Prova Scritta di Robotica I

B: preferibile per 5 crediti

12 Gennaio 2010

Esercizio 1

Si consideri il cammino cartesiano parametrico

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos s \\ R\sin s \\ h\, s \end{pmatrix}, \qquad s \in [0, +\infty)$$

dove $R > 0$ e $h > 0$. Tale cammino è una spirale intorno all'asse $\boldsymbol{z}$. Assegnato un tempo totale $T > 0$ sufficientemente lungo, definire una legge oraria $s = s(t)$ con profilo di velocità *trapezoidale* per $t \in [0, T]$, tale che la traiettoria pianificata $\boldsymbol{p}_d(t) = \boldsymbol{p}(s(t))$ soddisfi alle seguenti condizioni:

- $\dot{\boldsymbol{p}}_d(0) = \dot{\boldsymbol{p}}_d(T) = \boldsymbol{0}$;
- $\|\dot{\boldsymbol{p}}_d(t)\| \leq V$, con $V > 0$ assegnato;
- $\|\ddot{\boldsymbol{p}}_d(t)\| \leq A$, con $A > 0$ assegnato e sufficientemente grande.

Si fornisca in particolare l'espressione esplicita della quota finale $z_d(T)$ raggiunta.

Inoltre, pianificare un *moto coordinato* per l' *orientamento* lungo il cammino sopra definito, specificando una terna mobile il cui lasse $\boldsymbol{x}_o$ punti sempre verso l'asse centrale (l'asse $\boldsymbol{z}$) della spirale e sia ad esso ortogonale, e con l'asse $\boldsymbol{z}_o$ sempre parallelo a $\boldsymbol{z}$. Qual è il massimo valore raggiunto dalla norma della velocità angolare, $\|\boldsymbol{\omega}\|$, associata alla traiettoria così pianificata?

Valutare infine la soluzione fornita, con i seguenti dati numerici:

$$R = 0.3 \text{ [m]}, \quad h = 0.1 \text{ [m]}, \quad V = 1 \text{ [m/s]}, \quad A = 5 \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad T = 4 \text{ [s]}.$$

Esercizio 2B

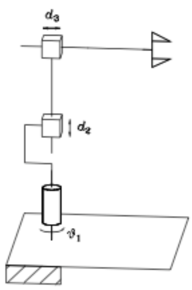

Figura 1: Un manipolatore cilindrico

Derivare lo Jacobiano geometrico 6×3 per il manipolatore cilindrico in Fig. 1 e trovare le singolarità della parte relativa alla velocità lineare. Data una traiettoria $\boldsymbol{p}_d(t)$, differenziabile due volte nel tempo, per la posizione dell'organo terminale, assumendo come ingressi di comando le accelerazioni di giunto $\ddot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 & \ddot{d}_2 & \ddot{d}_3 \end{pmatrix}^T$ e misurando solo $\boldsymbol{q}$ e $\dot{\boldsymbol{q}}$, progettare un controllore cartesiano *a livello di accelerazione* che assegni (fuori da singolarità) al sistema ad anello chiuso il comportamento

$$\ddot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{K}_D \dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{K}_P \boldsymbol{e} = \boldsymbol{0},$$

dove $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{p}_d - \boldsymbol{p}$ e le matrici $\boldsymbol{K}_P$ e $\boldsymbol{K}_D$ sono entrambe definite positive e diagonali.

[150 minuti; libri aperti]

Soluzioni

12 Gennaio 2010

Esercizio 1

Il vettore di velocità lungo il cammino è dato da

$$\dot{\boldsymbol{p}}_d = \frac{d\boldsymbol{p}_d(t)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}(s)}{ds}\frac{ds(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -R\sin s \\ R\cos s \\ h \end{pmatrix} \dot{s},$$

e quindi

$$\|\dot{\boldsymbol{p}}_d(t)\| = \sqrt{R^2+h^2}\,|\dot{s}(t)|.$$

Il vincolo $\|\dot{\boldsymbol{p}}_d(t)\| \leq V$ sulla velocità cartesiana si trasforma in

$$|\dot{s}(t)| \leq \frac{V}{\sqrt{R^2+h^2}} =: V_{\max}$$

sulla velocità oraria $\dot{s}$.

