

# Prova Scritta di Robotica I

A: preferibile per 6 crediti

12 Gennaio 2010

## Esercizio 1

Si consideri il cammino cartesiano parametrico

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos s \\ R \sin s \\ h s \end{pmatrix}, \quad s \in [0, +\infty)$$

dove  $R > 0$  e  $h > 0$ . Tale cammino è una spirale intorno all'asse  $\mathbf{z}$ . Assegnato un tempo totale di moto  $T > 0$  sufficientemente lungo, definire una legge oraria  $s = s(t)$  con profilo di velocità *trapezoidale* per  $t \in [0, T]$ , tale che risultino soddisfatte le seguenti condizioni per la traiettoria pianificata  $\mathbf{p}_d(t) = \mathbf{p}(s(t))$ :

- $\dot{\mathbf{p}}_d(0) = \dot{\mathbf{p}}_d(T) = \mathbf{0}$ ;
- $\|\dot{\mathbf{p}}_d(t)\| \leq V$ , con  $V > 0$  assegnato;
- $\|\ddot{\mathbf{p}}_d(t)\| \leq A$ , con  $A > 0$  assegnato e sufficientemente grande.

Si fornisca in particolare l'espressione esplicita della quota finale  $z_d(T)$  raggiunta.

Inoltre, pianificare un *moto coordinato* per l'*orientamento* lungo il cammino sopra definito, specificando una terna mobile il cui lasse  $\mathbf{x}_o$  punti sempre verso l'asse centrale (l'asse  $\mathbf{z}$ ) della spirale e sia ad esso ortogonale, e con l'asse  $\mathbf{z}_o$  sempre parallelo a  $\mathbf{z}$ . Qual è il massimo valore raggiunto dalla norma della velocità angolare,  $\|\boldsymbol{\omega}\|$ , associata alla traiettoria così pianificata?

Valutare infine la soluzione fornita, con i seguenti dati numerici:

$$R = 0.3 \text{ [m]}, \quad h = 0.1 \text{ [m]}, \quad V = 1 \text{ [m/s]}, \quad A = 5 \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad T = 4 \text{ [s]}.$$

## Esercizio 2A

Si estenda il progetto del controllore di traiettoria basato sulla linearizzazione (e disaccoppiamento) ingresso-uscita, presentato nel testo (e a lezione) per un robot mobile di tipo unicycle, al caso del modello cinematico di un veicolo di tipo car-like con trazione anteriore. Tale controllore dovrebbe garantire ad un opportuno punto  $B$  che si muove con il veicolo la possibilità di riprodurre esattamente (in condizioni nominali) e di inseguire in modo asintoticamente stabile (in presenza di disturbi non persistenti) *qualsiasi traiettoria di riferimento continua*, eventualmente anche avente velocità discontinua. Fornire l'espressione completa della legge di controllo, analizzandone le singolarità (se presenti), nonché le equazioni del sistema ad anello chiuso risultante. Discutere vantaggi e svantaggi di tale tecnica di controllo, in particolare riguardo alla presenza di ostacoli nelle vicinanze della traiettoria di riferimento.

[150 minuti; libri aperti]

# Soluzioni

12 Gennaio 2010

## Esercizio 1

Il vettore di velocità lungo il cammino è dato da

$$\dot{\mathbf{p}}_d = \frac{d\mathbf{p}_d(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{p}(s)}{ds} \frac{ds(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -R \sin s \\ R \cos s \\ h \end{pmatrix} \dot{s},$$

e quindi

$$\|\dot{\mathbf{p}}_d(t)\| = \sqrt{R^2 + h^2} |\dot{s}(t)|.$$

Il vincolo  $\|\dot{\mathbf{p}}_d(t)\| \leq V$  sulla velocità cartesiana si trasforma in

$$|\dot{s}(t)| \leq \frac{V}{\sqrt{R^2 + h^2}} =: V_{\max}$$

sulla velocità oraria  $\dot{s}$ .

