Corso di Robotica 1

Pianificazione di traiettorie nello spazio cartesiano

Prof. Alessandro De Luca

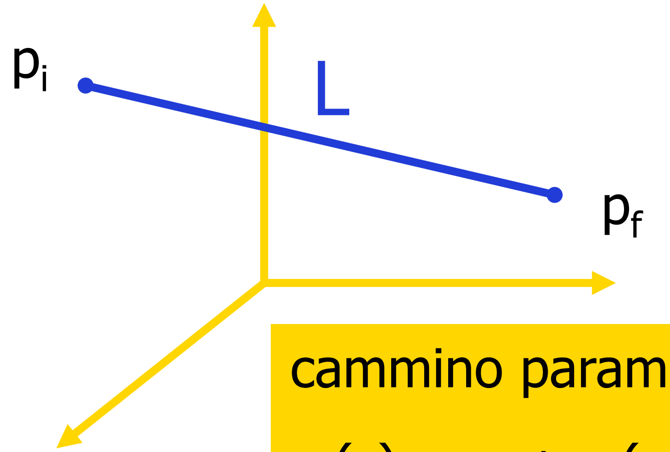
Dipartimento di Informatica e Sistemistica Antonio Ruberti

Sapienza Università di Roma

Traiettorie nello spazio cartesiano

- le tecniche di pianificazione nello spazio dei giunti si possono applicare in generale anche nello spazio cartesiano
- una pianificazione per l'orientamento basata su (tre) parametri minimali che identificano la posa non favorisce la visualizzazione dell'andamento complessivo in 3D
- si cerca comunque di pianificare separatamente per posizione e orientamento
- normalmente i nodi di posizione da interpolare nello spazio cartesiano sono pochi (es., P-T-P: 2 nodi, se aggiungo un "via point" diventano 3): si possono usare funzioni spaziali interpolanti più semplici (tipicamente, rette)

Esempio di traiettoria cartesiana
(solo posizione)



ASSEGNATI

p_i, p_f, v_{max}, a_{max}

v_i, v_f (tipicamente 0)

$$L = \| p_f - p_i \|$$

$$\frac{p_f - p_i}{\| p_f - p_i \|} = \text{versore dei coseni direttori della retta}$$

cammino parametrico

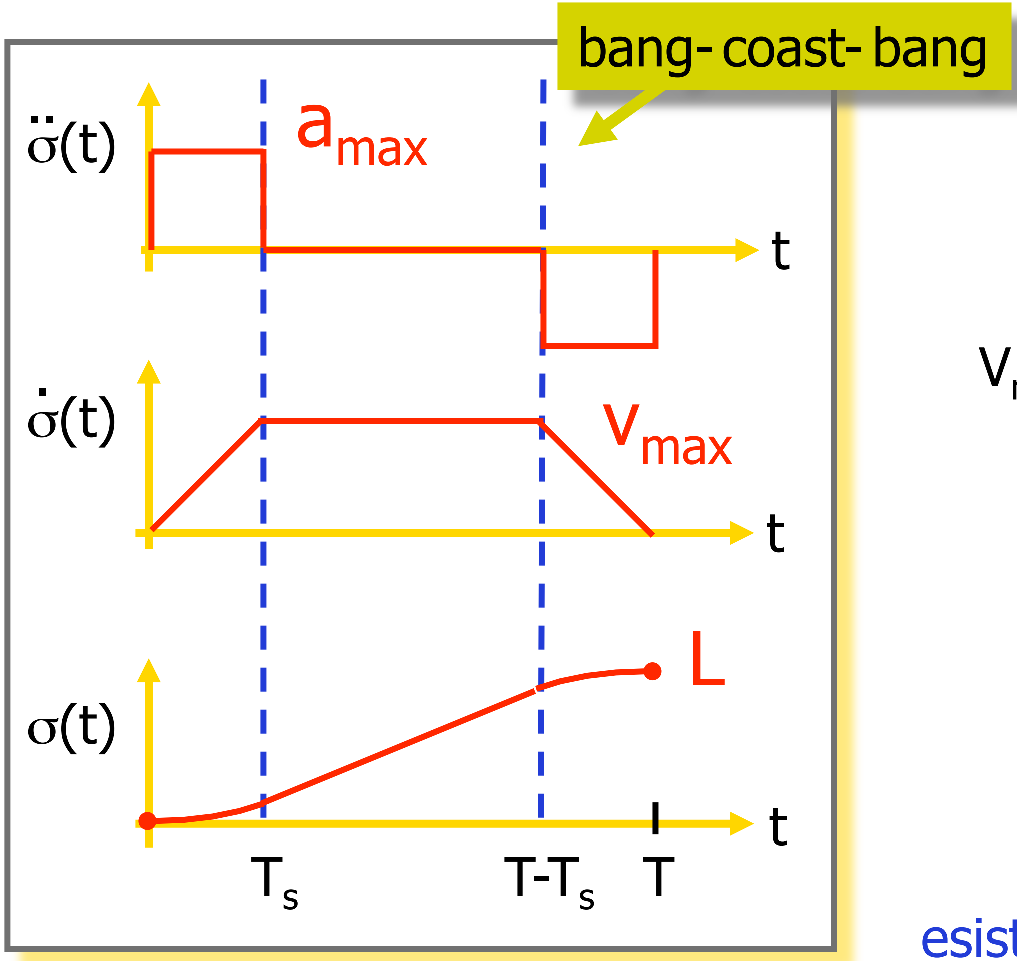
$$p(s) = p_i + s\,(p_f - p_i)$$

$s \in [0,1]$ ← se pongo $s = \sigma/L$, $\sigma \in [0,L]$ è l'ascissa curvilinea (lunghezza del cammino percorso)

