Corso di Robotica 2

Modello dinamico dei robot: approccio di Newton-Eulero

Prof. Alessandro De Luca

Dipartimento di Informatica e Sistemistica Antonio Ruberti

Sapienza Università di Roma

Approcci alla modellistica dinamica
(reprise)

approccio energetico (eq. di Eulero-Lagrange) $\rightleftharpoons$ **approccio di Newton-Eulero (bilanciamento forze/coppie)**

approccio energetico (eq. di Eulero-Lagrange)

- robot visto nel suo complesso
- reazioni vincolari automaticamente eliminate (non compiono lavoro)
- si ottengono direttamente equazioni in forma chiusa
- adatto allo studio delle proprietà, all'**analisi** degli schemi di controllo

approccio di Newton-Eulero (bilanciamento forze/coppie)

- equazioni dinamiche scritte separatamente per ogni braccio
- dinamica inversa in tempo reale
  - equazioni valutate in modo numerico e ricorsivo
  - adatto alla **sintesi** degli schemi di controllo basati sul modello
- eliminando le reazioni vincolari e sostituendo le espressioni, si arriva a equazioni dinamiche in forma chiusa (uguali a quelle di Lagrange!)

Derivata di un vettore in terna mobile

... dalle velocità alle accelerazioni

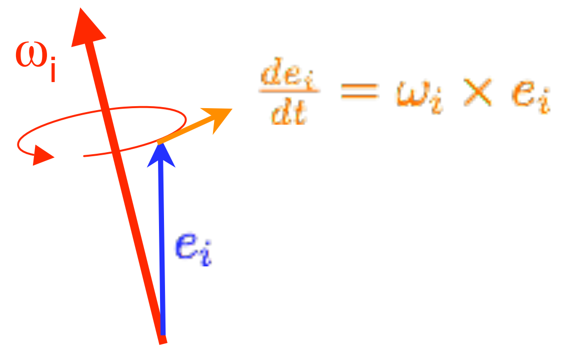
$$ {}^0v_i = {}^0R_i\, {}^iv_i \qquad\qquad {}^0\dot{R}_i = S\left({}^0\omega_i\right){}^0R_i $$

$$ {}^0\dot{v}_i = {}^0a_i = {}^0R_i\, {}^ia_i = {}^0R_i\, {}^i\dot{v}_i + {}^0\dot{R}_i\, {}^iv_i $$

$$ = {}^0R_i\, {}^i\dot{v}_i + {}^0\omega_i \times {}^0R_i\, {}^iv_i = {}^0R_i \left({}^i\dot{v}_i + {}^i\omega_i \times {}^iv_i\right) $$

$$ \boxed{{}^ia_i = {}^i\dot{v}_i + {}^i\omega_i \times {}^iv_i} $$

derivata di un "versore"



Dinamica di un corpo rigido

- equazione dinamica di Newton
  - bilancio: somma forze = variazione quantità di moto

$$\sum f_i = \frac{d}{dt}(m v_c) = m \dot{v}_c$$

- equazione dinamica di Eulero
  - bilancio: somma momenti = variazione momento della quantità di moto

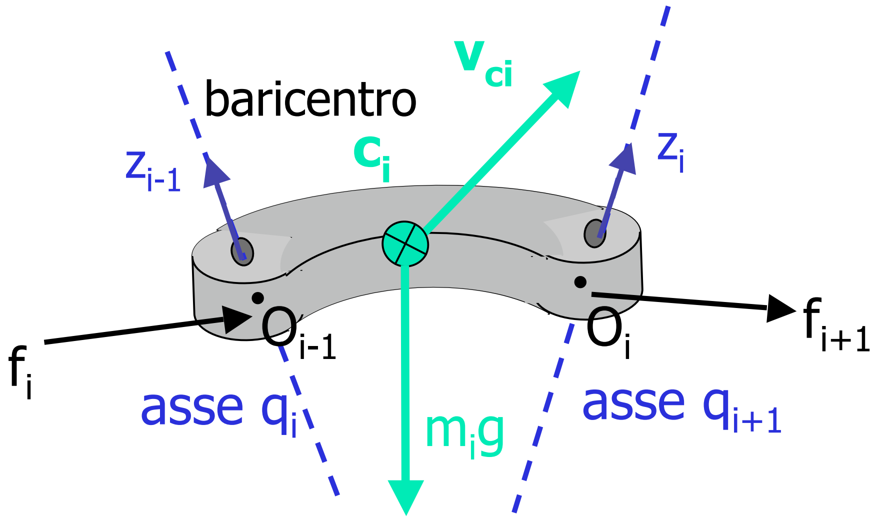
$$\sum \mu_i = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\dot{\omega} + \frac{d}{dt}\left(R\,\bar{I}\,R^T\right)\omega = I\dot{\omega} + \left(\dot{R}\,\bar{I}\,R^T + R\,\bar{I}\,\dot{R}^T\right)\omega$$