Il vettore di accelerazione lungo il cammino è dato da

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_d = \frac{d^2\boldsymbol{p}_d(t)}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{p}(s)}{ds}\ddot{s}(t) + \frac{d^2\boldsymbol{p}(s)}{ds^2}\dot{s}^2(t) = \begin{pmatrix} -R\sin s \\ R\cos s \\ h \end{pmatrix} \ddot{s} + \begin{pmatrix} -R\cos s \\ -R\sin s \\ 0 \end{pmatrix} \dot{s}^2,$$

e quindi

$$\|\ddot{\boldsymbol{p}}_d(t)\| = \sqrt{(R^2+h^2)\,\ddot{s}^2(t) + (R\,\dot{s}^2(t))^2}.$$

Il vincolo $\|\ddot{\boldsymbol{p}}_d(t)\| \leq A$ sulla accelerazione cartesiana può riscriversi come

$$(R^2+h^2)\,\ddot{s}^2(t) \leq A^2 - (R\,\dot{s}^2(t))^2$$

sulla accelerazione oraria $\ddot{s}$. Poiché tale vincolo deve essere soddisfatto per ogni $t \in [0, T]$, occorre considerare il caso peggiore, ossia $|\dot{s}| = V_{\max}$. Si ottiene quindi

$$|\ddot{s}(t)| \leq \sqrt{\frac{A^2 - (\frac{RV^2}{R^2+h^2})^2}{R^2+h^2}} =: A_{\max}.$$

Per avere un valore ammissibile $A_{\max} > 0$, il limite A deve essere sufficientemente grande:

$$A > \frac{RV^2}{R^2+h^2}. \tag{1}$$

A questo punto, essendo assegnato il tempo totale di moto T e avendo ricavato i limiti $V_{\max}$ e $A_{\max}$, la legge oraria con profilo trapezoidale di velocità è completamente specificata. In particolare, la durata dell'intervallo di accelerazione/decelerazione è

$$T_s = \frac{V_{\max}}{A_{\max}} = \frac{V}{\sqrt{A^2 - (\frac{RV^2}{R^2+h^2})^2}}.$$

Per garantire un profilo effettivamente trapezoidale (con almeno un istante in cui si raggiunge $V_{\max}$), il tempo totale T deve essere sufficientemente lungo:

$$T \geq 2T_s = \frac{2V}{\sqrt{A^2 - (\frac{RV^2}{R^2+h^2})^2}}. \tag{2}$$

Il valore finale del parametro s al tempo $t = T$ è quindi

$$s_{\max} := s(T) = (T - T_s)V_{\max} = TV_{\max} - \frac{V_{\max}^2}{A_{\max}} = \frac{TV}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \frac{V^2}{\sqrt{(R^2 + h^2)A^2 - \frac{(RV^2)^2}{R^2+h^2}}}.$$

Di conseguenza, la quota finale raggiunta al tempo $t = T$ è

$$z_d(T) = h\, s(T) = h\, s_{\max}.$$

Per completezza, calcoliamo anche la curvatura del cammino parametrico assegnato:

$$\kappa(s) = \frac{\left\| \dfrac{d\boldsymbol{p}}{ds} \times \dfrac{d^2\boldsymbol{p}}{ds^2} \right\|}{\left\| \dfrac{d\boldsymbol{p}}{ds} \right\|^3} = \frac{R}{R^2 + h^2}.$$

La curvatura $\kappa(s)$ risulta costante per tutti i valori di s, e risulta pari a $1/R$ quando $h = 0$.

Per pianificare la traiettoria richiesta per l'orientamento in modo che sia coordinata con la traiettoria generata in posizione, si definisce una terna mobile in funzione dello stesso parametro s come segue:

$$\boldsymbol{R}(s) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_o(s) & \boldsymbol{y}_0(s) & \boldsymbol{z}_o(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & -\cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si noti che tale terna differisce da quella di Frenet associata naturalmente al cammino parametrico. Utilizzando le notazioni $\boldsymbol{p}'(s) = d\boldsymbol{p}(s)/ds$ e $\boldsymbol{p}''(s) = d^2\boldsymbol{p}(s)/ds^2$, la terna di Frenet è infatti specificata dalla

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{\text{Frenet}}(s) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}(s) & \boldsymbol{n}(s) & \boldsymbol{b}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{p}'(s)}{\|\boldsymbol{p}'(s)\|} & \dfrac{\boldsymbol{p}''(s)}{\|\boldsymbol{p}''(s)\|} & \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \sin s & -\cos s & \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} \sin s \\ \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \cos s & -\sin s & -\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} \cos s \\ \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} & 0 & \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

In effetti, le due terne coincidono (a meno di una rotazione di $\pi/2$ attorno all'asse $\boldsymbol{z}$) solo quando $h = 0$.

