Corso di Robotica 1

Cinematica differenziale

Prof. Alessandro De Luca

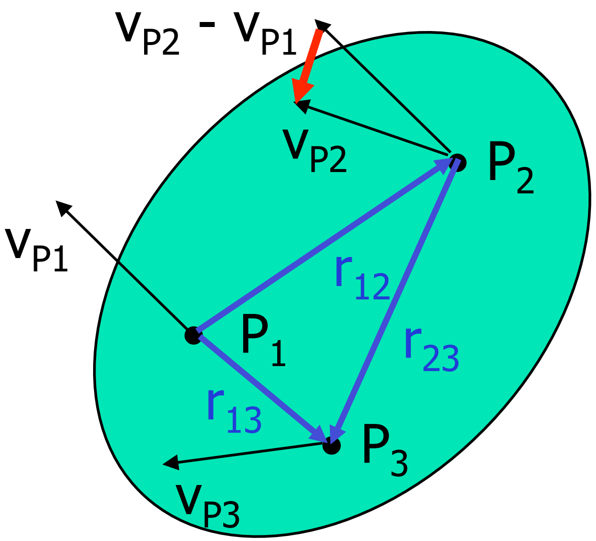
Dipartimento di Informatica e Sistemistica Antonio Ruberti

Sapienza Università di Roma

Cinematica differenziale

- "studio dei legami tra moto (velocità) nello spazio dei giunti e moto (velocità lineare e angolare) nello spazio operativo (cartesiano)"
- i legami tra velocità possono essere ricavati direttamente o passando attraverso la derivata nel tempo della funzione cinematica diretta
  - stabilire il legame tra velocità angolare e
    - derivata temporale della matrice di rotazione
    - derivata temporale dei parametri di una rappresentazione minima dell'orientamento

Velocità angolare di un corpo rigido



vincolo "rigido" di distanza tra punti:
$\|r\|$ = costante

⇒ $v_{Pi} - v_{Pj}$ ortogonale ad r_{ij}

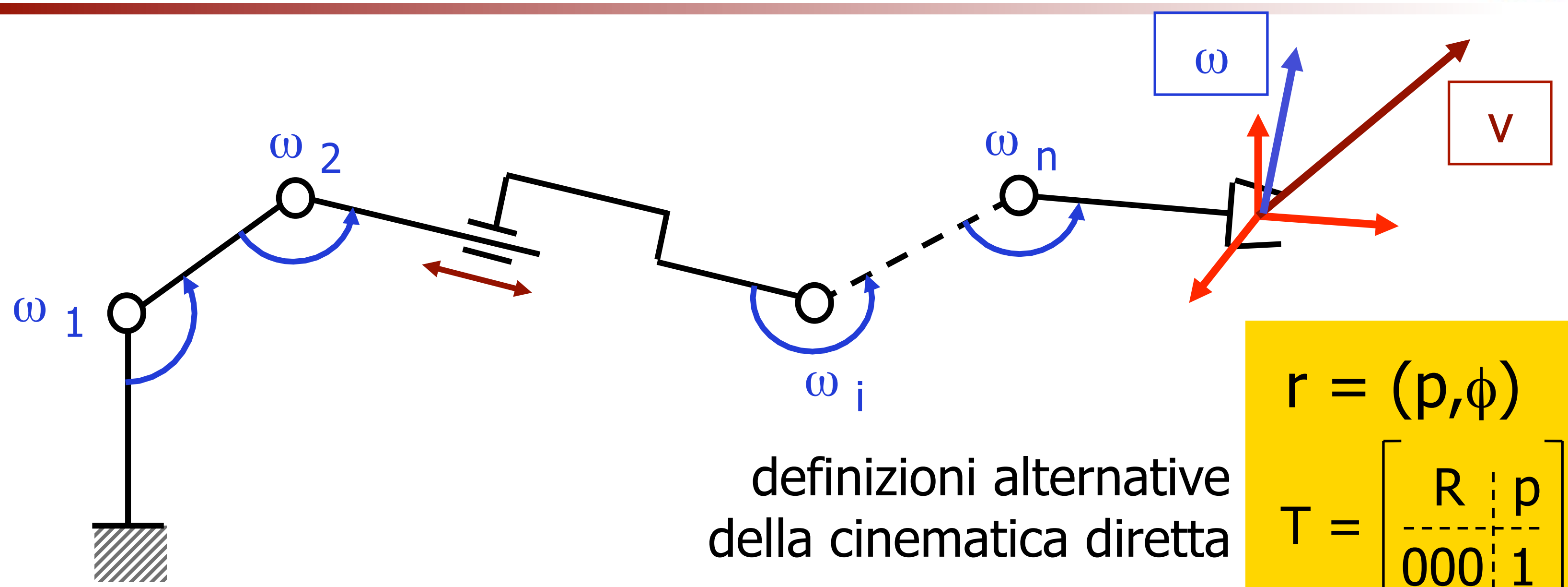
1	$v_{P2} - v_{P1} = \omega_1 \times r_{12}$
2	$v_{P3} - v_{P1} = \omega_1 \times r_{13}$
3	$v_{P3} - v_{P2} = \omega_2 \times r_{23}$

$\forall\, P_1, P_2, P_3$ $\boxed{2 - 1 = 3}$ ⇒ $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$\boxed{v_{Pj} = v_{Pi} + \omega \times r_{ij} = v_{Pi} + S(\omega)\, r_{ij}}$ ⇔ $\boxed{\dot{r}_{ij} = \omega \times r_{ij}}$

- **la velocità angolare** ω **è associata all'intero corpo** (non a singoli punti)
- se $\exists\, P_1$ con $v_{P1} = 0$: moto rotatorio puro (traiettorie circolari di tutti i punti)
- $\omega = 0$: moto traslatorio puro

Velocità angolare dell’E-E



definizioni alternative
della cinematica diretta

$r = (p, \phi)$

$$T = \left[\begin{array}{c|c} R & p \\ \hline 000 & 1 \end{array}\right]$$

- ω è un vettore, ovvero un elemento di uno spazio vettoriale: si può ottenere come somma dei contributi ω_1 , …, ω_n (in qualsiasi ordine)
- viceversa, ϕ (e $d\phi/dt$) non è un elemento di uno spazio vettoriale: la rappresentazione di rotazioni successive, in generale, non si ottiene sommando gli angoli ϕ corrispondenti

$\omega \neq d\phi/dt$ in generale

Moti infinitesimi

- traslazioni (spostamenti lineari) infinitesime

commutano sempre, anche se finite $\rightarrow$ $dp = J_L(q)\, dq$

- rotazioni infinitesime $R(d\phi) = R(d\phi_X, d\phi_Y, d\phi_Z)$

$$R_X(\phi_X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_X & -\sin\phi_X \\ 0 & \sin\phi_X & \cos\phi_X \end{bmatrix} \Leftrightarrow R_X(d\phi_X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\phi_X \\ 0 & d\phi_X & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Y(\phi_Y) = \begin{bmatrix} \cos\phi_Y & 0 & \sin\phi_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi_Y & 0 & \cos\phi_Y \end{bmatrix} \Leftrightarrow R_Y(d\phi_Y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\phi_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ -d\phi_Y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Z(\phi_Z) = \begin{bmatrix} \cos\phi_Z & -\sin\phi_Z & 0 \\ \sin\phi_Z & \cos\phi_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow R_Z(d\phi_Z) = \begin{bmatrix} 1 & -d\phi_Z & 0 \\ d\phi_Z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