$$= I\dot{\omega} + S(\omega)R\,\bar{I}\,R^T\omega + R\,\bar{I}\,R^T S^T\cancel{(\omega)}\omega = I\dot{\omega} + \omega \times I\omega$$

- principio di azione e reazione
  - forze/momenti: applicati dal corpo = - agenti sul corpo

Equazioni di Newton-Eulero

braccio i



FORZE

f_i forza applicata dal braccio (i-1) sul braccio i

f_{i+1} forza applicata dal braccio i sul braccio (i+1)

$m_i g$ forza di gravità

tutti i vettori espressi nello stesso SR (conviene SR_i)

equazione di Newton

$$\boxed{f_i - f_{i+1} + m_i g = m_i a_{ci}}$$

N

accelerazione lineare assoluta di c_i

Equazioni di Newton-Eulero

braccio i

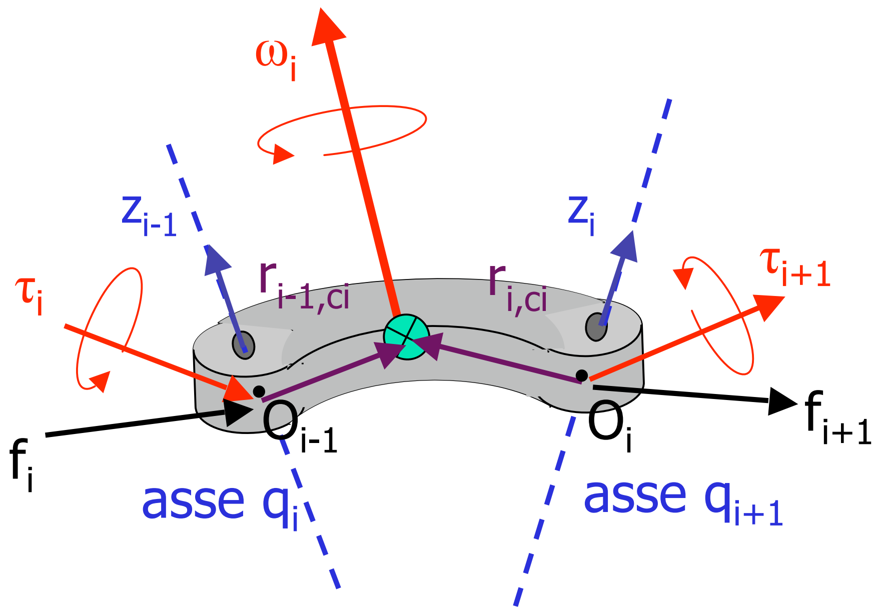
MOMENTI

τ_i coppia applicata
dal braccio (i-1) sul braccio i

τ_{i+1} coppia applicata
dal braccio i sul braccio (i+1)

$f_i \times r_{i-1,c}$ momento di f_i rispetto a c_i

$- f_{i+1} \times r_{i,c}$ momento di $- f_{i+1}$ rispetto a c_i



tutti i vettori espressi nello stesso SR (SR_i !!)

equazione di Eulero

$$\boxed{\tau_i - \tau_{i+1} + f_i \times r_{i-1,ci} - f_{i+1} \times r_{i,ci} = I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_i \omega_i)}$$