$$\dot{p}(s) = \frac{dp}{ds}\,\dot{s} = (p_f - p_i)\,\dot{s} = \frac{p_f - p_i}{L}\,\dot{\sigma}$$

$$\ddot{p}(s) = \cancel{\frac{d^2p}{ds^2}}\,\dot{s}^2 + \frac{dp}{ds}\,\ddot{s} = (p_f - p_i)\,\ddot{s} = \frac{p_f - p_i}{L}\,\ddot{\sigma}$$

Legge oraria con velocità trapezoidale - 1



assegnati*: L, v_{max}, a_{max}
determinare: T_s, T

$$V_{max}\,(T - T_s) = L$$ ← area trapezio velocità

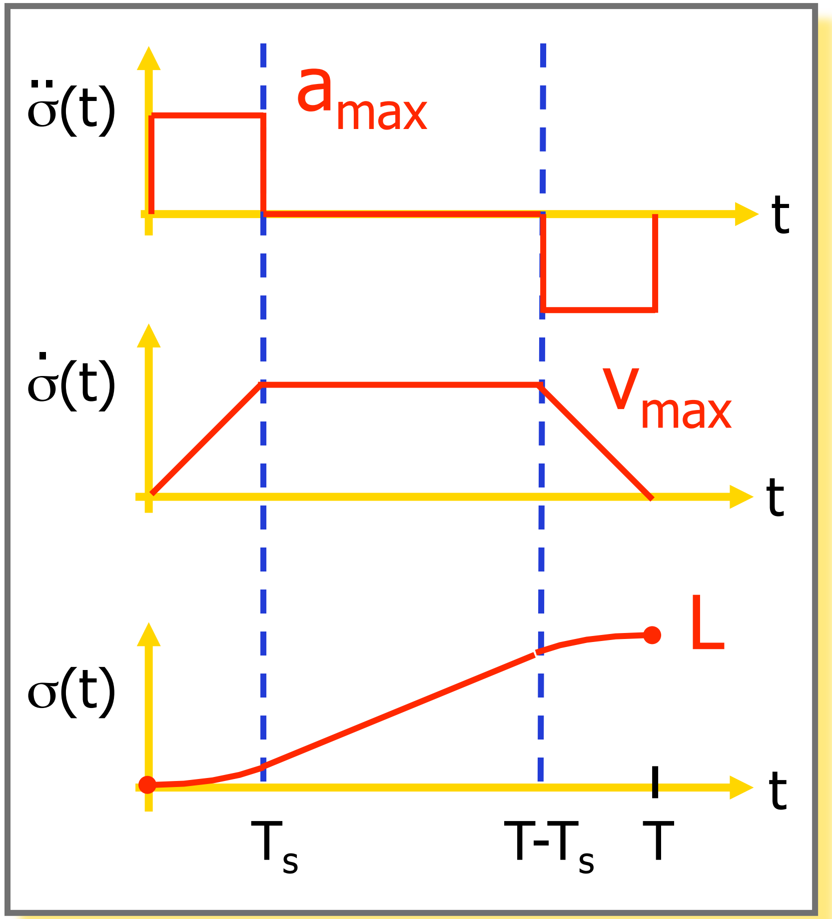
$$T_s = \frac{v_{max}}{a_{max}}$$

$$T = \frac{L\,a_{max} + v_{max}^2}{a_{max}v_{max}}$$

esistenza fase "coast": $L > v_{max}^2/a_{max}$

* = sono possibili altre combinazioni di dati in ingresso (vedi libro)

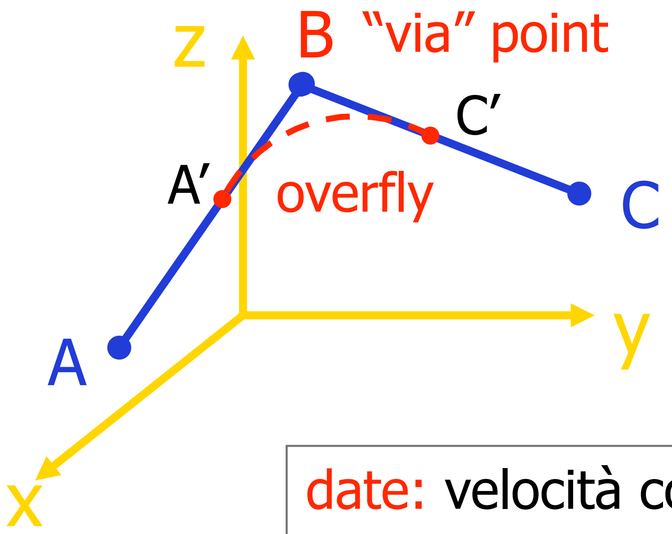
Legge oraria con velocità trapezoidale - 2



$$\sigma(t) = \begin{cases} a_{max}\, t^2/2 & t \in [0, T_s] \\ v_{max}\, t - \dfrac{v_{max}^2}{2\, a_{max}} & t \in [T_s, T-T_s] \\ -\, a_{max}\, (t-T)^2/2 + v_{max}\, T - \dfrac{v_{max}^2}{a_{max}} & t \in [T-T_s, T] \end{cases}$$

si può usare anche nello spazio dei giunti!