Ponendo $\boldsymbol{R}_d(t) = \boldsymbol{R}(s(t))$, il vettore di velocità angolare si calcola dalla

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}) = \dot{\boldsymbol{R}}_d \boldsymbol{R}_d^T = \dot{s}(t) \begin{pmatrix} \sin s(t) & \cos s(t) & 0 \\ -\cos s(t) & \sin s(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos s(t) & -\sin s(t) & 0 \\ \sin s(t) & -\cos s(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{s}(t) & 0 \\ \dot{s}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Come era intuibile (la rotazione della terna avviene attorno al solo asse fisso $\boldsymbol{z}$ e in senso antiorario), si ottiene

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{s}(t) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{\omega}\| = |\dot{s}(t)|,$$

per cui il massimo valore della norma del vettore di velocità angolare è pari ovviamente a $V_{\max}$.

Con i dati numerici forniti nel testo, che verificano le due disuguaglianze (1) e (2), si ha:

$$V_{\max} = \sqrt{10} = 3.1623, \quad A_{\max} = 4\sqrt{10} = 12.6491, \quad T_s = 0.25,$$

$$s_{\max} = 3.75\sqrt{10} = 11.8585, \quad z_d(T) = 0.375\sqrt{10} = 1.1859\,.$$

Si riportano di seguito alcuni grafici relativi alla traiettoria così pianificata, ottenuti con Matlab (codice disponibile).

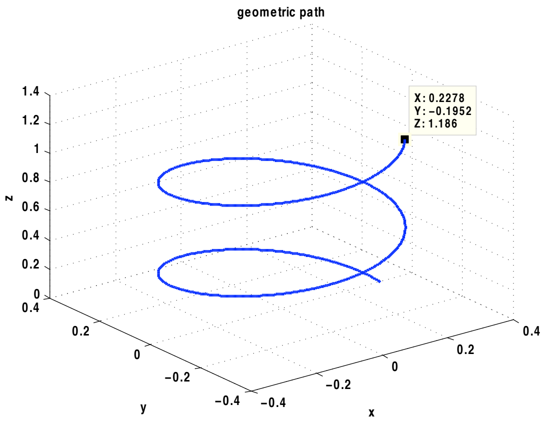

Figura 2: La traiettoria cartesiana a spirale (con le coordinate del punto finale raggiunto al tempo $T = 4$ s)

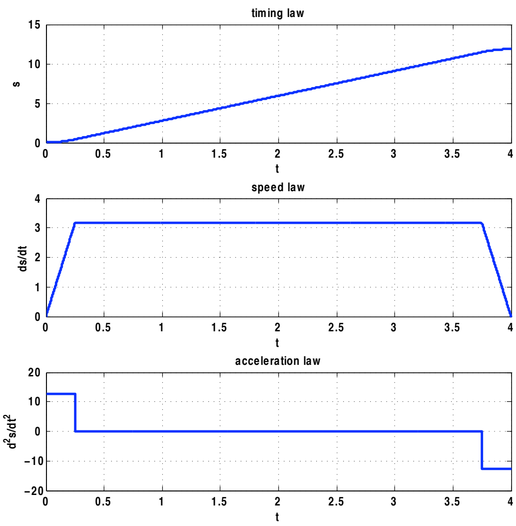

Figura 3: Legge oraria: evoluzione del parametro $s(t)$, della velocità $\dot{s}(t)$ e dell'accelerazione $\ddot{s}(t)$

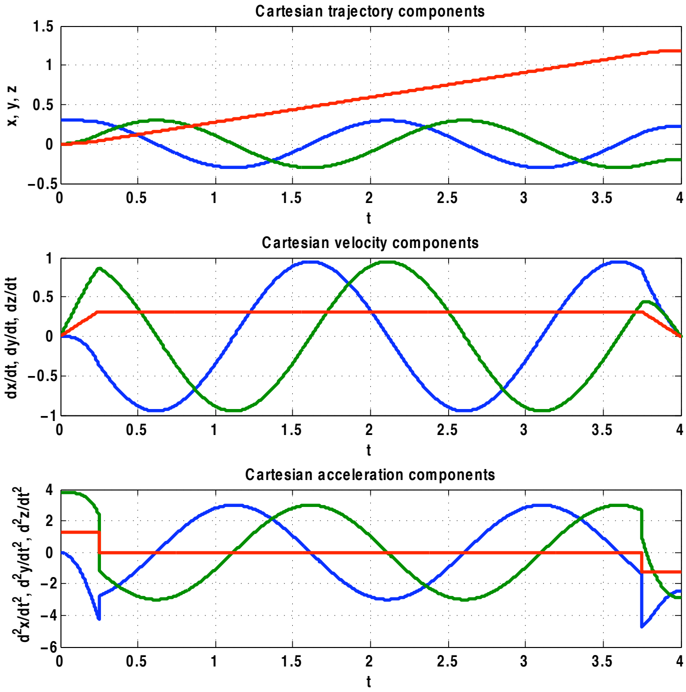

Figura 4: Componenti della traiettoria cartesiana: posizione, velocità, e accelerazione (x in blu, y in verde, z in rosso)