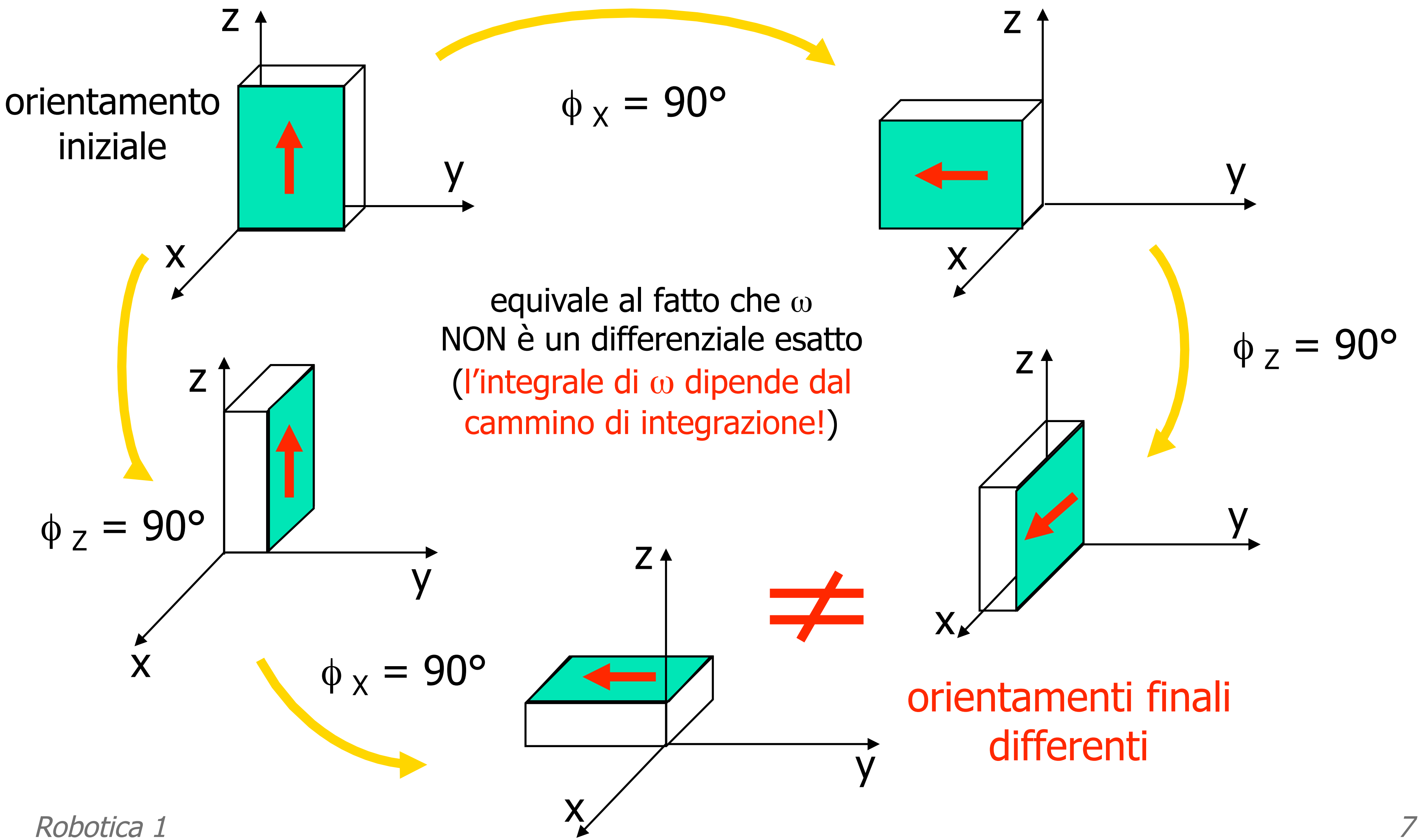
Rotazioni infinitesime

- $R(d\phi) = R(d\phi_X, d\phi_Y, d\phi_Z) = \begin{bmatrix} 1 & -d\phi_z & d\phi_Y \\ d\phi_z & 1 & -d\phi_X \\ -d\phi_Y & d\phi_X & 1 \end{bmatrix}$

  in qualsiasi ordine

  $= I + S(d\phi)$
- rotazioni infinitesime commutano sempre
- rotazioni finite commutano solo se effettuate intorno allo stesso asse fisso

Esempio di rotazioni finite



Derivata temporale di R

- sia $R = R(t)$ una matrice di rotazione funzione del tempo
- poiché $I = R(t)R^T(t)$, derivando entrambi i membri

$$0 = d[R(t)R^T(t)]/dt = dR(t)/dt\, R^T(t) + R(t)\, dR^T(t)/dt$$
$$= dR(t)/dt\, R^T(t) + [dR(t)/dt\, R^T(t)]^T$$

da cui $dR(t)/dt\, R^T(t) = S(t)$ è una matrice antisimmetrica

- sia $p(t) = R(t)p'$ un vettore (di modulo costante) ruotato nel tempo
- dal confronto

$$dp(t)/dt = dR(t)/dt\, p' = S(t)R(t)\, p' = S(t)\, p(t)$$
$$dp(t)/dt = \omega(t) \times p(t) = S(\omega(t))\, p(t)$$

si ha $S = S(\omega)$

$$\boxed{\dot{R} = S(\omega)\, R} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{S(\omega) = \dot{R}\, R^T}$$

Derivata di rotazione elementare

$$R_X(\phi(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi(t) & -\sin\phi(t) \\ 0 & \sin\phi(t) & \cos\phi(t) \end{bmatrix}$$

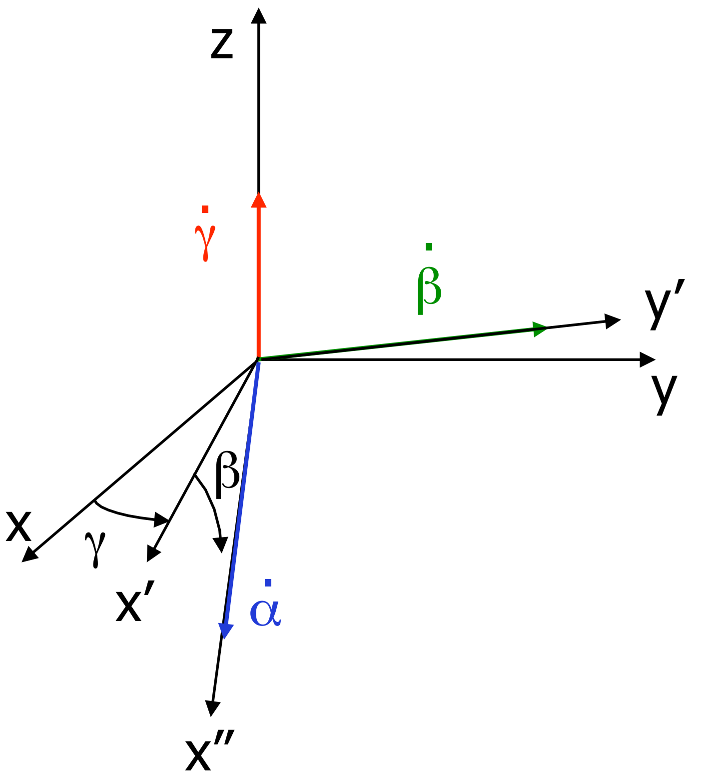
$$\dot{R}_X(\phi)\, R^T_X(\phi) = \dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\phi & -\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} = S(\omega)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Relazione tra derivata angoli RPY e ω

$$R_{RPY}(\alpha_x, \beta_y, \gamma_z) = R_{ZY'X''}(\gamma_z, \beta_y, \alpha_x)$$



$$\omega = \overbrace{\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} c\beta\, c\gamma & -s\gamma & 0 \\ c\beta\, s\gamma & c\gamma & 0 \\ -s\beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x'' & y' & z \end{array} \end{array}}^{T_{RPY}(\beta,\gamma)} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