Concatenazione di traiettorie rettilinee



$$\frac{B - A}{\| B - A \|} = K_{AB}$$

$$\frac{C - B}{\| C - B \|} = K_{BC}$$

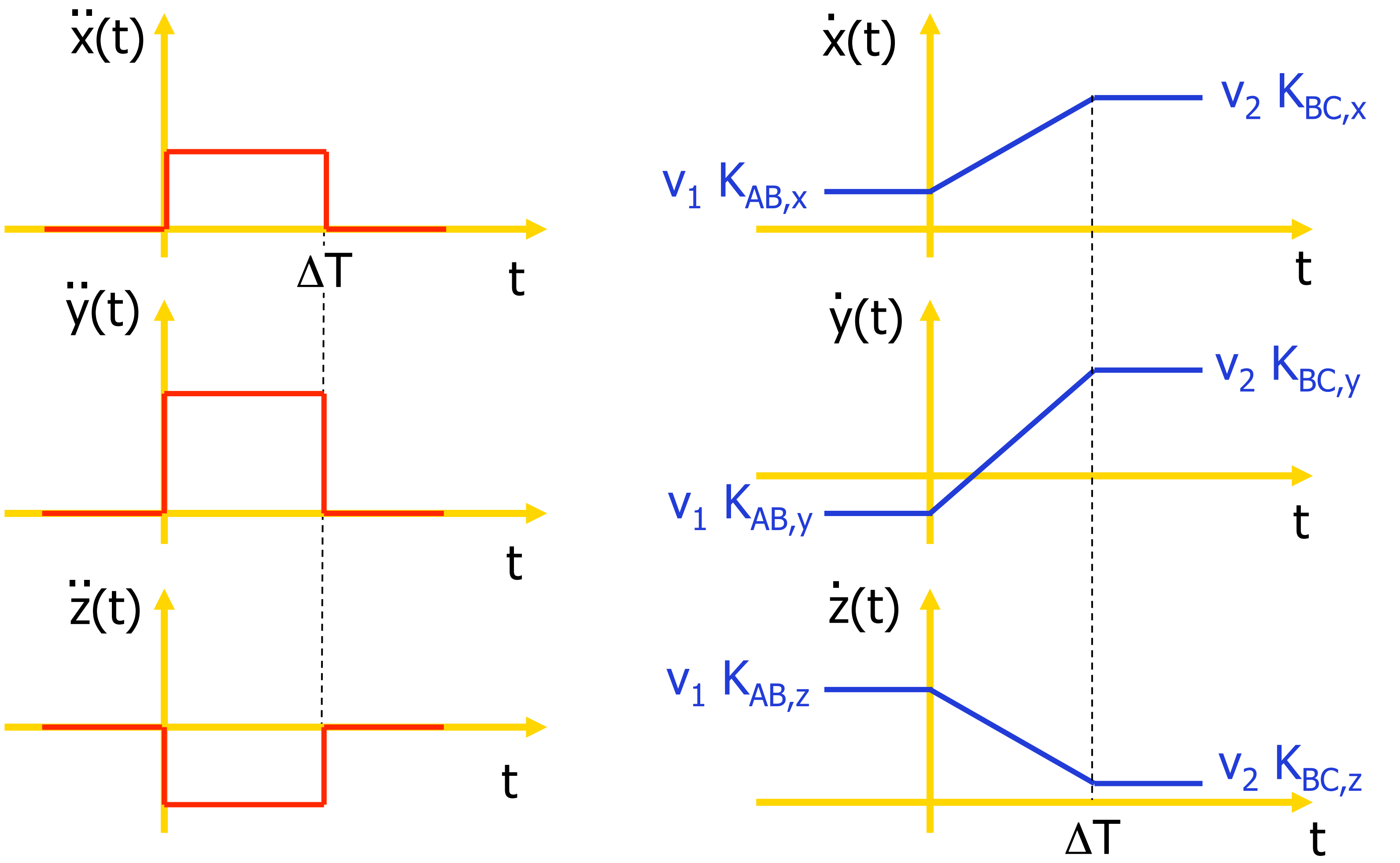
vettori dei coseni direttori

date: velocità costante di modulo v_1 su AB
v_2 su BC
transizione: ad accelerazione costante per un tempo ΔT

