)}$$

in modo analogo:

$$
R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}
$$

Es: Rotazione di un vettore intorno a z



$$x = |v| \cos \alpha$$
$$y = |v| \sin \alpha$$

$$x' = |v| \cos(\alpha + \theta) = |v| (\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta)$$
$$= x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = |v| \sin(\alpha + \theta) = |v| (\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta)$$
$$= x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

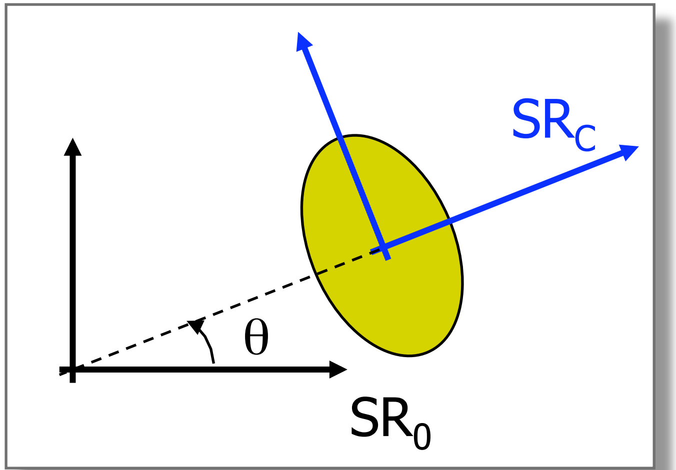
ossia…

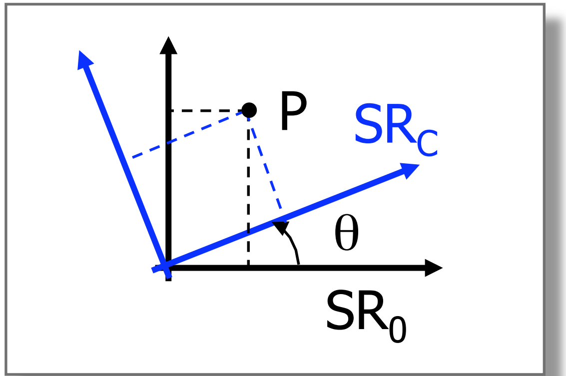
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_z(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

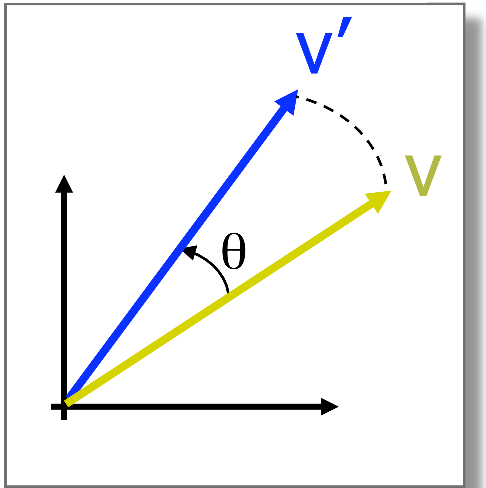
…come prima!

Interpretazioni equivalenti di una matrice di rotazione

una matrice di rotazione, ad es. $R_z(\theta)$, può rappresentare:







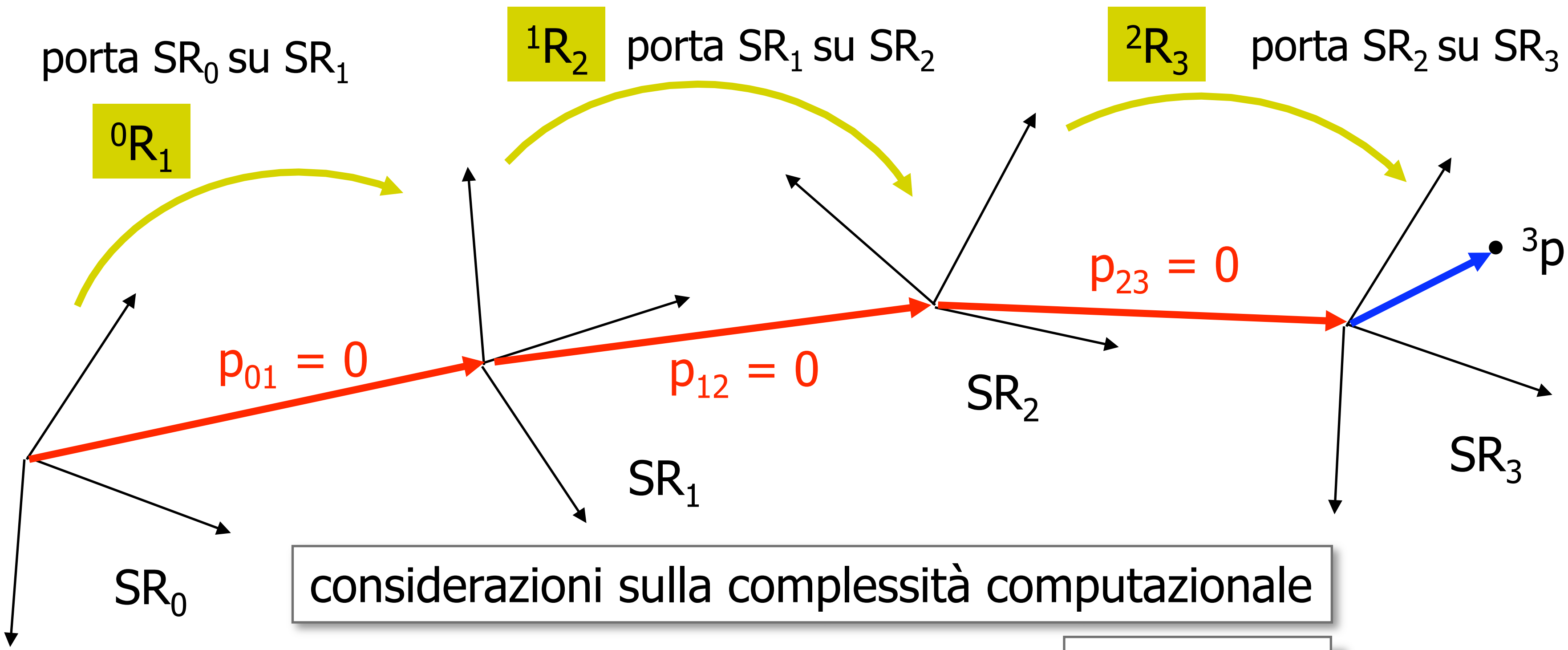
l'orientamento di un corpo rigido rispetto a un sistema di riferimento SR_0
es: $[{}^0x_C \; {}^0y_C \; {}^0z_C] = R_z(\theta)$

il cambiamento di coordinate da SR_C a SR_0
es: ${}^0P = R_z(\theta)\, {}^CP$

l'operatore di rotazione
es: $v' = R_z(\theta)\, v$

la matrice di rotazione ${}^0R_C$ è l'operatore che porta la terna SR_0 sulla terna SR_C

Composizione di rotazioni



considerazioni sulla complessità computazionale

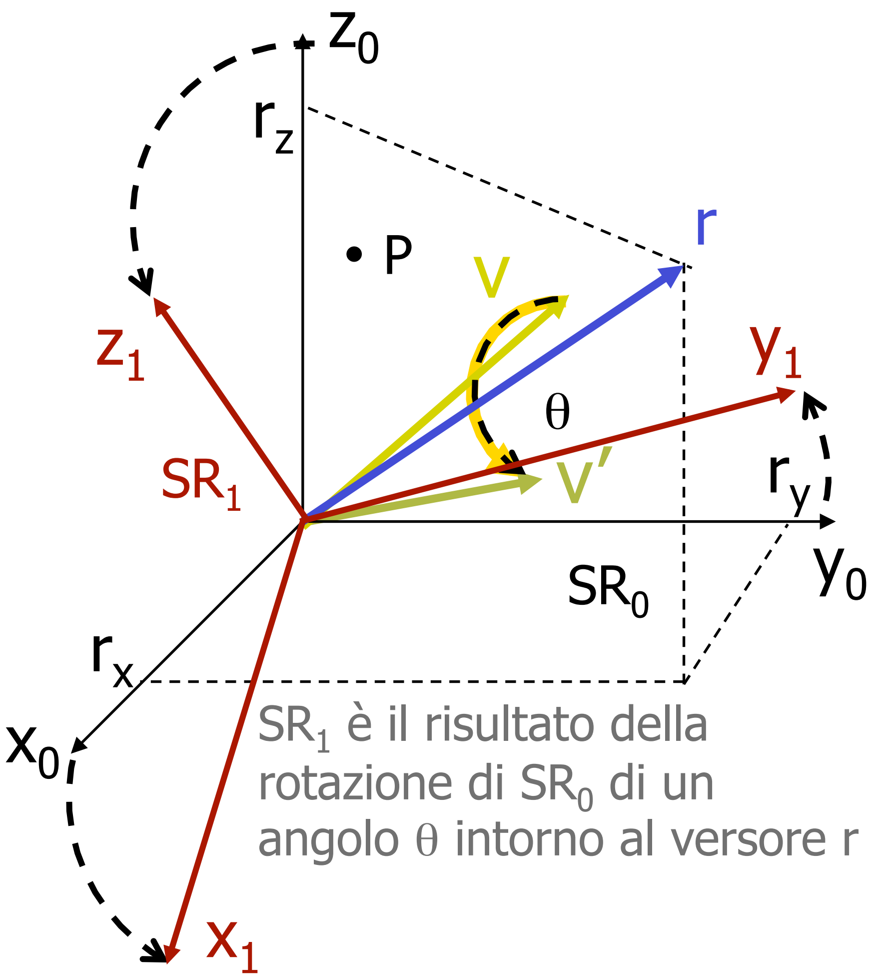
$$^0p = (^0R_1\,^1R_2\,^2R_3)\,^3p = {}^0R_3\,^3p$$

