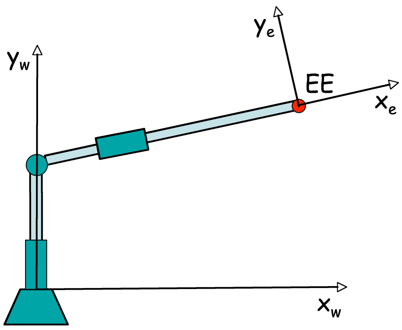
Prova Scritta di Robotica I

10 Giugno 2009



Si consideri il robot planare PRP con $n = 3$ giunti in figura. Sono indicate la terna di riferimento globale $SR_w = (\boldsymbol{x}_w, \boldsymbol{y}_w, \boldsymbol{z}_w)$ e la terna di end-effector $SR_e = (\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{y}_e, \boldsymbol{z}_e)$.

- Assegnare le terne di riferimento secondo il formalismo di Denavit-Hartenberg (DH) e derivare la relativa tabella dei parametri. Si specifichino in aggiunta le matrici (costanti) di trasformazione ${}^wT_0$, tra terna globale e terna 0 di DH, e ${}^3T_e$, tra terna 3 di DH e terna di end-effector.
- Utilizzando le variabili $\boldsymbol{q}$ di Denavit-Hartenberg, determinare lo Jacobiano analitico $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ per un compito relativo alla sola posizione dell'organo terminale nel piano del moto e analizzarne le singolarità. Con il robot in una configurazione singolare $\boldsymbol{q}_0$, fornire una base per ciascuno dei seguenti quattro sottospazi lineari:
$$\mathcal{R}\Big(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}_0)\Big) \qquad \mathcal{N}\Big(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}_0)\Big) \qquad \mathcal{R}\left(\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q}_0)\right) \qquad \mathcal{N}\left(\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q}_0)\right).$$
- Per un compito di movimentazione dell'organo terminale di dimensione $m = 3$, si consideri la legge di controllo cinematico nello spazio del compito
$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q})\,(\dot{\boldsymbol{r}}_d + \boldsymbol{K}_P(\boldsymbol{r}_d - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}))\,, \tag{1}$$
dove $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$ comprende ora la posizione (nel piano) e l'orientamento dell'organo terminale (angolo ϕ tra asse orizzontale $\boldsymbol{x}_w$ e asse $\boldsymbol{x}_e$) mentre $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$ è la funzione cinematica diretta associata a queste variabili di compito. Si assuma una matrice dei guadagni $\boldsymbol{K}_P$ diagonale (oltre che definita positiva) e velocità di giunto limitate in modulo, $|\dot{q}_i| \leq V_i$, con valori $V_i > 0$ assegnati $(i = 1, 2, 3)$.

  a) Se la velocità desiderata di esecuzione del compito è $\dot{\boldsymbol{r}}_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$, fornire una configurazione di giunto $\boldsymbol{q}^*$ non singolare per tale compito (e ad esso 'agganciata' , ossia con $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{r}_d - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^*) = \boldsymbol{0}$ per un opportuno $\boldsymbol{r}_d$), in corrispondenza alla quale il compito *non è mai* realizzabile senza violare i limiti sulle velocità di giunto.

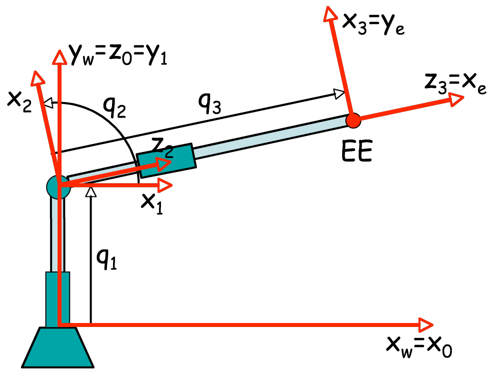
  b) Data la configurazione iniziale del robot $\boldsymbol{q}(0) = \begin{pmatrix} 1.2 & \pi/2 & 1 \end{pmatrix}^T$ all'istante $t = 0$ e assegnati $\boldsymbol{r}_d(0) = \begin{pmatrix} 1.5 & 1.5 & -\pi/4 \end{pmatrix}^T$ e $\dot{\boldsymbol{r}}_d(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ per il compito, determinare il valore numerico della matrice diagonale $\boldsymbol{K}_P$ nella legge di controllo (1) in modo tale da ridurre il più rapidamente possibile l'errore iniziale $\boldsymbol{e}(0)$ *senza violare* i seguenti limiti sulle velocità di giunto: $V_1 = 5$ [m/s], $V_2 = \pi$ [rad/s] e $V_3 = 4$ [m/s].