E

Ricorsione in avanti
Calcolo velocità e accelerazioni

- algoritmo dei "moving frames" (già visto per le velocità in Lagrange)
- dove l'apice è omesso, è uguale al pedice $(\omega_i = {}^i\omega_i)$
- per semplicità solo giunti rotatori
  (vedi libro per trattazione generale)

inizializzazioni

AR

$$\omega_i = {}^{i-1}R_i^T \left[\omega_{i-1} + \dot{q}_i z_{i-1}\right] \longleftarrow \omega_0$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_i &= {}^{i-1}R_i^T \left[\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{q}_i z_{i-1} - \dot{q}_i z_{i-1} \times (\omega_{i-1} + \dot{q}_i z_{i-1})\right] \\ &= {}^{i-1}R_i^T \left[\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{q}_i z_{i-1} + \dot{q}_i \omega_{i-1} \times z_{i-1}\right] \longleftarrow \dot{\omega}_0\end{aligned}$$

$$a_i = {}^{i-1}R_i^T a_{i-1} + \dot{\omega}_i \times {}^i r_{i-1,i} + \omega_i \times (\omega_i \times {}^i r_{i-1,i}) \longleftarrow a_0 - {}^0g$$

$$a_{ci} = a_i + \dot{\omega}_i \times r_{i,ci} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,ci})$$

se aggiunto qui, evita il calcolo esplicito della gravità nell'equazione di Newton

Ricorsione all'indietro
Calcolo forze e momenti

da N_i → in N_{i-1}

eliminabile, se inserita nella ricorsione in avanti

inizializzazioni

F/TR

$$f_i = f_{i+1} + m_i(a_{ci} - \cancel{{}^i g}) \longleftarrow f_{N+1} \quad \tau_{N+1}$$

$$\tau_i = \tau_{i+1} - f_i \times (r_{i-1,i} + r_{i,ci}) + f_{i+1} \times r_{i_c i} + I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_i \omega_i)$$

da E_i → in E_{i-1}

al termine di questa ricorsione, per ogni giunto si hanno due equazioni vettoriali (N_i + E_i) con f_i e τ_i ancora incognite: queste "contengono" le reazioni vincolari ai giunti (occorre "proiettarle" sugli assi di giunto)

FP

$$u_i = \begin{cases} f_i^T\, {}^i z_{i-1} + \eta_i \dot{q}_i & \text{giunto prismatico} \\ \tau_i^T\, {}^i z_{i-1} + \eta_i \dot{q}_i & \text{giunto rotoidale} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{N equazioni scalari}}$$

forze generalizzate (parte destra di Eulero-Lagrange)

aggiunta di termini dissipativi (qui solo attrito viscoso)