63 prodotti
42 somme

$$^0p = {}^0R_1\,\underbrace{(^1R_2\,\underbrace{(^2R_3\,^3p)}_{^2p})}_{^1p}$$

27 prodotti
18 somme

Rappresentazione asse/angolo



SR_1 è il risultato della rotazione di SR_0 di un angolo θ intorno al versore r

DATI

- versore r ($\|r\| = 1$)
- θ (positivo se antiorario visto da r)

PROBLEMA DIRETTO

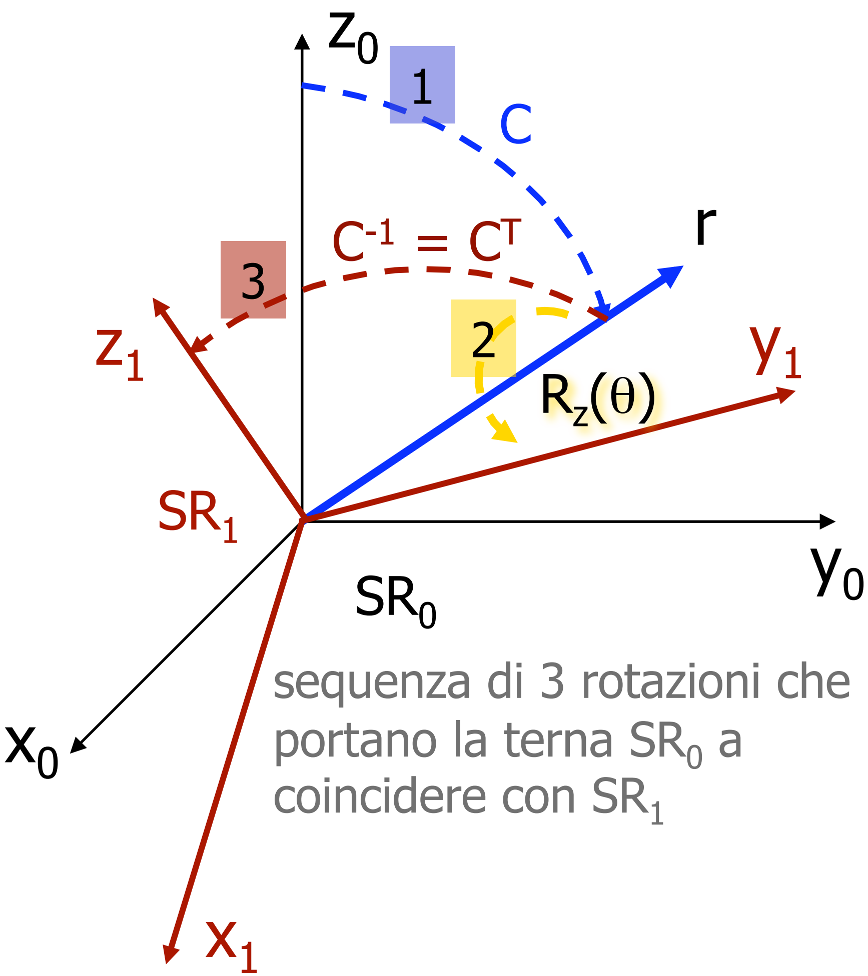
trovare

$$R(\theta,r) = [{}^0x_1 \; {}^0y_1 \; {}^0z_1]$$

ovvero tale che

$${}^0P = R(\theta,r)\,{}^1P \qquad {}^0v' = R(\theta,r)\,{}^0v$$

Problema diretto asse/angolo



sequenza di 3 rotazioni che portano la terna SR_0 a coincidere con SR_1

$$R(\theta,r) = C\,R_z(\theta)\,C^T$$

concatenazione di tre rotazioni

$$C = \begin{bmatrix} n & s & r \end{bmatrix}$$

dopo la prima rotazione l'asse z coincide con r

n ed s versori ortogonali tali che $n \times s = r$, ovvero

$$n_y s_z - s_y n_z = r_x$$
$$n_z s_x - s_z n_x = r_y$$
$$n_x s_y - s_x n_y = r_z$$

Problema diretto asse/angolo

$$R(\theta,r) = C\, R_z(\theta)\, C^T$$

$$R(\theta,r) = \begin{bmatrix} n & s & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n^T \\ s^T \\ r^T \end{bmatrix}$$

$$= r\,r^T + (n\,n^T + s\,s^T)\,c\theta + (s\,n^T - n\,s^T)\,s\theta$$

tenendo conto che

$C\,C^T = n\,n^T + s\,s^T + r\,r^T = I$,   e che

$$s\,n^T - n\,s^T = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ & 0 & -r_x \\ \text{antisimm} & & 0 \end{bmatrix} = S(r) \longleftarrow$$

skew-symmetric(r):
$r \times v = S(r)v = -\,S(v)r$

dipende solo da r e θ !! $\longrightarrow$ $R(\theta,r) = r\,r^T + (I - r\,r^T)\,c\theta + S(r)\,s\theta$ = $R^T(-\theta,r) = R(-\theta,-r)$