Il vettore di accelerazione lungo il cammino è dato da

$$\ddot{\mathbf{p}}_d = \frac{d^2\mathbf{p}_d(t)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{p}(s)}{ds} \ddot{s}(t) + \frac{d^2\mathbf{p}(s)}{ds^2} \dot{s}^2(t) = \begin{pmatrix} -R \sin s \\ R \cos s \\ h \end{pmatrix} \ddot{s} + \begin{pmatrix} -R \cos s \\ -R \sin s \\ 0 \end{pmatrix} \dot{s}^2,$$

e quindi

$$\|\ddot{\mathbf{p}}_d(t)\| = \sqrt{(R^2 + h^2) \ddot{s}^2(t) + (R \dot{s}^2(t))^2}.$$

Il vincolo  $\|\ddot{\mathbf{p}}_d(t)\| \leq A$  sulla accelerazione cartesiana può risciversi come

$$(R^2 + h^2) \ddot{s}^2(t) \leq A^2 - (R \dot{s}^2(t))^2$$

sulla accelerazione oraria  $\ddot{s}$ . Poiché tale vincolo deve essere soddisfatto per ogni  $t \in [0, T]$ , occorre considerare il caso peggiore, ossia  $|\dot{s}| = V_{\max}$ . Si ottiene quindi

$$|\ddot{s}(t)| \leq \sqrt{\frac{A^2 - \left(\frac{RV^2}{R^2+h^2}\right)^2}{R^2 + h^2}} =: A_{\max}.$$

Per avere un valore ammissibile  $A_{\max} > 0$ , il limite  $A$  deve essere sufficientemente grande:

$$A > \frac{RV^2}{R^2 + h^2}. \quad (1)$$

A questo punto, essendo assegnato il tempo totale di moto  $T$  e avendo ricavato i limiti  $V_{\max}$  e  $A_{\max}$ , la legge oraria con profilo trapezoidale di velocità è completamente specificata. In particolare, la durata dell'intervallo di accelerazione/decelerazione è

$$T_s = \frac{V_{\max}}{A_{\max}} = \frac{V}{\sqrt{A^2 - \left(\frac{RV^2}{R^2+h^2}\right)^2}}.$$

Per garantire un profilo effettivamente trapezoidale (con almeno un istante in cui si raggiunge  $V_{\max}$ ), il tempo totale  $T$  deve essere sufficientemente lungo:

$$T \geq 2T_s = \frac{2V}{\sqrt{A^2 - \left(\frac{RV^2}{R^2+h^2}\right)^2}}. \quad (2)$$

Il valore finale del parametro  $s$  al tempo  $t = T$  è quindi

$$s_{\max} := s(T) = (T - T_s)V_{\max} = TV_{\max} - \frac{V_{\max}^2}{A_{\max}} = \frac{TV}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \frac{V^2}{\sqrt{(R^2 + h^2)A^2 - \frac{(RV^2)^2}{R^2 + h^2}}}.$$

Di conseguenza, la quota finale raggiunta al tempo  $t = T$  è

$$z_d(T) = h s(T) = h s_{\max}.$$

Per completezza, calcoliamo anche la curvatura del cammino parametrico assegnato:

$$\kappa(s) = \frac{\left\| \frac{d\mathbf{p}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} \right\|}{\left\| \frac{d\mathbf{p}}{ds} \right\|^3} = \frac{R}{R^2 + h^2}.$$

La curvatura  $\kappa(s)$  risulta costante per tutti i valori di  $s$ , e risulta pari a  $1/R$  quando  $h = 0$ .

Per pianificare la traiettoria richiesta per l'orientamento in modo che sia coordinata con la traiettoria generata in posizione, si definisce una terna mobile in funzione dello stesso parametro  $s$  come segue:

$$\mathbf{R}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_o(s) & \mathbf{y}_o(s) & \mathbf{z}_o(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & -\cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si noti che tale terna differisce da quella di Frenet associata naturalmente al cammino parametrico. Utilizzando le notazioni  $\mathbf{p}'(s) = d\mathbf{p}(s)/ds$  e  $\mathbf{p}''(s) = d^2\mathbf{p}(s)/ds^2$ , la terna di Frenet è infatti specificata dalla

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{Frenet}}(s) &= \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) & \mathbf{n}(s) & \mathbf{b}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{p}'(s)}{\|\mathbf{p}'(s)\|} & \frac{\mathbf{p}''(s)}{\|\mathbf{p}''(s)\|} & \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \sin s & -\cos s & \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} \sin s \\ \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \cos s & -\sin s & -\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} \cos s \\ \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} & 0 & \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In effetti, le due terne coincidono (a meno di una rotazione di  $\pi/2$  attorno all'asse  $\mathbf{z}$ ) solo quando  $h = 0$ .