1a col in $R_{ZY'}(\gamma_z, \beta_y)$ 2a col in $R_Z(\gamma_z)$

$\det T_{RPY}(\beta,\gamma) = c\beta = 0$

per $\beta = \pm\pi/2$
(singolarità della
rappresentazione RPY)

N.B. la trattazione è analoga per gli altri 11 set di rappresentazioni minimali

Matrici Jacobiane

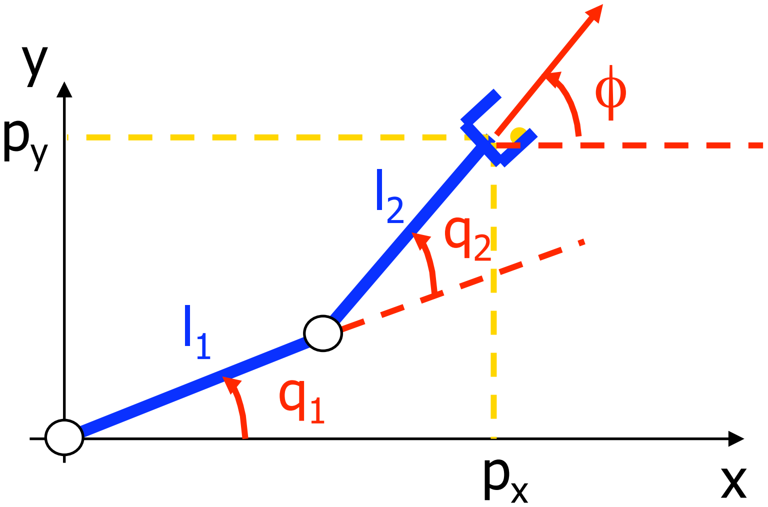
- Jacobiano analitico (ottenuto per differenziazione)

$$r = f_r(q) = \begin{pmatrix} p \\ \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{r} = J_r(q)\,\dot{q} = \frac{\partial f_r(q)}{\partial q}\,\dot{q}$$

- Jacobiano geometrico (nessuna derivata)

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{pmatrix} = J(q)\,\dot{q} = \begin{pmatrix} J_L(q) \\ J_A(q) \end{pmatrix}\dot{q}$$

Jacobiano analitico robot 2R planare



cinematica diretta

$$r \left\{ \begin{array}{l} p_x = l_1\, c_1 + l_2\, c_{12} \\ p_y = l_1\, s_1 + l_2\, s_{12} \\ \phi = q_1 + q_2 \end{array} \right.$$

$$\dot{p}_x = -\, l_1\, s_1\, \dot{q}_1 - l_2\, s_{12}\, (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$\dot{p}_y = l_1\, c_1\, \dot{q}_1 + l_2\, c_{12}\, (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

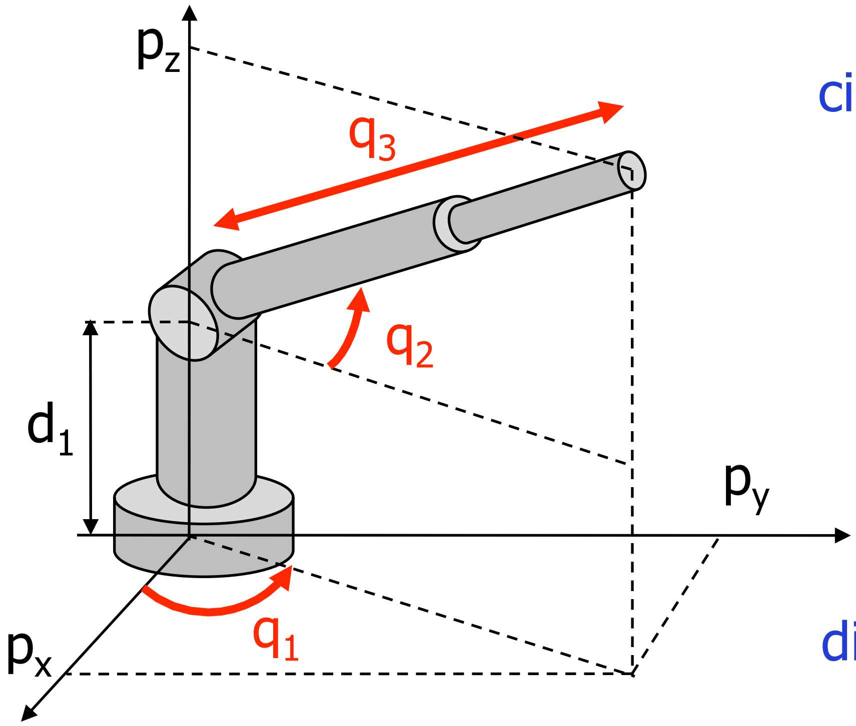
$$\dot{\phi} = \omega_z = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$$

Jacobiano analitico = geometrico

$$J_r(q) = \begin{pmatrix} -\, l_1\, s_1 - l_2\, s_{12} & -\, l_2\, s_{12} \\ l_1\, c_1 + l_2\, c_{12} & l_2\, c_{12} \\ \hline 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \end{array}}\right\} J_L(q) \\ \left.\vphantom{a}\right\} J_A(q) \end{array}$$

data r, qui è una matrice 3 x 2

Jacobiano analitico robot polare



cinematica diretta (qui solo r = p)

$$p_x = q_3\, c_2\, c_1$$

$$p_y = q_3\, c_2\, s_1$$

$$p_z = d_1 + q_3\, s_2$$

differenziando rispetto al tempo

$$v = \dot{p} = \begin{pmatrix} -q_3 c_2 s_1 & -q_3 s_2 c_1 & c_2 c_1 \\ q_3 c_2 c_1 & -q_3 s_2 s_1 & c_2 s_1 \\ 0 & q_3 c_2 & s_2 \end{pmatrix} \dot{q} = J_r(q)\, \dot{q}$$

Jacobiano geometrico

è sempre una matrice 6 x n

velocità **istantanee** dell'E-E

$$\begin{pmatrix} v_E \\ \omega_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_L(q) \\ J_A(q) \end{pmatrix} \dot{q} = \begin{pmatrix} J_{L1}(q) & \cdots & J_{Ln}(q) \\ J_{A1}(q) & \cdots & J_{An}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

sovrapposizione degli effetti

$$v_E = \underbrace{J_{L1}(q)\, \dot{q}_1}_{} + \ldots + J_{Ln}(q)\, \dot{q}_n \qquad \omega_E = \underbrace{J_{A1}(q)\, \dot{q}_1}_{} + \ldots + J_{An}(q)\, \dot{q}_n$$

