Corso di Robotica 1

Cinematica inversa

Prof. Alessandro De Luca

Dipartimento di Informatica
e Sistemistica Antonio Ruberti

Sapienza
Università di Roma

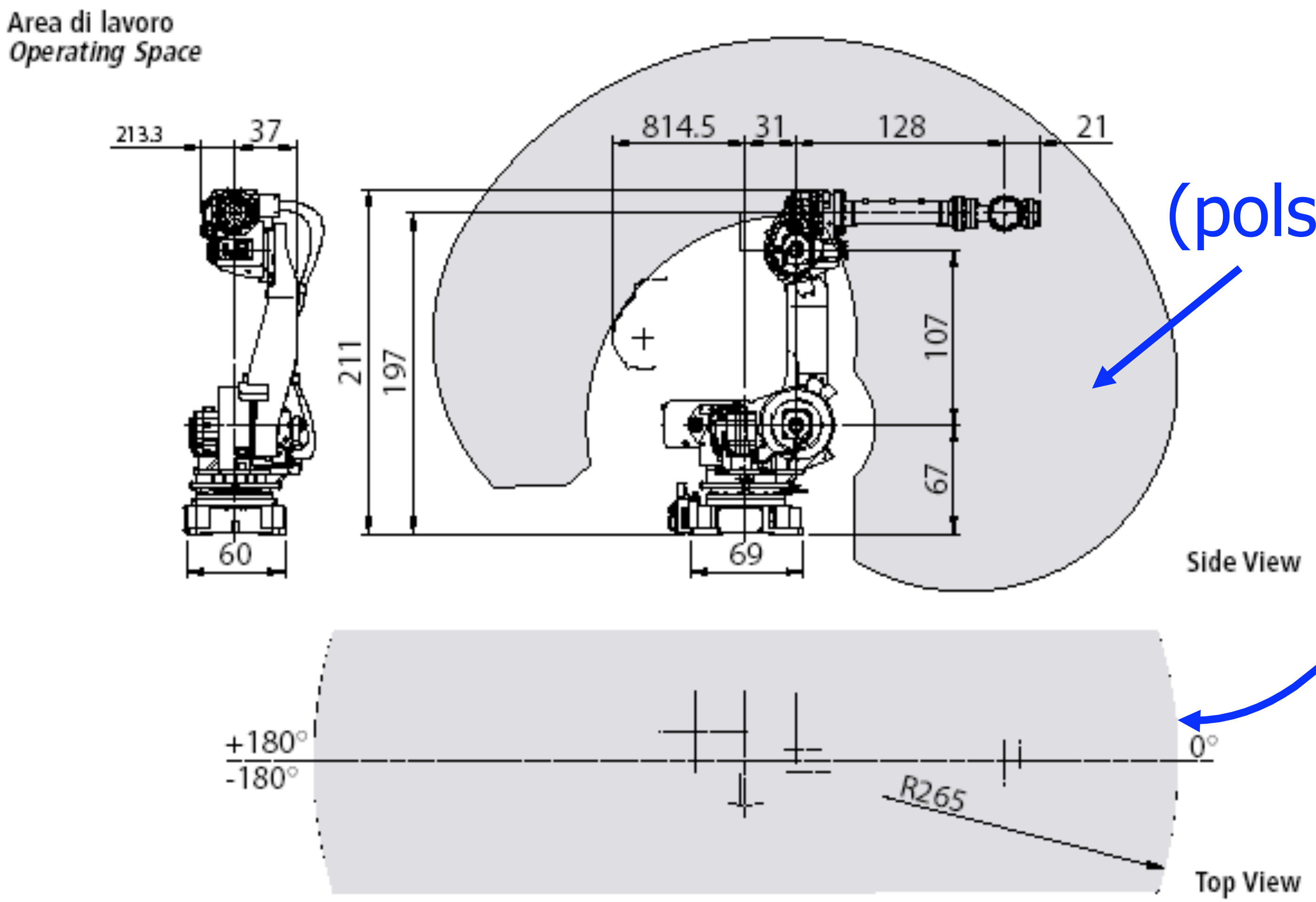
Problema cinematico inverso

- "data una posa (posizione + orientamento) dell'end-effector determinare l'insieme di valori delle variabili di giunto che la realizza"
- problema di sintesi, con dati nella forma:
  - $T = \left[\begin{array}{c:c} R & p \\ \hdashline 000 & 1 \end{array}\right]$
  - $r = \begin{bmatrix} p \\ \phi \end{bmatrix}$
- tipico problema nonlineare
  - esistenza soluzione (definizione workspace)
  - unicità/molteplicità soluzione
  - metodi di risoluzione