Ponendo  $\mathbf{R}_d(t) = \mathbf{R}(s(t))$ , il vettore di velocità angolare si calcola dalla

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \dot{\mathbf{R}}_d \mathbf{R}_d^T = \dot{s}(t) \begin{pmatrix} \sin s(t) & \cos s(t) & 0 \\ -\cos s(t) & \sin s(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos s(t) & -\sin s(t) & 0 \\ \sin s(t) & -\cos s(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{s}(t) & 0 \\ \dot{s}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Come era intuibile (la rotazione della terna avviene attorno al solo asse fisso  $\mathbf{z}$  e in senso antiorario), si ottiene

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{s}(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \|\boldsymbol{\omega}\| = |\dot{s}(t)|,$$

per cui il massimo valore della norma del vettore di velocità angolare è pari ovviamente a  $V_{\max}$ .

Con i dati numerici forniti nel testo, che verificano le due disuguaglianze (1) e (2), si ha:

$$V_{\max} = \sqrt{10} = 3.1623, \quad A_{\max} = 4\sqrt{10} = 12.6491, \quad T_s = 0.25,$$

$$s_{\max} = 3.75\sqrt{10} = 11.8585, \quad z_d(T) = 0.375\sqrt{10} = 1.1859.$$

Si riportano di seguito alcuni grafici relativi alla traiettoria così pianificata, ottenuti con Matlab (codice disponibile).

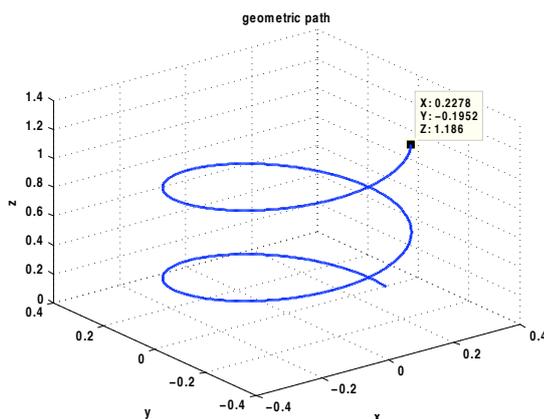


Figura 1: La traiettoria cartesiana a spirale (con le coordinate del punto finale raggiunto al tempo  $T = 4$  s)

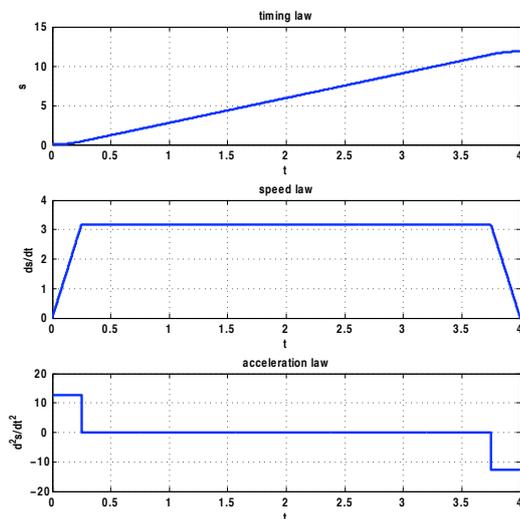


Figura 2: Legge oraria: evoluzione del parametro  $s(t)$ , della velocità  $\dot{s}(t)$  e dell'accelerazione  $\ddot{s}(t)$