contributo alla velocità lineare dell'E-E dovuto a $\dot{q}_1$

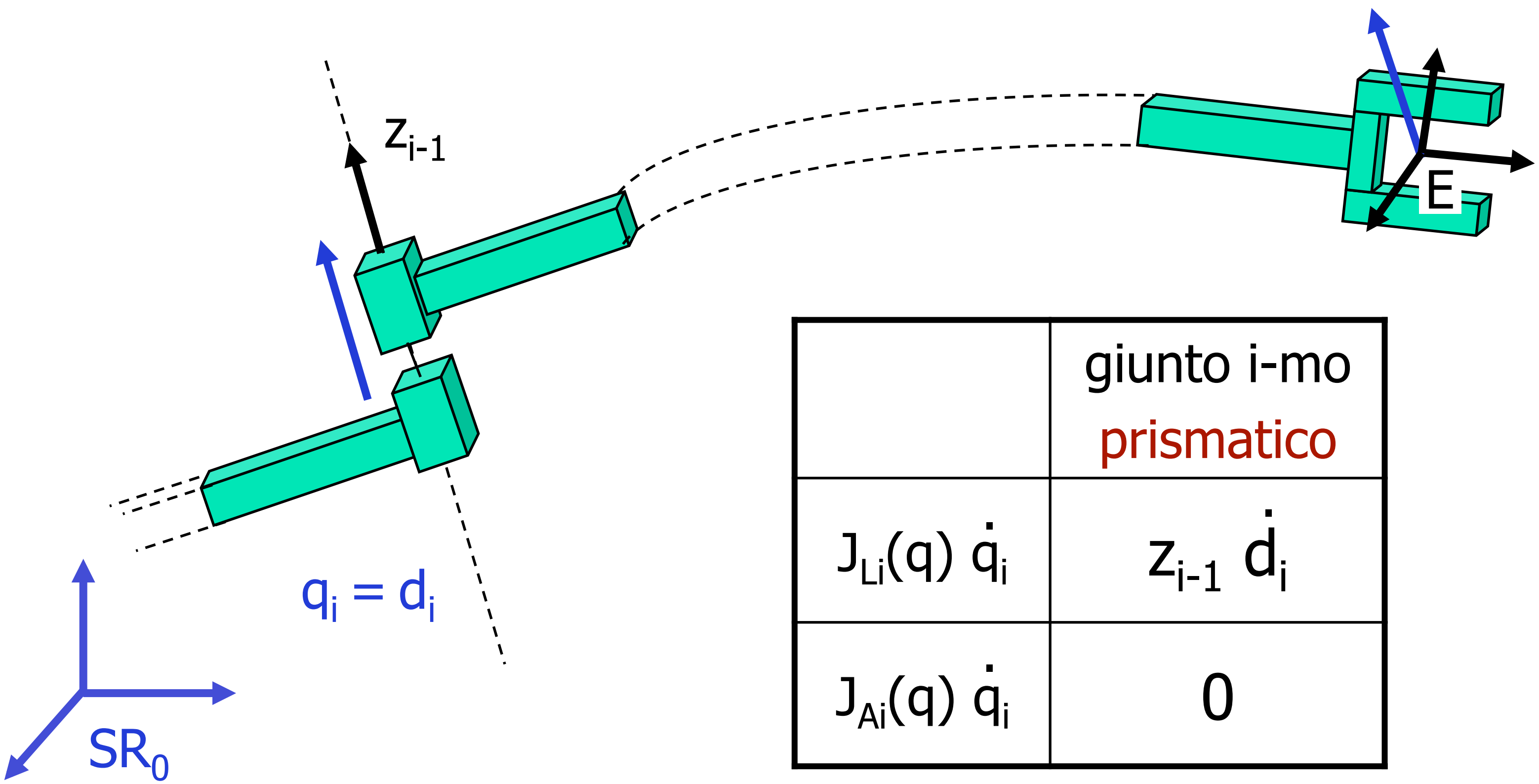
contributo alla velocità angolare dell'E-E dovuto a $\dot{q}_1$

velocità lineare e angolare appartengono a spazi vettoriali (lineari) in R^3

Contributo giunto prismatico

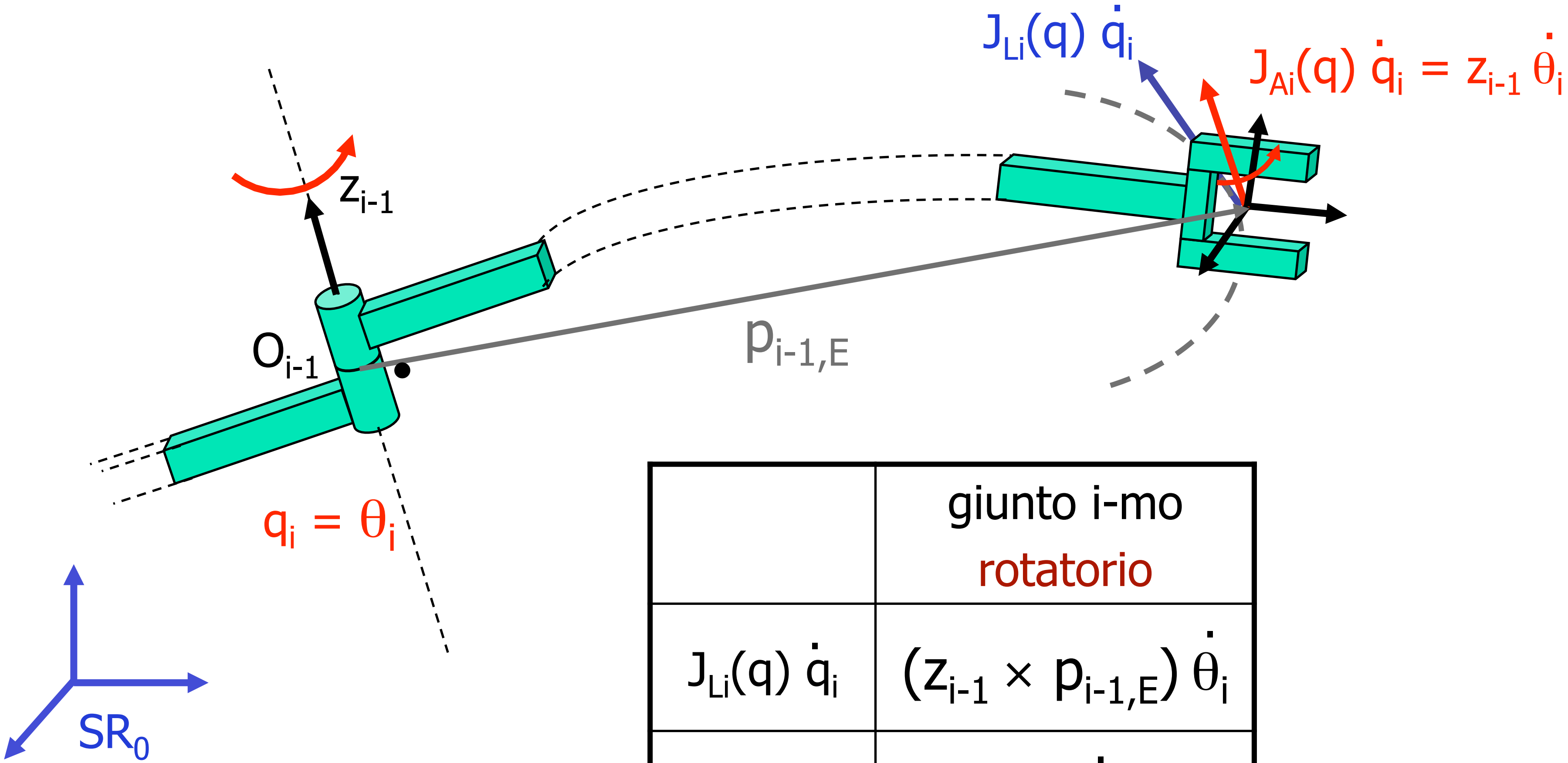
N.B. i giunti a valle dell'i-esimo sono visti come "fermi", per cui la parte distale del robot è un unico corpo rigido