Risolubilità e spazio di lavoro

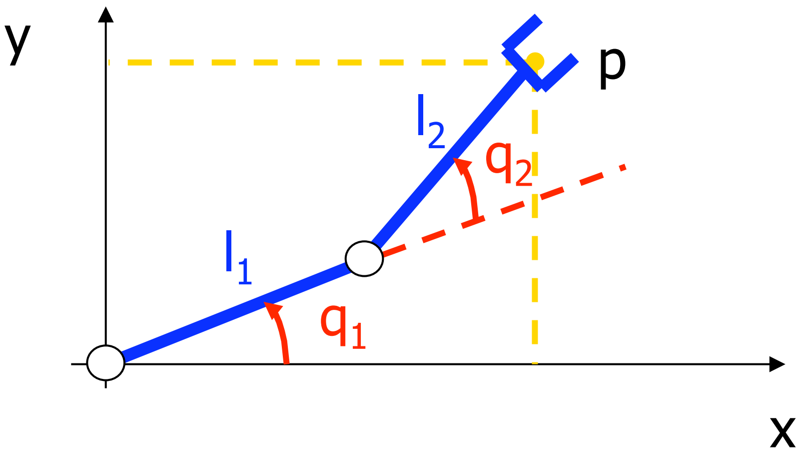
- workspace primario WS_1: insieme dei punti p raggiungibili con almeno un orientamento (ϕ o R)
  - fuori da WS_1 il problema non ha soluzione
  - per $p \in WS_1$ e ϕ (o R) opportuno esiste almeno una soluzione
- workspace secondario WS_2 (o *di destrezza*): insieme dei punti p raggiungibili con qualsiasi orientamento (tra quelli realizzabili dal robot)
  - per $p \in WS_2$ esiste almeno una soluzione per ogni ϕ (o R)
- $WS_2 \subseteq WS_1$

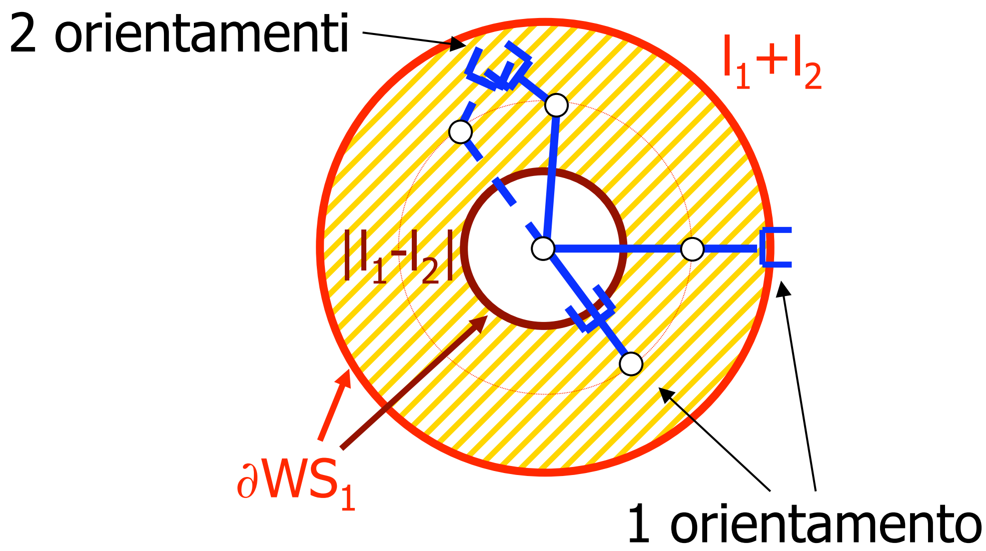
Spazio di lavoro
Fanuc R-2000i/165F



WS$_2$
(polso sferico)

Spazio di lavoro
robot 2R planare



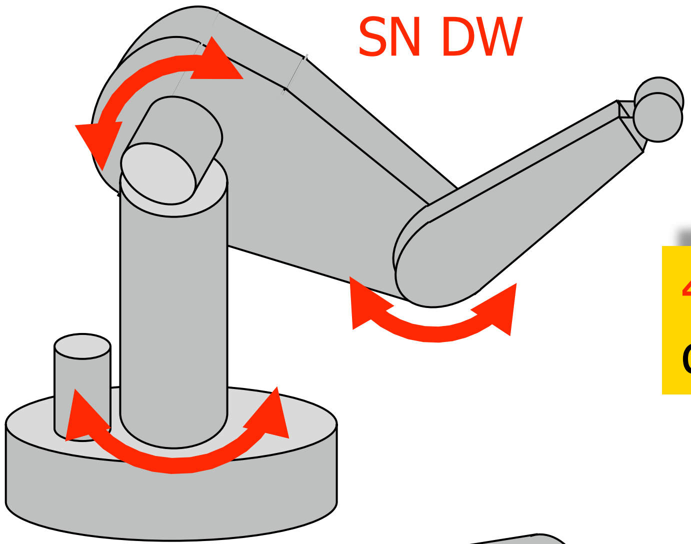


- if $l_1 \neq l_2$
  - $WS_1 = \{p \in R^2 : |l_1 - l_2| \leq \|p\| \leq l_1 + l_2\}$
  - $WS_2 = \varnothing$
- if $l_1 = l_2 = \ell$
  - $WS_1 = \{p \in R^2 : \|p\| \leq 2\ell\}$
  - $WS_2 = \{p = 0\}$ (infiniti orientamenti possibili all'origine)