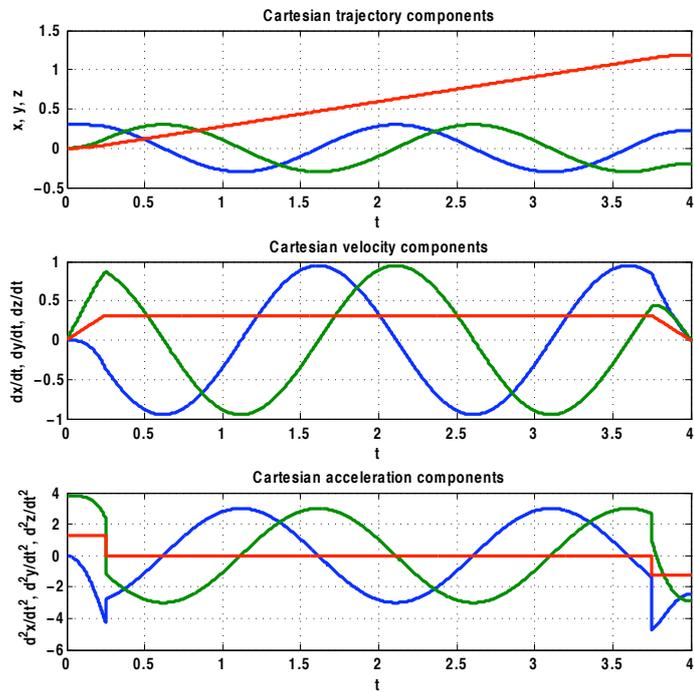


Figura 3: Componenti della traiettoria cartesiana: posizione, velocità, e accelerazione ( $x$  in blu,  $y$  in verde,  $z$  in rosso)

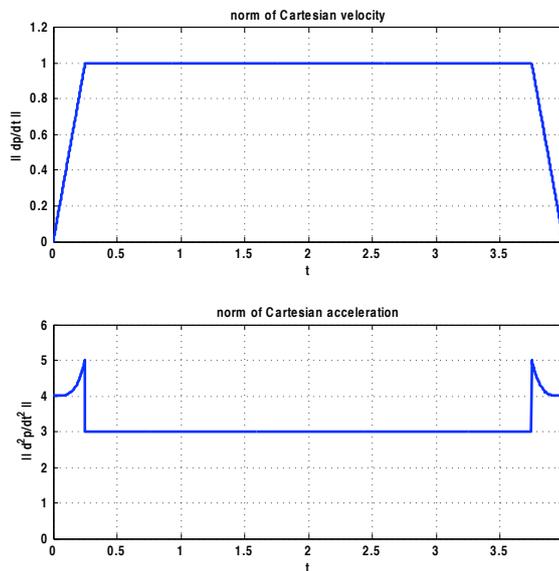


Figura 4: Norme della velocità e dell'accelerazione cartesiana: i limiti assegnati  $\|\dot{\mathbf{p}}_d(t)\| \leq 1$  e  $\|\ddot{\mathbf{p}}_d(t)\| \leq 5$  sono rispettati durante l'intero moto

## Esercizio 2A

Il modello cinematico *car-like* di un veicolo con ruote anteriori sterzanti e trazione anteriore è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi u_1 \\ \sin \theta \cos \phi u_1 \\ \frac{\sin \phi}{\ell} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

dove  $(x, y)$  sono le coordinate della ruota (equivalente) posteriore,  $\theta$  è l'orientamento assoluto del veicolo (rispetto all'asse di riferimento  $\mathbf{x}$ ),  $\phi$  è l'angolo di orientamento della ruota anteriore (rispetto al veicolo),  $u_1$  è la velocità di trazione della ruota anteriore e  $u_2$  la sua velocità di rotazione (intorno all'asse verticale).

In analogia al progetto del controllore di traiettorie per il caso dell'uniciclo, è possibile definire un punto  $B$  a distanza  $|b| > 0$  ( $b$  stesso può essere positivo o negativo) dalla ruota anteriore e posto lungo la direzione di orientamento assoluto della ruota, individuata dall'angolo  $\theta + \phi$ . Con questa scelta la velocità del punto  $B$  sarà influenzata direttamente da entrambi i comandi  $u_1$  e  $u_2$ . La posizione di  $B$  è quindi espressa dalla