$J_{Li}(q)\,\dot{q}_i = z_{i-1}\,\dot{d}_i$



	giunto i-mo prismatico
$J_{Li}(q)\,\dot{q}_i$	$z_{i-1}\,\dot{d}_i$
$J_{Ai}(q)\,\dot{q}_i$	0

Contributo giunto rotatorio



	giunto i-mo rotatorio
$J_{Li}(q)\,\dot{q}_i$	$(z_{i-1} \times p_{i-1,E})\,\dot{\theta}_i$
$J_{Ai}(q)\,\dot{q}_i$	$z_{i-1}\,\dot{\theta}_i$

Forma finale Jacobiano geometrico

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_{0,E} \\ \omega_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_E \\ \omega_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_L(q) \\ J_A(q) \end{pmatrix} \dot{q} = \begin{pmatrix} J_{L1}(q) & \cdots & J_{Ln}(q) \\ J_{A1}(q) & \cdots & J_{An}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

	giunto i-mo prismatico	giunto i-mo rotatorio
$J_{Li}(q)$	z_{i-1}	$z_{i-1} \times p_{i-1,E}$
$J_{Ai}(q)$	0	z_{i-1}

$$\frac{\partial p_{0,E}}{\partial q_i}$$

$$z_{i-1} = {}^0R_1(q_1)\ldots{}^{i-2}R_{i-1}(q_{i-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p_{i-1,E} = p_{0,E}(q_1,\ldots,q_n) - p_{0,i-1}(q_1,\ldots,q_{i-1})$$

tutti i vettori sono espressi nelle stesse coordinate (quelle della base SR_0)

Esempio: robot 2R planare

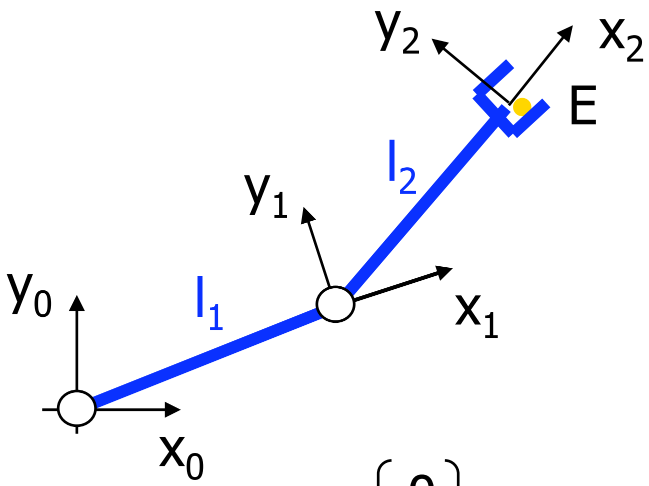


Tabella di DENAVIT-HARTENBERG

giunto	α_i	d_i	a_i	θ_i
1	0	0	l_1	q_1
2	0	0	l_2	q_2

$$z_0 = z_1 = z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

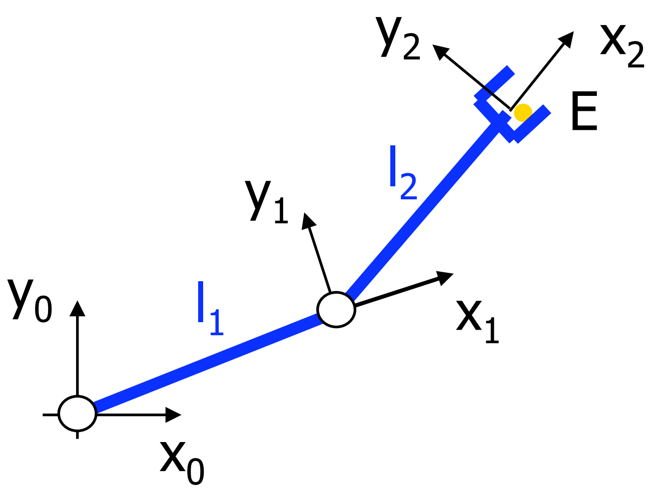
$$^0A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow p_{0,1}$$

$$p_{1,E} = p_{0,E} - p_{0,1}$$

$$J = \begin{bmatrix} z_0 \times p_{0,E} & z_1 \times p_{1,E} \\ z_0 & z_1 \end{bmatrix}$$

$$^0A_2 = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1c_1 + l_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow p_{0,E}$$

Jacobiano geometrico robot 2R planare



$$J = \begin{bmatrix} z_0 \times p_{0,E} & z_1 \times p_{1,E} \\ z_0 & z_1 \end{bmatrix}$$

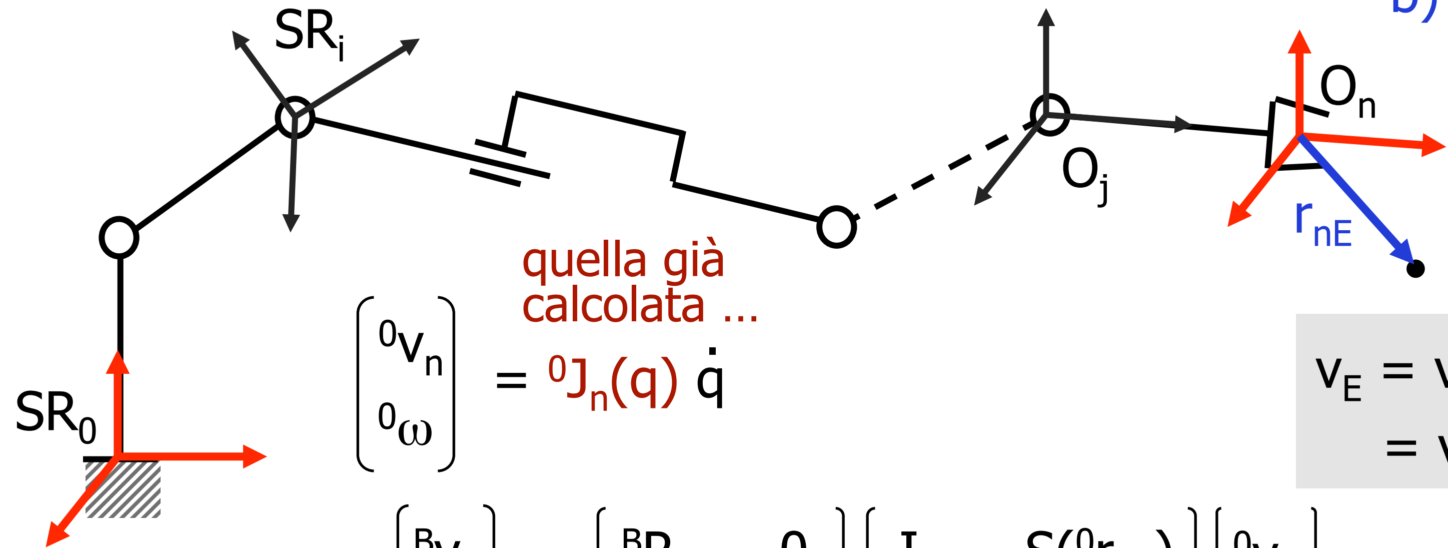
$$= \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

N.B. lo Jacobiano è qui una matrice 6 × 2, quindi di rango massimo pari a 2

⇓

al massimo 2 delle componenti di velocità dell'E-E sono comandabili in modo indipendente