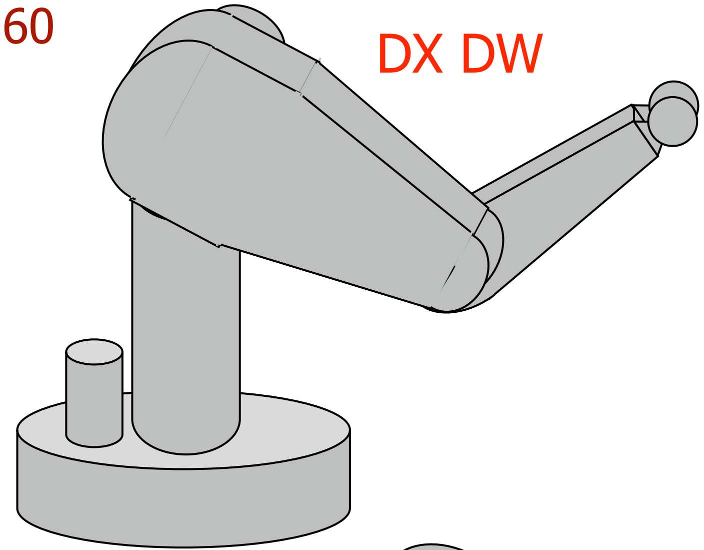
Posizionamento robot articolato

Unimation PUMA 560

SN DW



DX DW

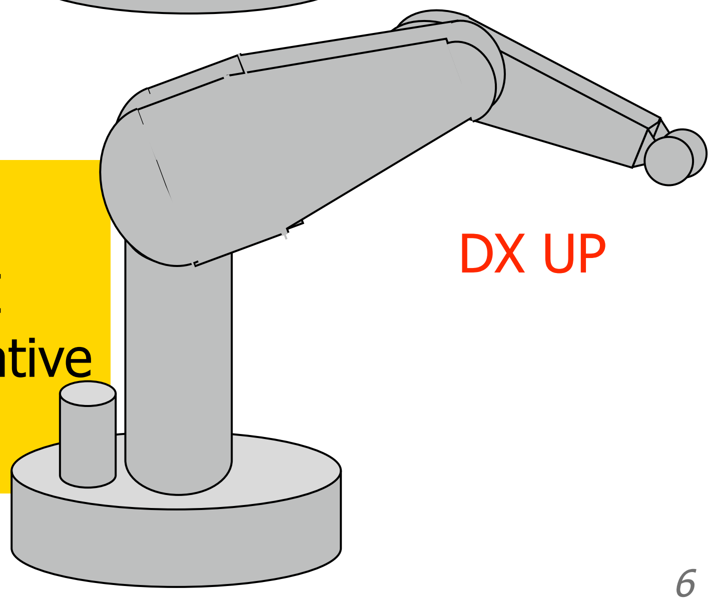


4 soluzioni fuori dalle singolarità

SN UP

8 soluzioni se si considera
anche l'orientamento dell'E-E
(polso sferico: 2 soluzioni alternative
per gli ultimi 3 giunti)

DX UP

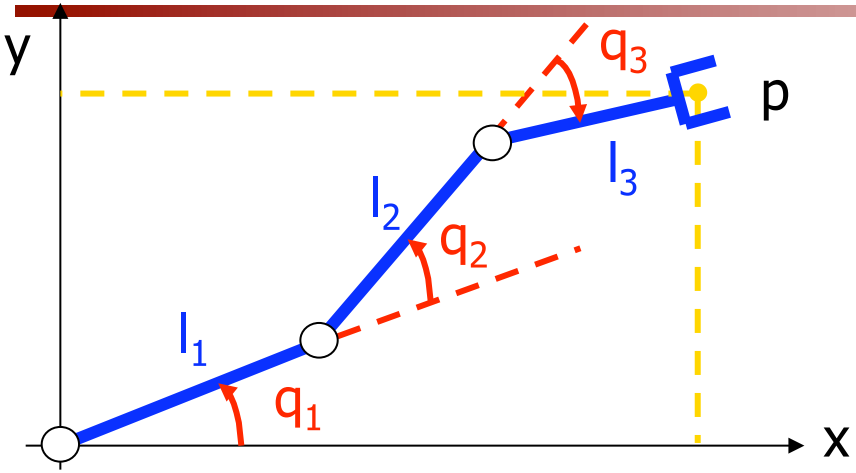


Molteplicità soluzioni

- posizionamento robot 2R planare
  - 2 soluzioni in WS_1
  - 1 soluzione su ∂WS_1
  - per $l_1 = l_2$: ∞ soluzioni in WS_2

  singolari
- posizionamento robot 3R articolato
  - 4 soluzioni in WS_1
- robot 6R
  - $\leq$ 16 soluzioni, fuori dalle singolarità: questo “upper bound” è effettivamente raggiunto da un particolare robot “ortogonale”, cioè con $\alpha_i = 0, \pm\pi/2$ ($\forall$i)
  - analisi basata su trasformazioni algebriche della cinematica in una equazione polinomiale di grado più basso possibile