[180 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzione

10 Giugno 2009

Di seguito è mostrata una possibile assegnazione delle terne di Denavit-Hartenberg, con la relativa tabella.



i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	$\frac{\pi}{2}$	0	q_1	0
2	$\frac{\pi}{2}$	0	0	q_2
3	0	0	q_3	0

E' immediato ottenere la cinematica diretta del robot nella forma generale

$$
\begin{aligned}
{}^0\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} {}^0\boldsymbol{R}_3(\boldsymbol{q}) & {}^0\boldsymbol{p}_3(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{pmatrix} &= {}^0A_1(q_1)\,{}^1A_2(q_2)\,{}^2A_3(q_3) \\
&= \begin{pmatrix} \cos q_2 & 0 & \sin q_2 & q_3 \sin q_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \sin q_2 & 0 & -\cos q_2 & q_1 - q_3 \cos q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Inoltre, le trasformazioni tra le terne definite nel testo forniscono

$$
\begin{aligned}
{}^w\boldsymbol{T}_e(\boldsymbol{q}) = {}^w\boldsymbol{T}_0{}^0\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{q})^3\boldsymbol{T}_e \; &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^0\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{q}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & q_3 \sin q_2 \\ -\cos q_2 & \sin q_2 & 0 & q_1 - q_3 \cos q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^w\boldsymbol{R}_e(\boldsymbol{q}) & {}^w\boldsymbol{p}_e(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

da cui si possono ricavare le funzioni cinematiche di interesse (che peraltro si potevano ottenere anche per ispezione diretta, una volta individuate le variabili di giunto secondo il formalismo di Denavit-Hartenberg). A tal fine, si noti che la matrice di rotazione finale ${}^{w}\boldsymbol{R}_e(\boldsymbol{q})$ assume la forma di una rotazione elementare di un angolo $\phi = q_2 - \pi/2$ intorno all'asse $\boldsymbol{z}_w$. Si ha infatti

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\big(q_2 - \dfrac{\pi}{2}\big) & -\sin\big(q_2 - \dfrac{\pi}{2}\big) & 0 \\ \sin\big(q_2 - \dfrac{\pi}{2}\big) & \cos(\big(q_2 - \dfrac{\pi}{2}\big) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ -\cos q_2 & \sin q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^{w}\boldsymbol{R}_e(q_2).$$

Per il (primo) compito relativo alla sola posizione dell'organo terminale nel piano si ha

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} {}^{w}p_x \\ {}^{w}p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_3 \sin q_2 \\ q_1 - q_3 \cos q_2 \end{pmatrix},$$

da cui lo Jacobiano analitico (2×3)

$$\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 0 & q_3 \cos q_2 & \sin q_2 \\ 1 & q_3 \sin q_2 & -\cos q_2 \end{pmatrix}.$$

Esaminando i tre minori di $\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{q})$, tale matrice cade di rango se e solo se $\sin q_2 = 0$ e $q_3 = 0$, ossia quando il terzo braccio del robot è orientato lungo la verticale e ritratto completamente. In tale situazione lo Jacobiano vale

$$\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{q}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \mp 1 \end{pmatrix},$$

dove il segno superiore corrisponde al caso $q_2 = 0$ e quello inferiore al caso $q_2 = \pi$. I quattro sottospazi lineari richiesti hanno le seguenti possibili basi:

$$\mathcal{N}\Big(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}_0)\Big) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \mp 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{R}\left(\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q}_0)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{in } \mathbb{R}^3,$$

$$\mathcal{R}\Big(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}_0)\Big) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{N}\left(\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q}_0)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Per il compito di posizionamento e orientamento dell'organo terminale nel piano ($m = 3$) si ha

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} {}^{w}p_x \\ {}^{w}p_y \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_3 \sin q_2 \\ q_1 - q_3 \cos q_2 \\ q_2 - \pi/2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Lo Jacobiano analitico (3×3) associato a questo compito,

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 0 & q_3 \cos q_2 & \sin q_2 \\ 1 & q_3 \sin q_2 & -\cos q_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

risulta singolare se e solo se $\sin q_2 = 0$.