Trasformazioni su Jacobiano geometrico

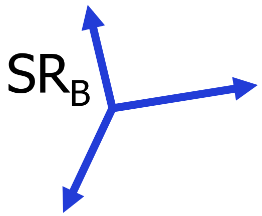


b) potrebbe essere
$E \Rightarrow O_j(q)$

quella già calcolata ...

$$\begin{pmatrix} {}^0v_n \\ {}^0\omega \end{pmatrix} = {}^0J_n(q)\,\dot{q}$$

$$v_E = v_n + \omega \times r_{nE}$$
$$= v_n + S(r_{En})\,\omega$$



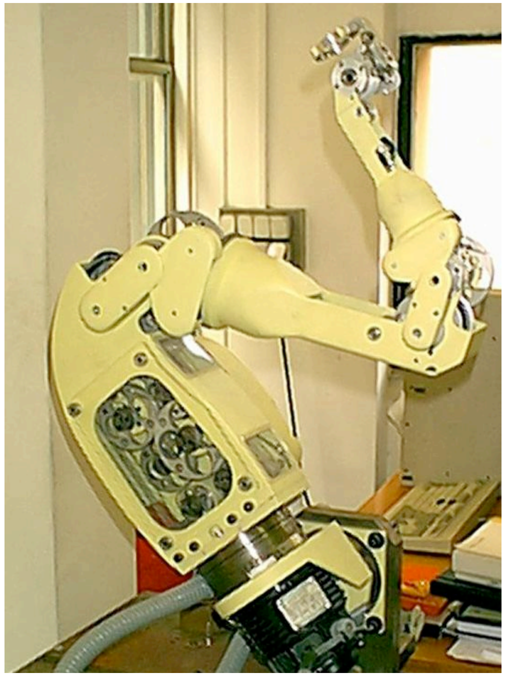
$$\begin{pmatrix} {}^Bv_E \\ {}^B\omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} {}^BR_0 & 0 \\ 0 & {}^BR_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & S({}^0r_{En}) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0v_n \\ {}^0\omega \end{pmatrix}$$

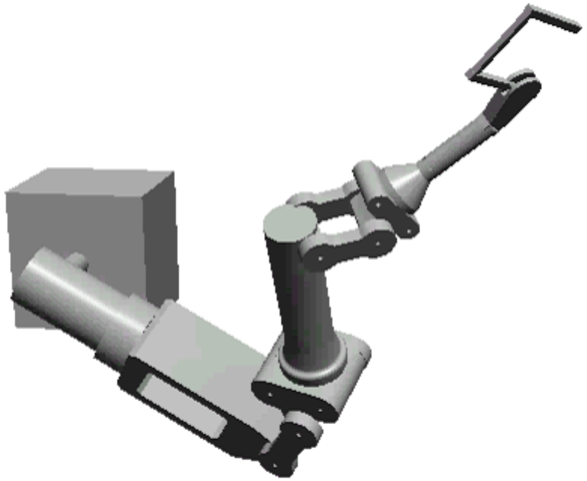
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^BR_0(q) & 0 \\ 0 & {}^BR_0(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & S({}^0r_{En}(q)) \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\text{mai singolari!}} {}^0J_n(q)\,\dot{q} = {}^BJ_E(q)\,\dot{q}$$

a) potrebbe essere
$SR_B \Rightarrow SR_i(q)$

Esempio: Robot Dexter

- braccio manipolatore 8R con trasmissioni a cavi d'acciaio e pulegge (giunti dal 3 all'8)
  - solo circa 15 kg in movimento
  - motori alloggiati nel secondo braccio
  - encoder incrementali (homing)
  - ridondanza cinematica (grado n-m=2)
  - cedevolezza nella interazione





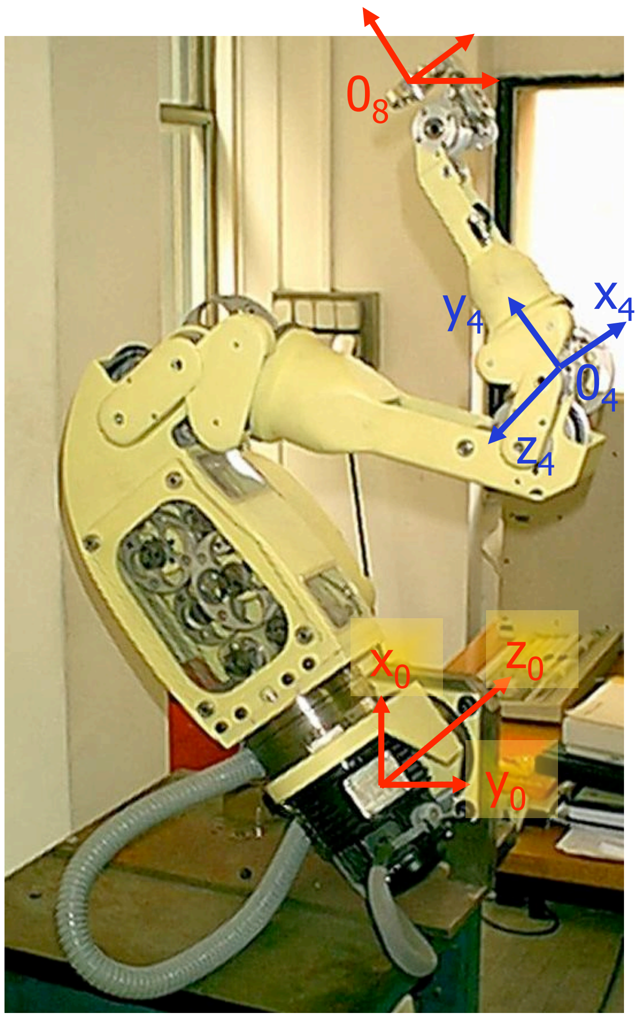
i	a (mm)	d (mm)	α (rad)	range θ (deg)
0	0	0	$-\pi/2$	[-12.56, 179.89]
1	144	450	$-\pi/2$	[-83, 84]
2	0	0	$\pi/2$	[7, 173]
3	100	350	$\pi/2$	[65, 295]
4	0	0	$-\pi/2$	[-174, -3]
5	24	250	$-\pi/2$	[57, 265]
6	0	0	$-\pi/2$	[-129.99, -45]
7	100	0	π	[-55.05, 30]

Jacobiano mid-frame del robot Dexter

- Jacobiano geometrico ${}^0J_8(q)$ molto complesso
- Jacobiano "mid-frame" ${}^4J_4(q)$ relativamente semplice!

$$
{}^4\hat{J}_4 = \begin{bmatrix}
d_1 s_1 s_3 + d_3 s_3 c_2 s_1 - a_1 c_3 c_1 s_2 - d_1 c_3 c_1 c_2 - d_3 c_1 c_3 & a_1 s_3 + d_3 s_3 s_2 & d_3 c_3 & 0 & 0 & 0 & -a_5 s_4 - d_5 c_5 c_4 & -a_5 s_5 c_4 c_6 + d_5 s_5 s_6 c_4 \\
-a_3 s_3 c_2 s_1 + a_3 c_3 c_1 + a_1 c_1 c_2 - d_1 c_1 s_2 & -a_3 s_3 s_2 & -a_3 c_3 & 0 & 0 & 0 & -d_5 c_5 s_4 + a_5 c_4 & d_5 s_5 s_6 s_4 - a_5 s_5 s_4 c_6 \\
-d_3 c_3 c_2 s_1 - a_1 s_3 c_1 s_2 - d_1 s_3 c_1 c_2 - d_3 s_3 c_1 - d_1 s_1 c_3 + a_3 s_2 s_1 & -a_1 c_3 - d_3 c_3 s_2 - a_3 c_2 & d_3 s_3 & -a_3 & 0 & 0 & d_5 s_5 & -a_5 c_6 c_5 + d_5 c_5 s_6 \\
-c_3 c_2 s_1 - s_3 c_1 & -c_3 s_2 & s_3 & 0 & 0 & -s_4 & -c_4 s_5 & -c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6 \\
-s_2 s_1 & c_2 & 0 & 1 & 0 & c_4 & -s_4 s_5 & -s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 \\
-s_3 c_2 s_1 + c_3 c_1 & -s_3 s_2 & -c_3 & 0 & 1 & 0 & -c_5 & s_5 s_6
\end{bmatrix}
$$