Spazio di lavoro
robot 3R planare

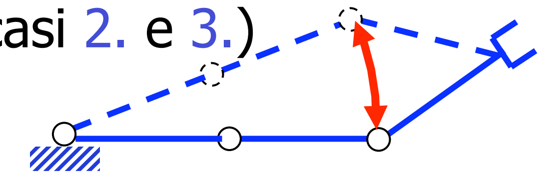


$$l_1 = l_2 = l_3 = \ell$$

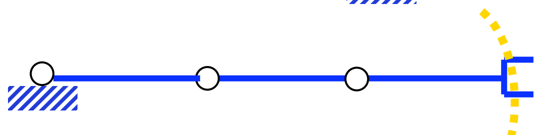
$$WS_1 = \{p \in R^2 : \|p\| \leq 3\ell\}$$

$$WS_2 = \{p \in R^2 : \|p\| \leq \ell\}$$

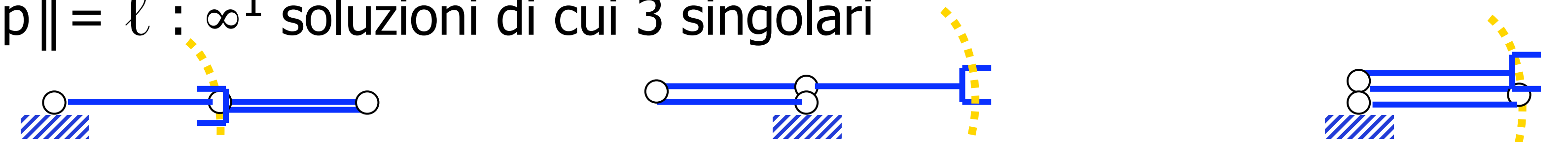
1. in WS_1 : ∞^1 soluzioni tutte "non singolari" (tranne casi 2. e 3.) in cui l'E-E può assumere un *continuum* di ∞ orientamenti (ma non tutti!)



2. if $\|p\| = 3\ell$: 1 soluzione singolare



3. if $\|p\| = \ell$: ∞^1 soluzioni di cui 3 singolari



4. if $\|p\| < \ell$: ∞^1 soluzioni mai singolari, qualsiasi orientamento (WS_2)

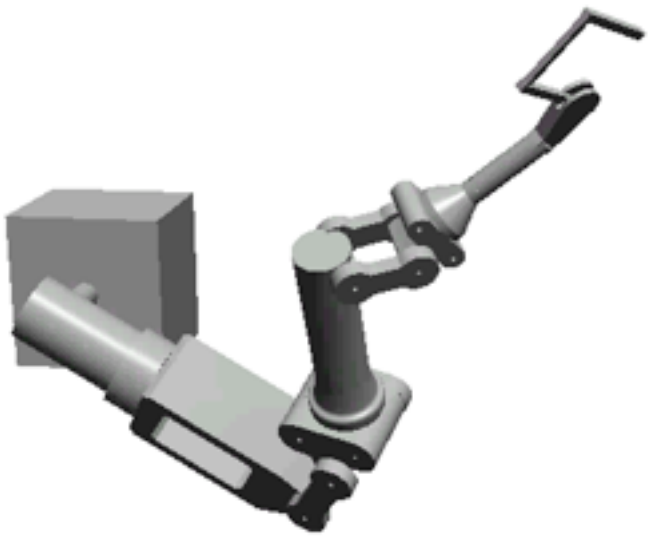
Molteplicità soluzioni
sommario generale dei casi

- se $m = n$
  - $\nexists$ soluzioni
  - soluzioni multiple in numero finito (caso generico)
  - infinite soluzioni degeneri o un numero finito diverso da quello generico (in singolarità)
- se $m < n$ (robot ridondante per il compito)
  - $\nexists$ soluzioni
  - ∞^{n-m} soluzioni
  - soluzioni singolari in numero finito o infinito

Robot Dexter 8R

- m = 6 (posizione e orientamento dell’organo terminale)
- n = 8 (tutti giunti rotatori)
- ∞^2 soluzioni cinematiche inverse (ridondanza)

video



esplorazione delle soluzioni cinematiche inverse con un auto-movimento

Metodi di soluzione

soluzione ANALITICA
(in forma chiusa)

$\rightleftharpoons$

soluzione NUMERICA
(in forma iterativa)

- preferibile, se è possibile trovarla*
- ispezione geometrica ad hoc
- metodi algebrici (soluzione equazioni polinomiali*)
- metodi sistematici di generazione di set minimali di equazioni da risolvere

* condizioni sufficienti per un 6R

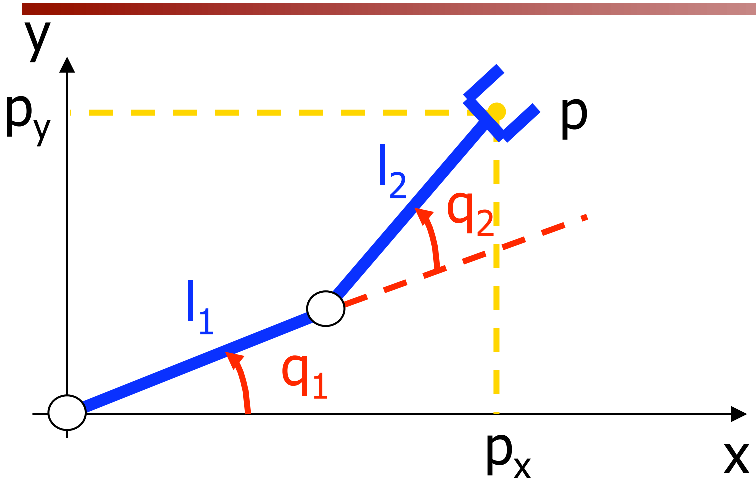
- 3 assi di giunto rotoidali consecutivi incidenti (es. polso sferico), oppure
- 3 assi di giunto rotoidali consecutivi paralleli

- necessaria se n>m (ridondanti) o in singolarità
- più lenta, ma di facile derivazione
- richiede il calcolo dello Jacobiano analitico della cinematica diretta

$$J_r(q) = \frac{\partial f_r(q)}{\partial q}$$

- metodi di Newton, del gradiente, ecc.