Espressione finale di $R(\theta,r)$

svolgendo i calcoli…

$$R(\theta,r) =$$

$$\begin{bmatrix} r_x^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & r_x r_y(1-\cos\theta)-r_z\sin\theta & r_x r_z(1-\cos\theta)+r_y\sin\theta \\ r_x r_y(1-\cos\theta)+r_z\sin\theta & r_y^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & r_y r_z(1-\cos\theta)-r_x\sin\theta \\ r_x r_z(1-\cos\theta)-r_y\sin\theta & r_y r_z(1-\cos\theta)+r_x\sin\theta & r_z^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}$$

Problema asse/angolo: esempio

$$R(\theta,r) = r\,r^T + (I - r\,r^T)\,c\theta + S(r)\,s\theta$$

$$r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = z_0$$

$$R(\theta,r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} c\theta + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s\theta$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_z(\theta)$$

Formula di Rodriguez

$$v' = R(\theta, r)\, v$$

$$v' = v \cos\theta + (r \times v) \sin\theta + (1 - \cos\theta)(r^T v)\, r$$

dimostrazione:

$$R(\theta, r)\, v = (r\, r^T + (I - r\, r^T) \cos\theta + S(r) \sin\theta) v$$

$$= r\, r^T v\, (1 - \cos\theta) + v \cos\theta + (r \times v) \sin\theta$$

c.v.d.

Proprietà di $R(\theta,r)$

1. $R \cdot r = r$ (r è l'asse invariante alla rotazione)
2. se r è il versore di un asse coordinato, R degenera in una delle matrici elementari di rotazione
3. $(\theta,r) \rightarrow R$ non è una mappa iniettiva: $R(\theta,r) = R(-\theta,-r)$
4. $\det R = +1 = \Pi\, \lambda_i$ (autovalori)
5. $tr(R) = tr(r\, r^T) + tr(I - r\, r^T) c\theta = 1 + 2\, c\theta = \Sigma\, \lambda_i$