Nelle condizioni del quesito a), ossia con $\sin q_2^* \neq 0$, si ha

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q}^*)\dot{\boldsymbol{r}}_d = \frac{1}{\sin q_2^*}\begin{pmatrix} \cos q_2^* & \sin q_2^* & -q_3^* \\ 0 & 0 & \sin q_2^* \\ 1 & 0 & -q_3^* \cos q_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin q_2^*}\begin{pmatrix} q_3^* \\ -\sin q_2^* \\ q_3^* \cos q_2^* \end{pmatrix}.$$

E' semplice ad esempio notare che, se si allunga sufficientemente il giunto prismatico 3, si arriverà a violare il limite di velocità del primo giunto, qualunque sia il valore assegnato $V_1 > 0$. In particolare, si ha

$$q_3^* > V_1 \cdot |\sin q_2^*| > 0 \qquad \Rightarrow \qquad |\dot{q}_1| > V_1.$$

Nelle condizioni del quesito b), il robot non è in singolarità all'istante iniziale $t = 0$. Utilizzando i dati del problema e la (2), si può quindi calcolare la velocità iniziale di controllo come

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}}(0) &= \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q}(0))\Big(\dot{\boldsymbol{r}}_d(0) + \boldsymbol{K}_P(\boldsymbol{r}_d(0) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}(0))\Big) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5\,K_{r_1} \\ 0.3\,K_{r_2} \\ -\frac{\pi}{4}K_{r_3} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 + 0.3\,K_{r_2} + \frac{\pi}{4}K_{r_3} \\ -\frac{\pi}{4}K_{r_3} \\ 0.5\,K_{r_1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

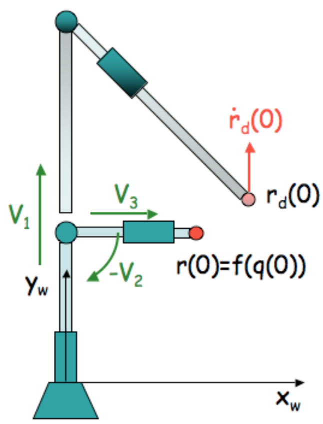
avendo posto $\boldsymbol{K}_P = \mathrm{diag}\{K_{r_1}, K_{r_2}, K_{r_3}\}$. Con queste espressioni si possono subito scegliere due dei tre guadagni di controllo

$$\begin{aligned} |\dot{q}_3(0)| \leq V_3 \quad &\Rightarrow \quad 0.5\,K_{r_1} \leq V_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad K_{r_1} = 8 > 0, \\ |\dot{q}_2(0)| \leq V_2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\pi}{4}K_{r_3} \leq V_2 = \pi \quad \Rightarrow \quad K_{r_3} = 4 > 0. \end{aligned}$$

Utilizzando quest'ultima, si ha infine per il guadagno rimanente

$$|\dot{q}_1(0)| \leq V_1 \quad \Rightarrow \quad 1 + 0.3\,K_{r_2} + \frac{\pi}{4}K_{r_3} = 1 + 0.3\,K_{r_2} + \pi \leq V_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad K_{r_2} = \frac{10}{3}\,(4 - \pi) > 0.$$

Con queste scelte tutte le velocità di giunto saranno in saturazione all'istante $t = 0$ (la seconda al valore limite negativo $-V_2 = -\pi$) e si realizzerà di conseguenza *la più rapida* riduzione dell'errore iniziale $\boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{r}_d(0) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}(0)$ (che converge comunque esponenzialmente a zero, in modo disaccoppiato per ogni componente del compito). La situazione all'istante $t = 0$ è illustrata nella figura seguente, dove la configurazione iniziale desiderata del robot è quella leggermente ombreggiata.



* * * * *