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Derivando una volta la (4) rispetto al tempo e usando il modello (3) si ottiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \ell \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} + b(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \begin{pmatrix} -\sin(\theta + \phi) \\ \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) - \frac{b}{\ell} \sin \phi \sin(\theta + \phi) & -b \sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) + \frac{b}{\ell} \sin \phi \cos(\theta + \phi) & b \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Poiché

$$\det \mathbf{T}(\theta, \phi) = b \neq 0,$$

la matrice  $\mathbf{T}$  (che è la cosiddetta matrice di disaccoppiamento del sistema) è invertibile in ogni configurazione. La legge di controllo che disaccoppia e linearizza esattamente il comportamento ingresso-uscita è definita in modo globale dalla

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{T}^{-1}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & \sin(\theta + \phi) \\ -\frac{1}{b} \sin(\theta + \phi) - \frac{1}{\ell} \sin \phi \cos(\theta + \phi) & \frac{1}{b} \cos(\theta + \phi) - \frac{1}{\ell} \sin \phi \sin(\theta + \phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

dove  $v_x$  e  $v_y$  sono due ingressi ausiliari che verranno definiti allo scopo di ottenere uno schema asintoticamente stabile di inseguimento di traiettorie.

Il sistema ad anello chiuso ottenuto, ancora parzialmente non lineare, è descritto dalle

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \frac{\sin \phi}{\ell} (v_x \cos(\theta + \phi) + v_y \sin(\theta + \phi)) \\ \left( \frac{v_y}{b} - \frac{v_x \sin \phi}{\ell} \right) \cos(\theta + \phi) - \left( \frac{v_x}{b} + \frac{v_y \sin \phi}{\ell} \right) \sin(\theta + \phi) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Come si può vedere, i comandi di velocità  $v_x$  e  $v_y$  agiscono indipendentemente sulle componenti  $x$  e  $y$  della velocità del punto  $B$ . Data una traiettoria di riferimento  $\mathbf{p}_{B,d}(t) = (x_{B,d}(t) \quad y_{B,d}(t))^T$  che sia anche solo *continua* nel tempo, se ne realizza il suo inseguimento in modo asintoticamente (in effetti, esponenzialmente) stabile scegliendo nella (5)

$$v_x = \dot{x}_{B,d} + k_x(x_{B,d} - x_B), \quad v_y = \dot{y}_{B,d} + k_y(y_{B,d} - y_B),$$

con  $k_x > 0$  e  $k_y > 0$ .

Il principale vantaggio di questa tecnica di controllo è la sua semplicità nell'ottenere la riproduzione nominale e/o l'inseguimento di traiettorie di uscita di caratteristiche molto generali. Il cammino geometrico sotteso alla traiettoria può infatti avere tangente discontinua e essere percorso senza mai arrestare il moto del punto  $B$ . Questo comportamento è possibile anche in presenza di cuspidi geometriche, poiché la velocità del punto  $B$  può essere invertita di segno in modo istantaneo. Tra gli svantaggi c'è la criticità della scelta di un valore opportuno per  $b$ . Valori troppo piccoli di  $|b|$  comporteranno uno sforzo elevato di controllo in corrispondenza a discontinuità della tangente al cammino da attraversarsi con velocità non trascurabili. Più in generale, ciò avviene ogni volta che è richiesta una variazione brusca di direzione. Viceversa, valori grandi di  $|b|$  portano a un aumento dell'area intorno alla traiettoria nominale del punto  $B$  che viene "spazzata" dal veicolo durante il moto. Ciò deve essere tenuto in conto per evitare collisioni con eventuali ostacoli nelle vicinanze.

Inoltre, a differenza del più semplice caso dell'uniciclo, è interessante qui studiare l'effetto di una scelta di valori negativi per  $b$  e al variare del suo rapporto con la lunghezza  $\ell$  del veicolo. In buona sostanza, occorre analizzare le proprietà dell'evoluzione delle variabili  $(\theta, \phi)$  (la cosiddetta *dinamica zero* del sistema ad anello chiuso (6)), ad esempio la loro limitatezza entro intervalli prefissati quando il punto  $B$  riproduce esattamente una serie di traiettorie (anche complesse) di riferimento.

\* \* \* \* \*