Cinematica inversa 2R



cinematica diretta

$$p_x = l_1\, c_1 + l_2\, c_{12}$$

$$\underbrace{p_y}_{\text{dati}} = l_1\, s_1 + l_2\, s_{12}$$

q_1, q_2 incognite

"quadrando e sommando" le equazioni della cinematica diretta

$$p_x^2 + p_y^2 - (l_1^2 + l_2^2) = 2\, l_1\, l_2\, (c_1\, c_{12} + s_1\, s_{12}) = 2\, l_1\, l_2\, c_2$$

da cui

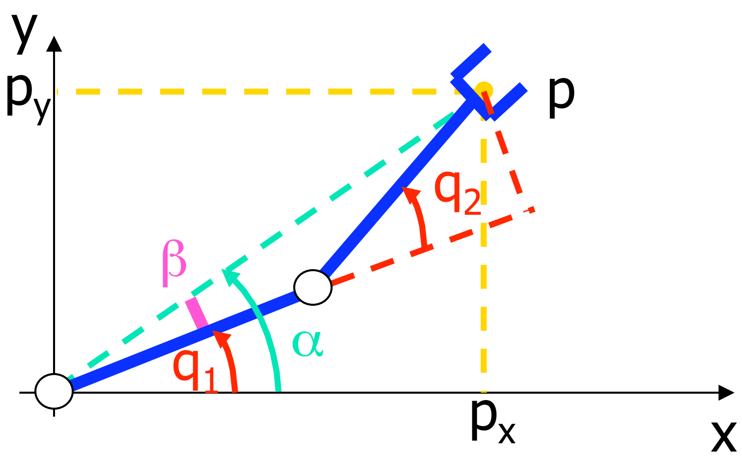
in forma analitica

$$c_2 = (p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2)/\, 2\, l_1\, l_2, \quad s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2}, \quad \boxed{q_2 = \mathrm{ATAN2}\,\{s_2, c_2\}}$$

deve essere in [-1,1] (altrimenti, è fuori dal workspace!)

2 soluzioni

Cinematica inversa 2R (continua)



per ispezione geometrica

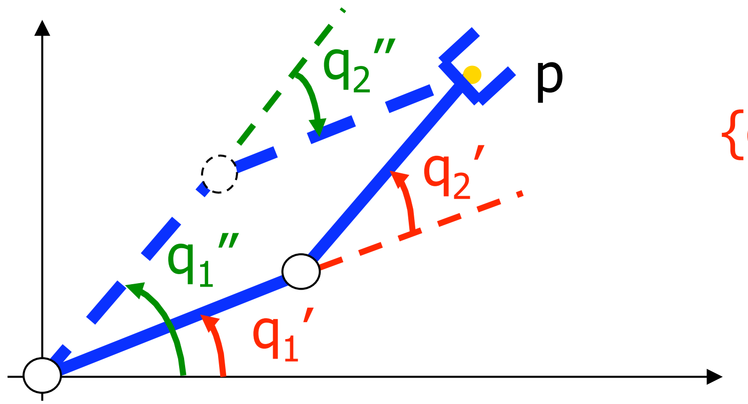
$$q_1 = \alpha - \beta$$

2 soluzioni
(una per ogni valore di s_2)

$$q_1 = \text{ATAN2}\,\{p_y, p_x\} - \text{ATAN2}\,\{l_2\, s_2\,,\, l_1 + l_2\, c_2\}$$

N.B. da riportare eventualmente in $[-\pi\,,\,\pi\,]$!

$\{q_1,q_2\}_{\text{UP/LEFT}}$



$\{q_1,q_2\}_{\text{DW/RIGHT}}$

q_2' e q_2'' uguali in modulo e opposti in segno

Soluzione (algebrica) alternativa

$$p_x = l_1\, c_1 + l_2\, c_{12} = l_1\, c_1 + l_2\, (c_1\, c_2 - s_1\, s_2)$$

$$p_y = l_1\, s_1 + l_2\, s_{12} = l_1\, s_1 + l_2\, (s_1 c_2 + c_1 s_2)$$

lineari in s_1 e c_1

$$\underbrace{\begin{bmatrix} l_1 + l_2 c_2 & -\, l_2\, s_2 \\ l_2 s_2 & l_1 + l_2 c_2 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