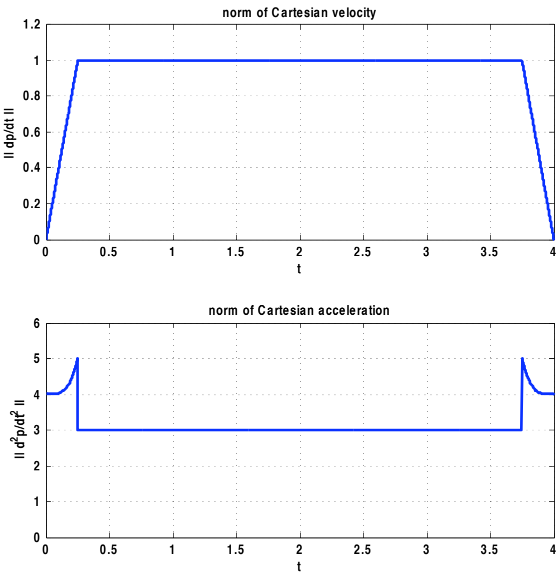

Figura 5: Norme della velocità e dell'accelerazione cartesiana: i limiti assegnati $\|\dot{\boldsymbol{p}}_d(t)\| \leq 1$ e $\|\ddot{\boldsymbol{p}}_d(t)\| \leq 5$ sono rispettati durante l'intero moto

Esercizio 2B

Lo Jacobiano per un manipolatore cilindrico (RPP) con $\boldsymbol{q} = (\theta_1, d_2, d_3)$ è

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{p} & \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

con gli assi dei tre giunti dati da

$$\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e il vettore posizione dell'organo terminale pari a

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} d_3\cos\theta_1 \\ d_3\sin\theta_1 \\ d_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

L'espressione completa dello Jacobiano geometrico è pertanto

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} -d_3\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \\ d_3\cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che rivela l'intrinseca impossibilità della struttura a ruotare intorno agli assi $\boldsymbol{x}_0$ e $\boldsymbol{y}_0$.

Lo Jacobiano relativo alla velocità lineare dell'organo terminale si ottiene estraendo le prime tre righe:

$$\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} -d_3\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \\ d_3\cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esse coincidono ovviamente con quanto si otterrebbe derivando la funzione cinematica diretta $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{q})$ in (3) rispetto a $\boldsymbol{q}$. Il determinante di tale matrice

$$\det \boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{q}) = d_3$$

si annulla nella singolarità $d_3 = 0$. Ciò avviene quando l'organo terminale si trova sull'asse del giunto 1, in modo concettualmente simile alla singolarità di spalla di un braccio 3R antropomorfo.

Essendo $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$, la cinematica differenziale in accelerazione è data dalla

$$\ddot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{J}}_L(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}},$$

dove

$$\dot{\boldsymbol{J}}_L(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} -\dot{d}_3\sin\theta_1 - d_3\,\dot{\theta}_1\cos\theta_1 & 0 & -\dot{\theta}_1\sin\theta_1 \\ \dot{d}_3\cos\theta_1 - d_3\,\dot{\theta}_1\sin\theta_1 & 0 & \dot{\theta}_1\cos\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,\dot{d}_3\,\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - d_3\,\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1 \\ 2\,\dot{d}_3\,\dot{\theta}_1\cos\theta_1 - d_3\,\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Scegliendo allora il vettore di accelerazione di giunto come

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_L^{-1}(\boldsymbol{q})(\ddot{\boldsymbol{p}}_d + \boldsymbol{K}_D(\dot{\boldsymbol{p}}_d - \boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{K}_P(\boldsymbol{p}_d - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{q})) - \dot{\boldsymbol{J}}_L(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{4}$$

si ottiene

$$\ddot{\boldsymbol{p}} = \ddot{\boldsymbol{p}}_d + \boldsymbol{K}_D(\dot{\boldsymbol{p}}_d - \dot{\boldsymbol{p}}) + \boldsymbol{K}_P(\boldsymbol{p}_d - \boldsymbol{p}),$$

ossia il comportamento desiderato ad anello chiuso. Si noti che la (4) è implementata utilizzando le misure di $\boldsymbol{q}$ e $\dot{\boldsymbol{q}}$, oltre alla conoscenza della traiettoria desiderata (fino alla derivata seconda temporale) e della cinematica diretta e differenziale del manipolatore.

* * * * *