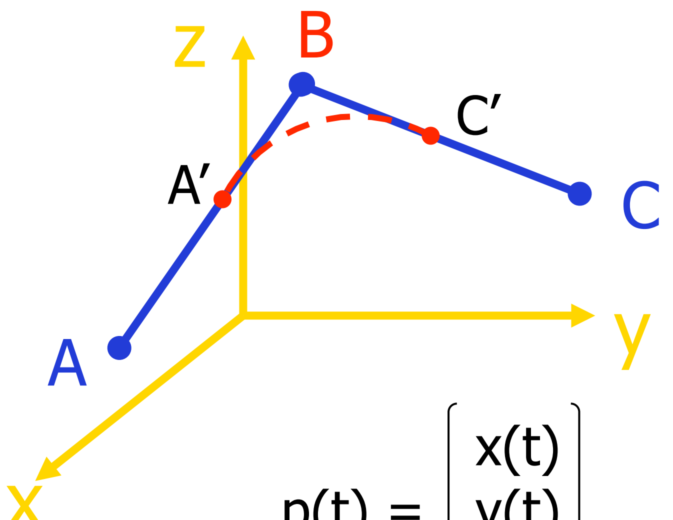
$$p(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \qquad t \in [0, \Delta T], \ \ t = 0\text{: inizio transizione}$$

nota: durante l'over-fly, il cammino rimane sempre nel piano specificato dai due tratti rettilinei che si intersecano in B (in pratica, è un problema planare)

sulle singole componenti …



Legge oraria della transizione



$$\frac{B - A}{\|B - A\|} = K_{AB}$$

$$\frac{C - B}{\|C - B\|} = K_{BC}$$

vettori dei coseni direttori

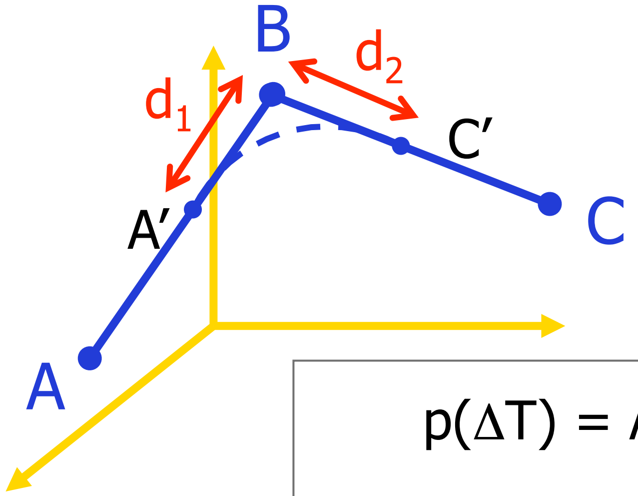
$$p(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

$t \in [0, \Delta T]$, $t = 0$: inizio transizione

$$\ddot{p}(t) = 1/\Delta T \, (v_2 K_{BC} - v_1 K_{AB}) \xrightarrow{\int} \dot{p}(t) = v_1 K_{AB} + t/\Delta T \, (v_2 K_{BC} - v_1 K_{AB})$$

$$\xrightarrow{\int} p(t) = A' + v_1 K_{AB} t + t^2/2\Delta T \, (v_2 K_{BC} - v_1 K_{AB})$$

Determinazione ΔT (1)



$$B - A' = d_1 K_{AB}$$
$$C' - B = d_2 K_{BC} \quad (1)$$

$$p(t) = A' + v_1 K_{AB} t + t^2/2\Delta T \,(v_2 K_{BC} - v_1 K_{AB})$$

$$p(\Delta T) = A' + \Delta T/2 \,(v_1 K_{AB} + v_2 K_{BC}) = C'$$

$$\Rightarrow \quad -B + A' + \Delta T/2 \,(v_1 K_{AB} + v_2 K_{BC}) = C' - B$$

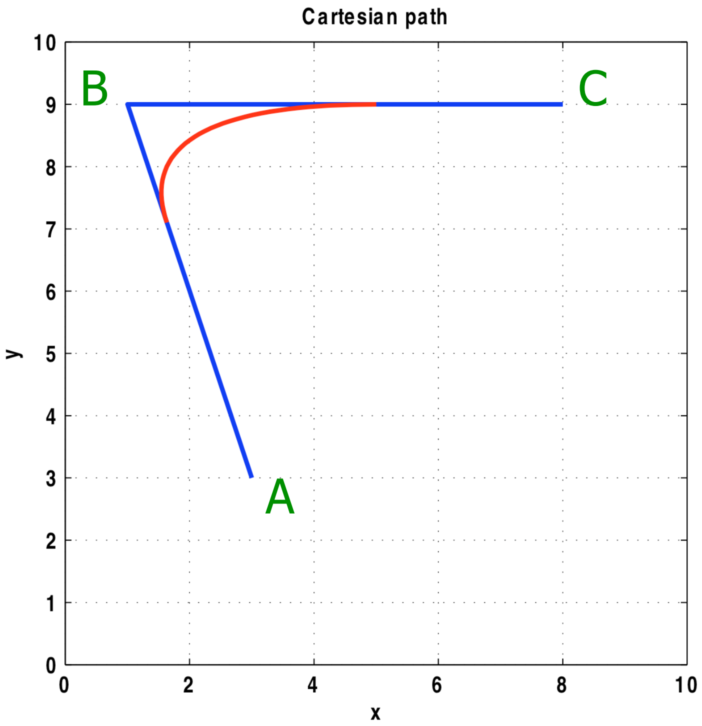
$$\overset{1}{\Rightarrow} \quad d_1 K_{AB} + d_2 K_{BC} = \Delta T/2 \,(v_1 K_{AB} + v_2 K_{BC})$$