$\det = (l_1^2 + l_2^2 + 2\, l_1 l_2 c_2) > 0$

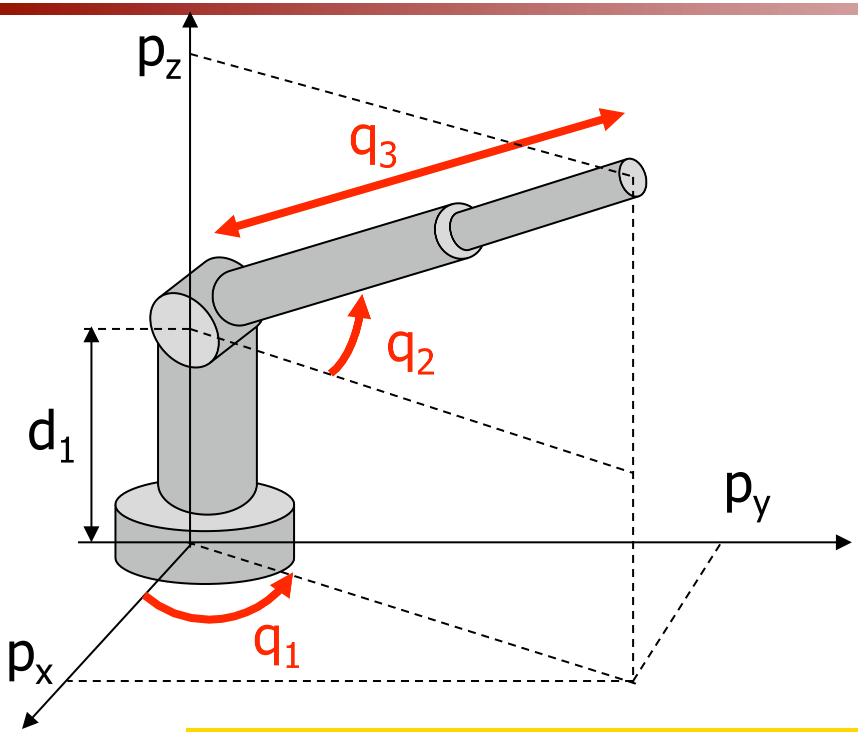
tranne per $l_1 = l_2$ e $c_2 = -1$ per cui q_1 non è definita

$$\boxed{q_1 = \mathrm{ATAN2}\,\{s_1,\, c_1\}}$$

Note: a) automaticamente in $[-\pi\,,\, \pi\,]$!

b) in ATAN2, dalle espressioni di s_1 e c_1 si può togliere il det >0

Cinematica inversa robot polare



$$p_x = q_3\, c_2\, c_1$$
$$p_y = q_3\, c_2\, s_1$$
$$p_z = d_1 + q_3\, s_2$$

$$p_x^2 + p_y^2 + (p_z - d_1)^2 = q_3^2$$

$$\boxed{q_3 = +\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - d_1)^2}}$$

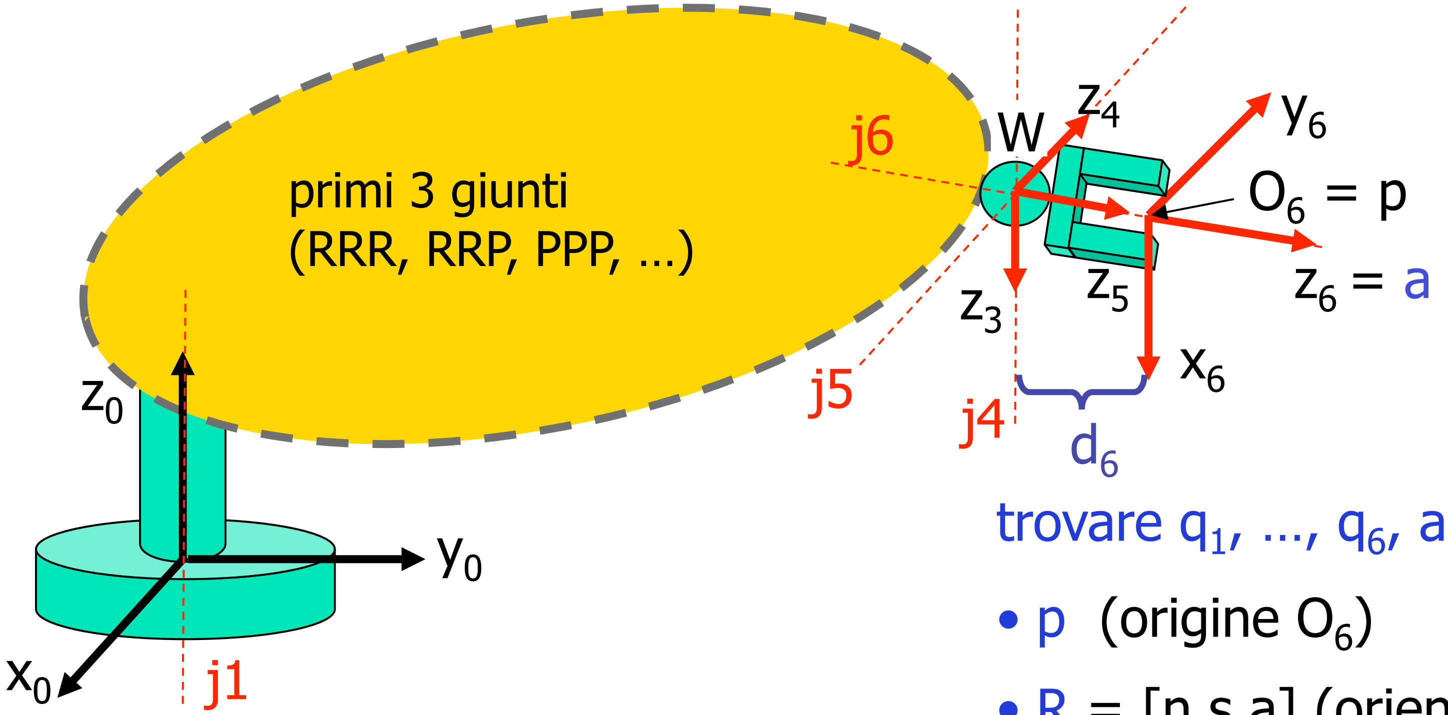
qui solo, $q_3 \geq 0$

$$\boxed{q_2 = \mathrm{ATAN2}\{(p_z - d_1)/q_3,\ \pm\sqrt{(p_x^2 + p_y^2)/q_3^2}\}}$$