   1. $\Rightarrow \lambda_1 = 1$

   1. 5. e 4. $\Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 2\, c\theta \Rightarrow \lambda^2 - 2\, c\theta\, \lambda + 1 = 0$

   $$\Rightarrow \lambda_{2,3} = c\theta \pm \sqrt{c^2\theta - 1} = c\theta \pm i\, s\theta = e^{\pm i\, \theta}$$

   tutti i λ a modulo 1 ($\Leftarrow$ R ortonormale)

Problema inverso asse/angolo

data una matrice di rotazione R
trovare un versore r e un angolo θ:

$$R = r\,r^T + (I - r\,r^T)\cos\theta + S(r)\sin\theta = R(\theta,r)$$

$$\mathrm{tr}(R) = R_{11} + R_{22} + R_{33} = 1 + 2\cos\theta$$

$$\boxed{\theta = \arccos \frac{R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1}{2}}$$

ma:

- fornisce solo valori in $[0,\pi]$ (mai angoli θ negativi…)
- perde definitezza rapidamente per $\theta \to 0$

Problema inverso asse/angolo

$$R - R^T = \begin{bmatrix} 0 & R_{12}-R_{21} & R_{13}-R_{31} \\ & 0 & R_{23}-R_{32} \\ \text{antisimm} & & 0 \end{bmatrix} = 2 \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ & 0 & -r_x \\ \text{antisimm} & & 0 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin\theta} \begin{bmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{bmatrix}$$

utilizzabile solo se

$$\boxed{\theta \neq 0 \pm k\pi}$$

$$\|r\| = 1 \Rightarrow \sin\theta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(R_{21} - R_{12})^2 + (R_{13} - R_{31})^2 + (R_{23} - R_{32})^2}$$

$$\theta = \mathrm{ATAN2}\left\{ \pm\sqrt{(R_{21} - R_{12})^2 + (R_{13} - R_{31})^2 + (R_{23} - R_{32})^2},\ R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1 \right\}$$

Funzione ATAN2

- arcotangente "a quattro quadranti"
  - con due argomenti
  - assume valori in [-π ,+π]
  - non è definita solo in (0,0)
- usa il segno di entrambi gli argomenti per definire il quadrante
- basata sulla funzione arctan con valori in [-π /2,+π /2]
- disponibile nei principali linguaggi (C++, Matlab, …)

$$\operatorname{atan2}(y,x) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \pi + \arctan(\frac{y}{x}) & y \geq 0, x < 0 \\ -\pi + \arctan(\frac{y}{x}) & y < 0, x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0, x = 0 \\ \text{undefined} & y = 0, x = 0 \end{cases}$$

Casi particolari

- Per $\theta = 0 \pm 2k\pi$ non c'è soluzione per r (non è definito l'asse di rotazione)
- Per $\theta = \pi \pm 2k\pi$, $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = -1$

$$\Rightarrow R = 2 r r^T - I$$

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{(R_{11}+1)/2} \\ \pm\sqrt{(R_{22}+1)/2} \\ \pm\sqrt{(R_{33}+1)/2} \end{bmatrix}$$

con

$$\boxed{\begin{array}{l} r_x r_y = R_{12}/2 \\ r_x r_z = R_{13}/2 \\ r_y r_z = R_{23}/2 \end{array}} \leftarrow$$

risolve ambiguità multiple di segno (sempre due soluzioni finali, di segno opposto)

esercizio: determinare tutte le soluzioni (r, θ) per $R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Quaternione unitario

- per eliminare problemi di indeterminatezza e singolarità del problema asse/angolo, si può utilizzare il *quaternione unitario*

$$\mathcal{Q} = \{\underbrace{\eta}_{\text{scalare}},\ \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{vettore 3-dim}}\} = \{\cos(\theta/2),\ \sin(\theta/2)\,\mathbf{r}\}$$

- $\eta^2 + \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = 1$ (da cui il nome)
- $(\theta, \mathbf{r})$ e $(-\theta, -\mathbf{r})$ danno lo stesso quaternione $\mathcal{Q}$
- rotazione nulla associata a $\mathcal{Q} = \{1, \mathbf{0}\}$
- è possibile definire la composizione di quaternioni unitari (in modo simile al prodotto di matrici di rotazione)

$$\mathcal{Q}_1 * \mathcal{Q}_2 = \{\eta_1\eta_2 - \varepsilon_1^T\varepsilon_2,\ \eta_1\varepsilon_2 + \eta_2\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \times \varepsilon_2\}$$