$$\Rightarrow \quad d_1 = v_1 \Delta T/2 \qquad d_2 = v_2 \Delta T/2$$

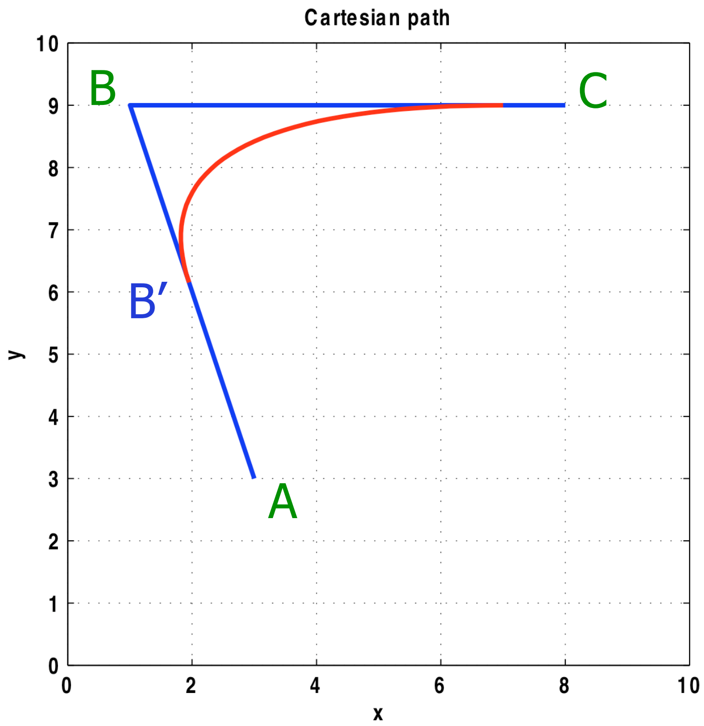
se ad es. fisso d_1 (ossia A′) $\rightarrow$ $\Delta T = 2d_1/v_1 \Rightarrow d_2 = d_1 v_2/v_1$

Esempio numerico

- transizione da A=(3,3) a C=(8,9) via B=(1,9), con velocità da $v_1=1$ a $v_2=2$
- due esempi di opzioni per la soluzione (forniscono cammini differenti!)
  - assegnato il tempo di transizione: $\Delta T=4$ (qui, centrato con $t \in [-\Delta T/2, \Delta T/2]$)
  - assegnata la distanza da B di distacco: $d_1=3$ (assegnare d_2 si tratta in modo analogo)