6 righe,
8 colonne



Relazioni tra espressioni differenziali

$\dot{p} \rightleftarrows v$ $\qquad \dot{p} = v$

$\dot{\phi} \rightleftarrows \omega$ $\qquad \omega = \omega_{\dot{\phi}_1} + \omega_{\dot{\phi}_2} + \omega_{\dot{\phi}_3} = a_1\,\dot{\phi}_1 + a_2(\phi_1)\,\dot{\phi}_2 + a_3(\phi_1, \phi_2)\,\dot{\phi}_3 = T(\phi)\dot{\phi}$

assi intorno ai quali è definita la sequenza di rotazioni ϕ_i

$$r = \begin{pmatrix} p \\ \phi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad J(q) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T(\phi) \end{pmatrix} J_r(q) \qquad J_r(q) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T^{-1}(\phi) \end{pmatrix} J(q)$$

$T(\phi)$ ha sempre una singolarità $\Leftrightarrow$ singolarità della particolare rappresentazione minima dell'orientamento

---

$\dot{R} \rightleftarrows \omega$ $\qquad \dot{R} = S(\omega)\,R \quad \Leftrightarrow$ per ogni colonna r_i di R (versore di una terna ortonormale) risulta infatti

$$\dot{r}_i = \omega \times r_i$$

Legami in accelerazione (e oltre ...)

Cinematica differenziale di ordine superiore

- i legami differenziali tra moto nello spazio dei giunti e moto nello spazio operativo si estendono al secondo ordine, terzo ordine, e via dicendo
- lo Jacobiano analitico “pesa” sempre le derivate di ordine massimo

velocità $\dot{r} = J_r(q)\,\dot{q}$

funzione matriciale $N_2(q,\dot{q})$

accelerazione $\ddot{r} = J_r(q)\,\ddot{q} + \dot{J}_r(q)\,\dot{q}$

jerk $\dddot{r} = J_r(q)\,\dddot{q} + 2\,\dot{J}_r(q)\,\ddot{q} + \ddot{J}_r(q)\,\dot{q}$

funzione matriciale $N_3(q,\dot{q},\ddot{q})$

snap $\ddddot{r} = J_r(q)\,\ddddot{q} + \dots$

- in modo analogo, si può procedere con lo Jacobiano geometrico

Richiami di algebra lineare

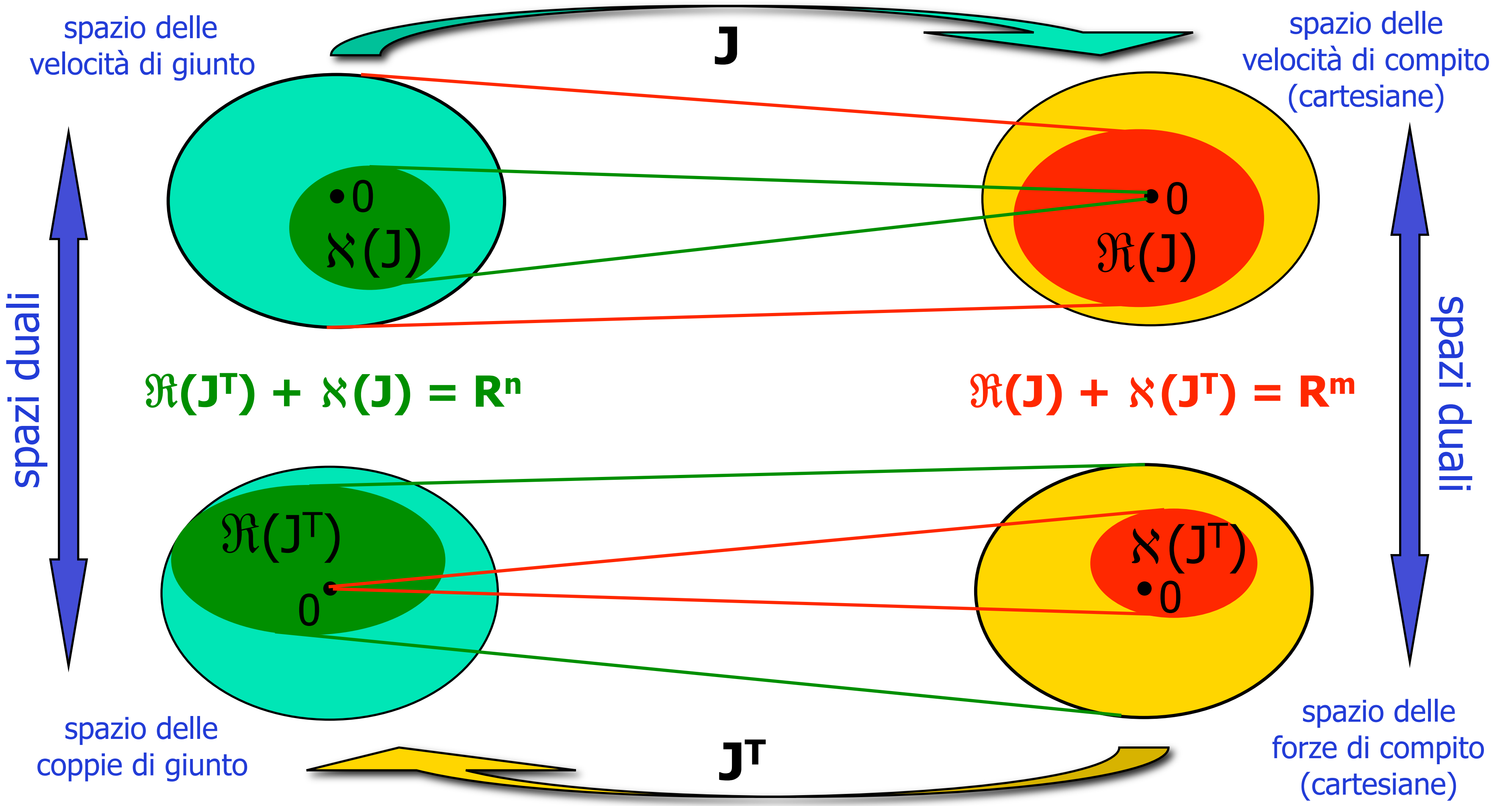
data una matrice J: $m \times n$ (m righe, n colonne)

- rango $\rho(J)$ = max # di righe o colonne linearmente indipendenti
  - $\rho(J) \leq \min(m,n)$ (se vale l'uguale, J ha "rango pieno")
  - se $m = n$ e J ha rango pieno, J è "non singolare" e l'inversa J^{-1} è definita
  - $\rho(J)$ = dimensione della più grande sottomatrice quadrata non singolare di J
- immagine $\Re(J)$ = spazio vettoriale generato da tutte le combinazioni lineari delle colonne di J

$$\Re(J)=\{v \in R^m : \exists\, \xi \in R^n,\ v = J\,\xi\}$$

  - dimensione $\dim(\Re(J)) = \rho(J)$
- nucleo $\aleph(J)$ = spazio vettoriale di tutti i vettori $\xi \in R^n$ tali che $J \cdot \xi = 0$
  - $\dim(\aleph(J)) = n - \rho(J)$
- $\boxed{\Re(J) + \aleph(J^T) = R^m}$ e $\boxed{\Re(J^T) + \aleph(J) = R^n}$
  - somma di spazi vettoriali $V_1 + V_2$ = spazio vettoriale di tutti i vettori v che possono scriversi come $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$