se $c_2 \neq 0$, $\boxed{q_1 = \mathrm{ATAN2}\{p_y/c_2,\ p_x/c_2\}}$ (2 soluzioni $\{q_1,q_2,q_3\}$)

altrimenti, q_1 indeterminata (singolarità, ∞ soluzioni)

Cinematica inversa per robot con polso sferico



trovare $q_1, \ldots, q_6$, assegnati:

- p (origine O_6)
- R = [n s a] (orientamento SR_6)

1. $W = p - d_6\, a \;\rightarrow\; q_1, q_2, q_3$ (cinematica inversa struttura portante)
2. $\underset{\text{data}}{R} = {}^0R_3(\underset{\text{nota, dopo 1.}}{q_1, q_2, q_3})\; \underbrace{{}^3R_6(q_4, q_5, q_6)}_{\text{matrice di Eulero ZYZ o ZXZ}} \rightarrow q_4, q_5, q_6$ (cinematica inversa polso)

Esempio 6R: Unimation PUMA 600

polso sferico

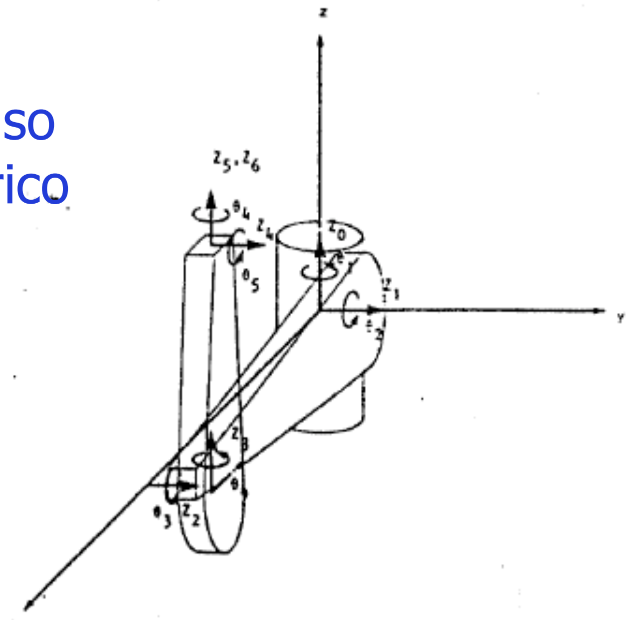


TABLE I
LINK PARAMETERS FOR PUMA ARM

Joint	$\alpha°$	$\theta°$	d	a	Range
1	−90°	θ_1	0	0	θ_1:+/−160°
2	0	θ_2	0	a_2	θ_2:+45 → −225°
3	90°	θ_3	d_3	a_3	θ_3:225° → −45°
4	−90°	θ_4	d_4	0	θ_4:+/−170°
5	90°	θ_5	0	0	θ_5:+/−135°
6	0	θ_6	0	0	θ_6:+/−170°

$a_2 = 17.000$ $\quad a_3 = 0.75$
$d_3 = 4.937$ $\quad d_4 = 17.000$

$$\left.\begin{aligned}
n_x &= C_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] \\
&\quad - S_1[S_4C_5C_6 + C_4S_6] \\
n_y &= S_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] \\
&\quad + C_1[S_4C_5C_6 + C_4S_6] \\
n_z &= -S_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - C_{23}S_5C_6
\end{aligned}\right\}\ {}^0x_6$$

$$\left.\begin{aligned}
o_x &= C_1[-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] \\
&\quad - S_1[-S_4C_5S_6 + C_4C_6] \\
o_y &= S_1[-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] \\
&\quad + C_1[-S_4C_5S_6 + C_4C_6] \\
o_z &= S_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + C_{23}S_5S_6
\end{aligned}\right\}\ {}^0y_6$$

$$\left.\begin{aligned}
a_x &= C_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) - S_1S_4S_5 \\
a_y &= S_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + C_1S_4S_5 \\
a_z &= -S_{23}C_4S_5 + C_{23}C_5
\end{aligned}\right\}\ {}^0z_6$$

$$\begin{aligned}
p_x &= C_1(d_4S_{23} + a_3C_{23} + a_2C_2) - S_1d_3 \\
p_y &= S_1(d_4S_{23} + a_3C_{23} + a_2C_2) + C_1d_3 \\
p_z &= -(-d_4C_{23} + a_3S_{23} + a_2S_2).
\end{aligned}$$

esistono 8 soluzioni inverse in forma chiusa
(vedi Paul, Shimano, Mayer; 1981)

Soluzione numerica della cinematica inversa

- la soluzione analitica di $r = f(q)$ non esiste o è di difficile derivazione
- $J_r(q) = \dfrac{\partial f_r}{\partial q}$ (Jacobiano analitico)
- metodo di Newton (qui nel caso m=n)
  - $r = f_r(q) = f_r(q^k) + J_r(q^k)\,(q - q^k) + o(\|q - q^k\|^2)$ ← si trascura

$$q^{k+1} = q^k + J_r^{-1}(q^k)\,[r - f_r(q^k)]$$

  - converge se q^0 (stima iniziale) sufficientemente vicina a q^*: $f_r(q^*) = r$
  - ha problemi vicino alle singolarità dello Jacobiano $J_r(q)$
  - non si applica per robot ridondanti (m<n) [uso pseudoinversa $J_r^{\#}(q)$]
  - ha convergenza quadratica vicino alla soluzione (rapido!)