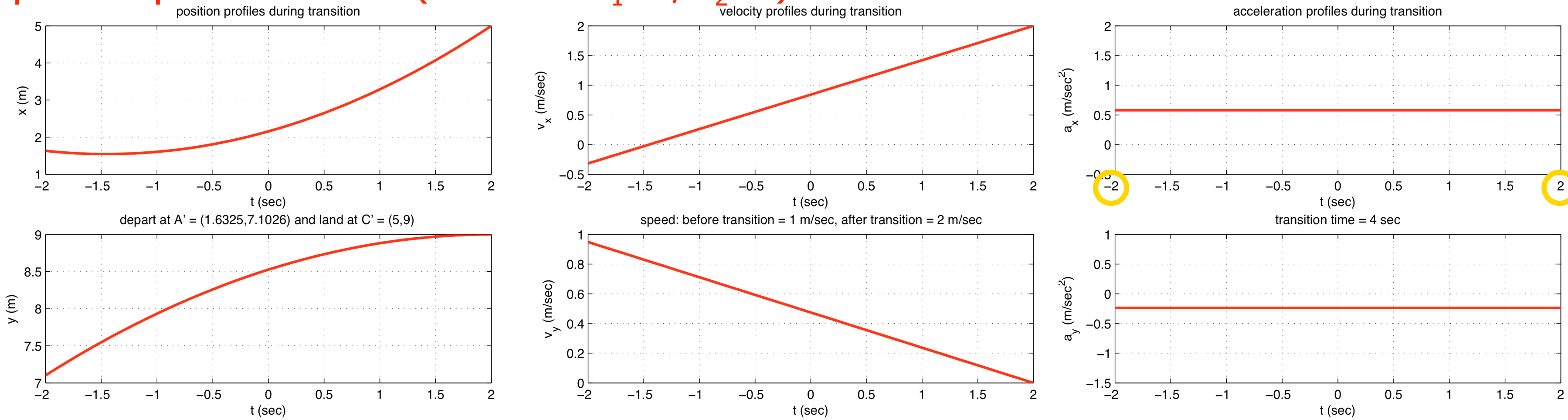
$\Delta T=4$



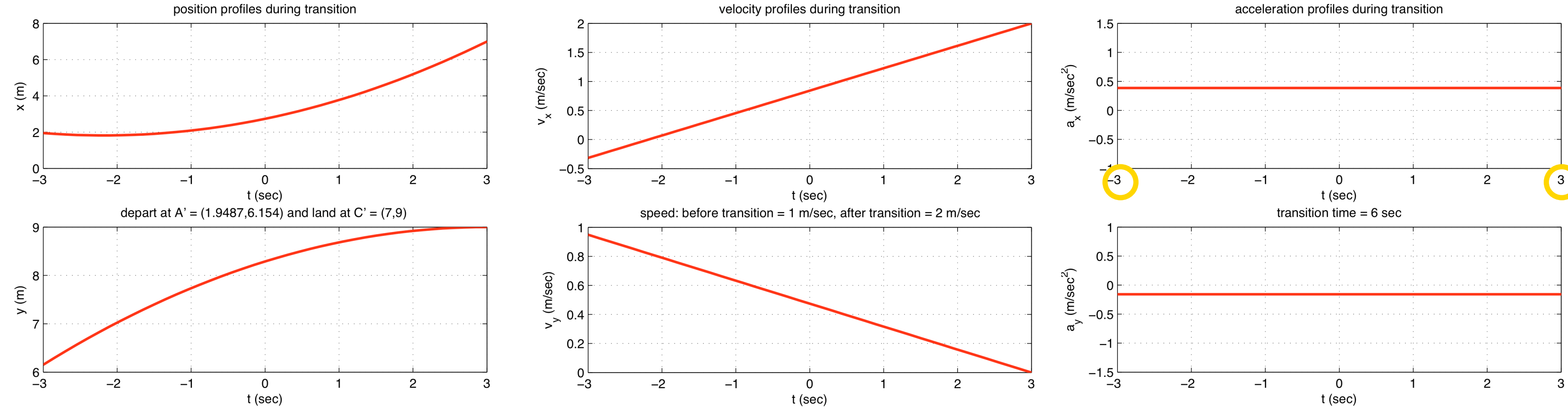
$d_1=3$

Esempio numerico (continua)

prima opzione: $\Delta T=4$ (si ottiene $d_1=2$, $d_2=4$)

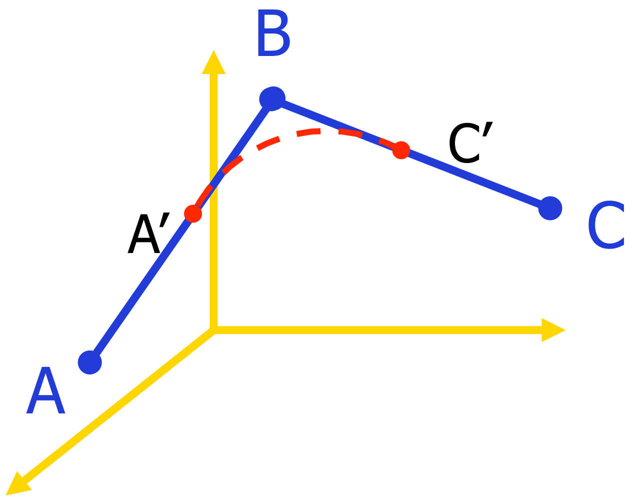


seconda opzione: $d_1=3$ (si ottiene $\Delta T=6$, $d_2=6$)



di fatto, sono gli stessi profili di vel/acc ma con scale dei tempi diverse!!

Determinazione ΔT (2)



$$\ddot{p}(t) = 1/\Delta T\,(v_2\,K_{BC} - v_1\,K_{AB})$$

$v_1 = v_2 = v_{max}$ (per semplicità)