Jacobiano del robot:
decomposizione in sottospazi lineari di interesse e dualità



(in una data configurazione q)

Jacobiano e analisi della mobilità

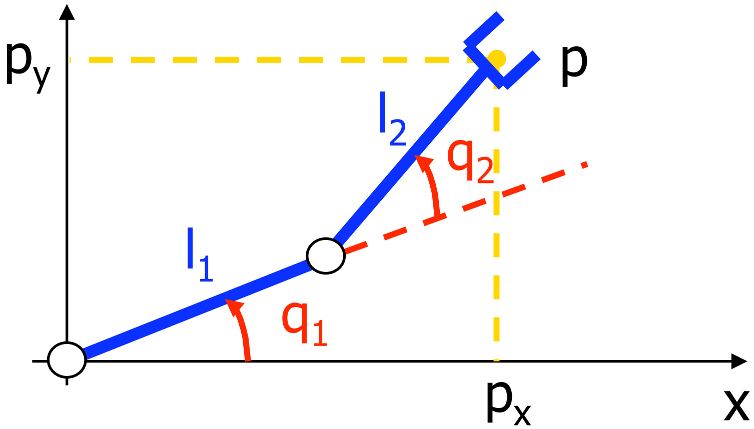
- $\rho(J) = \rho(J(q))$, $\Re(J) = \Re(J(q))$, $\aleph(J^T) = \aleph(J^T(q))$ sono definiti localmente, cioè dipendono dalla configurazione q
- $\Re(J(q))$ = spazio delle velocità "generalizzate" (cioè con componenti lineari e/o angolari) che possono essere assunte (istantaneamente a partire dalla configurazione q) dall'end-effector al variare delle velocità di giunto
- se J(q) ha rango massimo (in genere = m), nella configurazione q il robot può muovere il suo end-effector in tutte le direzioni dello spazio operativo R^m
- se $\rho(J(q)) < m$, esistono direzioni di R^m in cui l'E-E non può muoversi, [sono le direzioni in $\aleph(J^T)$, ovvero il complemento di $\Re(J(q))$ rispetto allo spazio operativo, di dimensione m - $\rho(J(q))$]
- se $\aleph(J(q)) \neq \{0\}$ (sempre se m<n, ossia nei robot ridondanti), esistono velocità di giunto che non forniscono velocità all'E-E ("automovimenti")

Singolarità cinematiche

- **sono configurazioni in cui si ha caduta di rango dello Jacobiano**

  ⇔ perdita di mobilità dell'E-E del robot
- corrispondono in generale a configurazioni nelle quali il numero di soluzioni della cinematica inversa non è quello "generico"
- in tali configurazioni non è possibile invertire la cinematica differenziale, ovvero trovare velocità di giunto che realizzino una arbitraria velocità dell'organo terminale del robot
- "vicino" ad una singolarità potrebbero essere necessarie velocità di giunto elevate per ottenere una velocità anche bassa dell'E-E
- conoscere le singolarità aiuta ad evitarle nella pianificazione e nel controllo del moto
- se $m = n$, bisogna trovare le configurazioni q in cui $\det J(q) = 0$
- se $m < n$, le singolarità sono le configurazioni q in cui tutte le sottomatrici $m \times m$ di J sono singolari (caduta di rango della matrice)
- il calcolo delle singolarità può essere oneroso computazionalmente

Singolarità del robot 2R planare



cinematica diretta

$$p_x = l_1\, c_1 + l_2\, c_{12}$$

$$p_y = l_1\, s_1 + l_2\, s_{12}$$

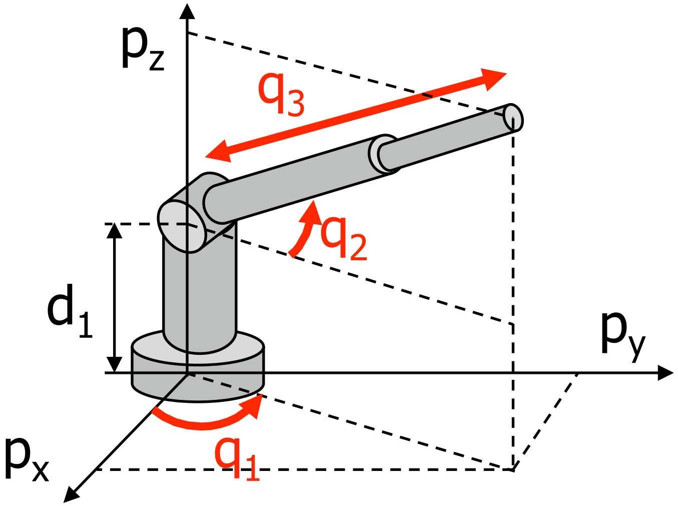
Jacobiano analitico

$$\dot{p} = \begin{pmatrix} -\, l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -\, l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{pmatrix} \dot{q} = J(q)\, \dot{q}$$

$$\det J(q) = l_1 l_2 s_2$$

- singolarità: braccio steso (q_2=0) e ripiegato (q_2= π)
- sono sulla frontiera del workspace e separano le zone con soluzioni cinematiche inverse distinte (“elbow up” o “down”)

Singolarità del robot polare (RRP)



$\det J(q) = q_3^2\, c_2$

cinematica diretta

$$p_x = q_3\, c_2\, c_1$$

$$p_y = q_3\, c_2\, s_1$$

$$p_z = d_1 + q_3\, s_2$$

Jacobiano analitico

$$\dot{p} = \begin{pmatrix} -q_3 s_1 c_2 & -q_3 c_1 s_2 & c_1 c_2 \\ -q_3 c_1 c_2 & -q_3 s_1 s_2 & s_1 c_2 \\ 0 & q_3 c_2 & s_2 \end{pmatrix} \dot{q} = J(q)\, \dot{q}$$

- singolarità: terzo braccio tutto ritratto (q_3=0) o disposto lungo l'asse z (q_2= $\pm\, \pi/2$); se avvengono entrambi, il rango di J scende a uno
- tutte le configurazioni singolari corrispondono qui a punti cartesiani interni allo spazio di lavoro (in assenza di limiti per il giunto prismatico)

Singolarità robot con polso sferico

- $n = 6$, ultimi tre assi rotatori e incidenti in un punto
- senza perdità di generalità si può porre $O_6 = W =$ centro polso sferico (ovvero con $d_6 = 0$)

$$J(q) = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$$

- l'inversione della J è semplificata
- risulta $\det J(q_1,\ldots,q_5) = \det J_{11} \cdot \det J_{22}$
  - $\det J_{11}(q_1,\ldots,q_3) = 0$ fornisce le singolarità di struttura
  - $\det J_{22}(q_1,\ldots,q_5) = 0$ fornisce le singolarità di polso
- poiché $J_{22} = [z_3\ z_4\ z_5]$, le singolarità di polso corrispondono al caso di assi $z_3\ z_4\ z_5$ linearmente dipendenti $\Rightarrow$ $q_5 = 0$ oppure $q_5 = \pm\pi/2$