Soluzione numerica della cinematica inversa (continua)

- metodo del gradiente (massima discesa)
  - si minimizza la funzione d'errore

$$H(q) = \frac{1}{2} \left\| r - f_r(q) \right\|^2 = \frac{1}{2} [r - f_r(q)]^T [r - f_r(q)]$$

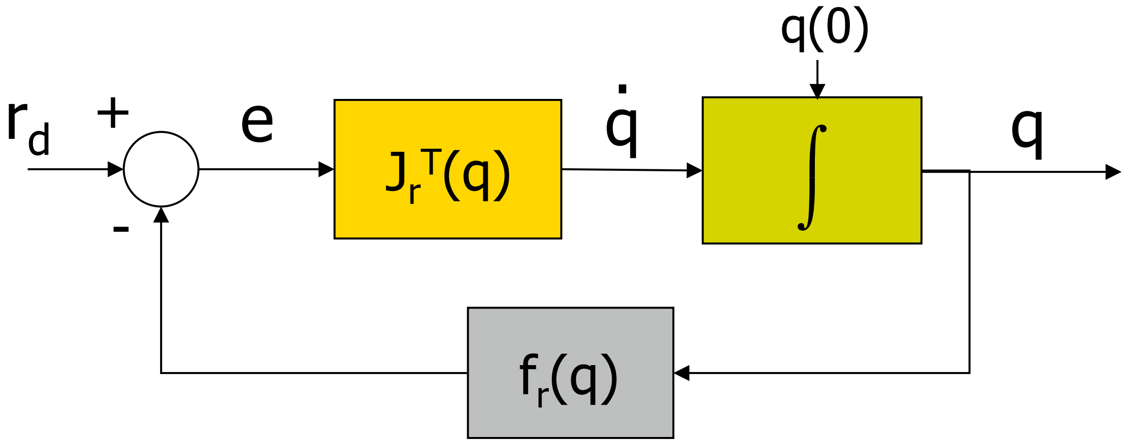
$$q^{k+1} = q^k - \alpha \nabla_q H(q^k)$$

poiché $\nabla H(q) = - J_r^T(q) [r - f_r(q)]$, si ottiene

$$\boxed{q^{k+1} = q^k + \alpha J_r^T(q^k) [r - f_r(q^k)]}$$

  - il passo α deve garantire che la funzione d'errore decresca ad ogni passo (per α troppo grande si potrebbe "scavalcare" il minimo)
  - per α troppo piccolo, la convergenza è eccessivamente lenta

Interpretazione in “feedback”



r_d = cost

(α = 1)

$e = r_d - f_r(q) \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile

$V = \frac{1}{2} e^T e \geq 0$ candidata di Lyapunov

$$\dot{V} = e^T \dot{e} = e^T \frac{d}{dt}(r_d - f_r(q)) = -e^T J_r \dot{q} = -e^T J_r J_r^T e \leq 0$$

$\dot{V} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e \in Ker(J_r^T)$ in particolare $\boxed{e = 0}$

asintotica stabilità

Proprietà dello schema con gradiente

- più semplice dal punto di vista computazionale [Jacobiano trasposto, anziché (pseudo)-invertito]
- si applica direttamente anche a robot ridondanti
- può non convergere a una soluzione, ma non diverge mai
- l'evoluzione della stima a tempo discreto è data da

$$q^{k+1} = q^k + \Delta T\, J_r^T(q^k)\, [r - f(q^k)]$$

che equivale a un passo del metodo del gradiente (con $\alpha = \Delta T$)

- si può accelerare con una matrice di guadagno $K>0$, ponendo

$$\dot{q} = J_r^T(q)\, K\, e$$

nota: K può usarsi per "uscire" da una situazione di stallo in un minimo locale: permette la rotazione dell'errore **e** fuori dal nucleo di J_r^T (se si è incontrata una singolarità)

Considerazioni aggiuntive

- uno schema numerico efficiente coinvolge:
  - iterazioni iniziali con il gradiente (convergenza "sicura", ma più lenta = lineare) e finali con Newton (convergenza terminale con tasso quadratico)
  - scelte
    - inizializzazione q^0 (genera una sola delle soluzioni)
    - passo ottimale α nel metodo del gradiente
    - criteri di arresto

$\|r - f(q^k)\| \leq \varepsilon$

errore cartesiano (evtl. separato per posizione e orientamento)

$\|q^{k+1} - q^k\| \leq \varepsilon_q$

incremento dell'algoritmo

$\sigma_{min}\{J(q^k)\} \geq \sigma_0$

condizionamento dello Jacobiano (SVD)