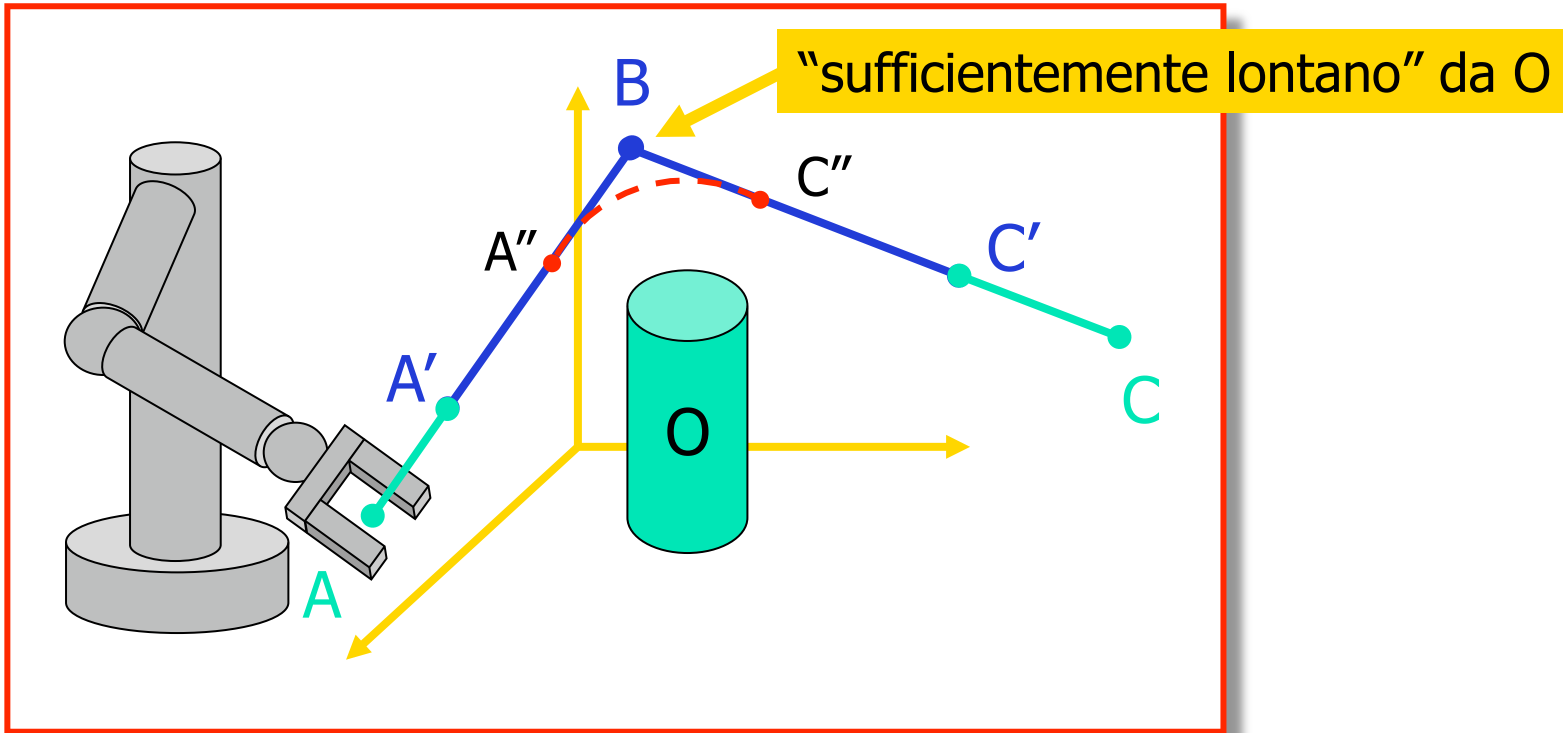
$$\|\ddot{p}(t)\| = a_{max}$$

$$\Delta T = (v_{max}/a_{max})\,\|K_{BC} - K_{AB}\|$$

$$= (v_{max}/a_{max})\sqrt{2\,(1 - K_{BC,x}K_{AB,x} - K_{BC,y}K_{AB,y} - K_{BC,z}K_{AB,z})}$$

Esempio

pianificare una traiettoria cartesiana da A a C (da fermo a fermo) evitando l'ostacolo O, con $a \leq a_{max}$ e $v \leq v_{max}$



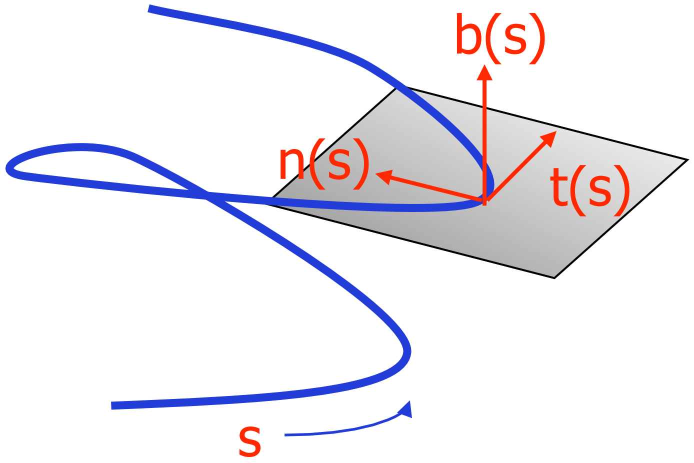
su $\overline{AA'}$ → a_{max}; su $\overline{A'B}$ e $\overline{BC'}$ → v_{max} su $\overline{C'C}$ → $-a_{max}$
+ overfly tra A″ e C″;

Altre traiettorie cartesiane

- circolari per 3 punti in 3D (built-in)
- lineari dell'E-E con orientamento costante
- per robot con polso sferico: traiettoria decomposta in posizione del polso e orientamento dell'E-E
- si cerca sempre di parametrizzare il cammino cartesiano p(s) rispetto all'ascissa curvilinea (ad es., per cammini circolari $s = R\theta$), cosicché
- velocità: $dp/dt = dp/ds \cdot ds/dt$
  - dp/ds = versore ($\|\cdot\|=1$) tangente alla traiettoria: direzione tangente t(s)
  - ds/dt = modulo della velocità tangenziale (scalare)
- accelerazione: $d^2p/dt^2 = d^2p/ds^2 \cdot (ds/dt)^2 + dp/ds \cdot d^2s/dt^2$
  - $\|d^2p/ds^2\|$ = curvatura $\kappa(s)$ (= 1/raggio di curvatura)
  - $d^2p/ds^2 \cdot (ds/dt)^2$ = accelerazione centripeta: direzione normale n(s) $\perp$ al cammino, ma sullo stesso piano osculatore; binormale $b(s) = t(s) \times n(s)$
  - d^2s/dt^2 = valore scalare (pos/neg) dell'accelerazione tangenziale

Terna di Frenet

- dato un cammino $p(s)$ in R^3, parametrizzato da s (non necessariamente l'ascissa curvilinea), si definisce una terna come in figura



$p' = dp/ds \qquad p'' = d^2p/ds^2$

derivate rispetto al parametro

$t(s) = p'(s)/\|p'(s)\|$

versore tangente

$n(s) = p''(s)/\|p''(s)\|$

versore normale

($\in$ al piano osculatore)

$b(s) = t(s) \times n(s)$

versore binormale

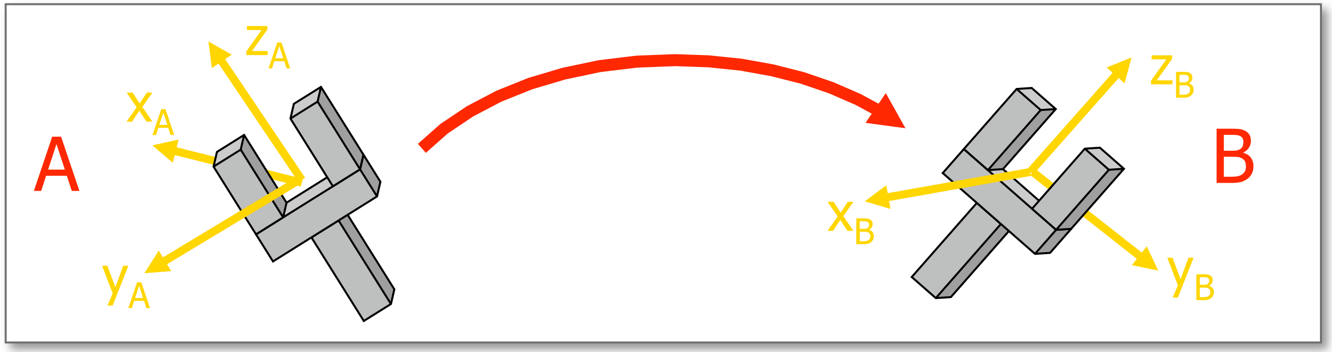
- espressione generale della curvatura

$$\kappa(s) = \|p'(s) \times p''(s)\| / \|p'(s)\|^3$$

Traiettorie ottime

- per robot cartesiani
  1. il cammino rettilineo tra due punti dello spazio operativo è quello percorribile a tempo minimo (ma non l'unico!)
  2. una legge oraria ottima è bang-coast-bang in accelerazione (ovvero in coppia)
- per robot articolati
  - 1. e 2. non sono più vere in generale nello spazio cartesiano, ma continuano a essere vere nello spazio dei giunti se si assume di avere vincoli di max velocità e accelerazione
    - però traiettorie rettilinee nello spazio dei giunti non sono ovviamente rettilinee nello spazio operativo, e viceversa
  - il vincolo di massima accelerazione ai giunti è conservativo rispetto a quello di massima coppia (in configurazioni diverse servono coppie differenti per ottenere la stessa accelerazione)

Traiettorie per l'orientamento



- definita una rappresentazione minimale orientamento (ad es., angoli ϕ θ ψ di Eulero ZXZ), si potrebbe trattare separatamente la pianificazione di ogni componente
  - ad es., traiettoria rettilinea nello spazio ϕ θ ψ $\Rightarrow$ ma scarsa visualizzazione
- metodo alternativo: rotazione intorno ad un asse
  - si determina un asse r e un angolo θ_B: $R(r,\theta_B) = R_A^T R_B$ (rotazione che fa passare dall'orientamento A a quello B $\Rightarrow$ problema inverso asse-angolo)
  - si pianifica l'andamento temporale per l'angolo θ interpolando da 0 a θ_B (con eventuali vincoli sulle derivate)
  - $\forall$ t, $R_A R(r,\theta(t))$ identifica l'orientamento istantaneo dell'E-E

Scalatura temporale uniforme

- fissato (nello spazio cartesiano o in quello dei giunti) un cammino $p(s)$ e una legge oraria $s(\tau)$ ($\tau=t/T$, T="tempo di trasferimento") occorre verificare che non siano violati i vincoli (di solito fissati nello spazio dei giunti) di massima velocità v_{max} e accelerazione a_{max}
  - … a meno di non averne tenuto già conto in fase di pianificazione, ad es. usando una legge bang-coast-bang in accelerazione
- si calcola e si trova il massimo (in valore assoluto) della
  - velocità: $dp/dt = dp/ds \cdot ds/d\tau \cdot 1/T$
  - accelerazione: $d^2p/dt^2 = (d^2p/ds^2 \cdot (ds/d\tau)^2 + dp/d\tau \cdot d^2s/d\tau^2) \cdot 1/T^2$
- se i vincoli sono violati, si scala (aumenta in questo caso) $T \rightarrow kT$ ($k>1$), sulla base del vincolo che è "maggiormente violato" (massimo tra i rapporti $|v|/v_{max}$ e $|a|/a_{max}$)
- viceversa, se si è troppo "lenti" rispetto ai vincoli si diminuisce T ($k<1$)