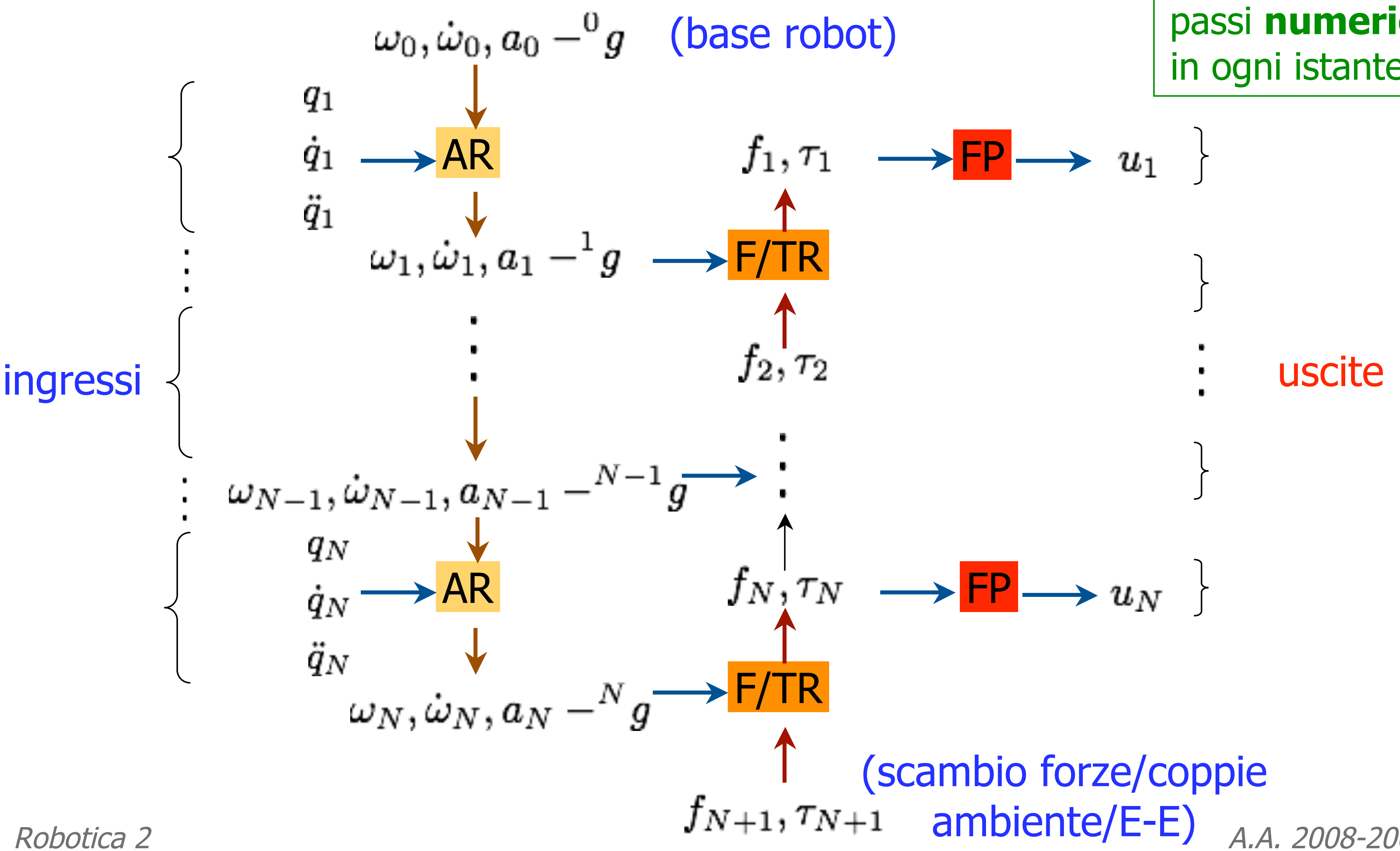
Considerazioni su Newton-Eulero

- le precedenti formule ricorsive si possono valutare in modo simbolico o numerico
  - simbolico
    - sostituendo ricorsivamente le espressioni
    - ottengo alla fine il modello dinamico in forma chiusa, identico al caso di Lagrange
    - non ha una particolare convenienza
  - numerico
    - sostituendo i valori numerici ad ogni passo
    - la complessità di calcolo del singolo passo rimane costante (cresce complessivamente in modo lineare con il numero N di giunti)
    - è fortemente raccomandato per l'uso in tempo reale quando N è grande

Algoritmo di Newton-Eulero

Schema efficiente di calcolo della dinamica inversa

passi **numerici**
in ogni istante t



Codice di calcolo Matlab

routine generale $NE_{\alpha}(arg_1,arg_2,arg_3)$

- file dati (dello specifico robot)
  - numero N e tipo σ dei giunti
  - tabella dei parametri cinematici di DH
  - lista dei parametri dinamici dei singoli bracci (e motori)
- input
  - parametro vettoriale $\alpha = \{{}^0g, 0\}$ (presenza o assenza di gravità)
  - tre argomenti vettoriali ordinati
    - tipicamente, campioni di posizione, velocità, accelerazione estratti da una traiettoria desiderata
- output
  - forza generalizzata u per dinamica inversa completa
  - … o singoli termini dinamici del modello

Esempi di output

- completo

$$u = NE_{0g}(q,\dot{q},\ddot{q}) = B(q)\ddot{q}+c(q,\dot{q})+g(q)$$

- termine di gravità

$$u = NE_{0g}(q,0,0) = g(q)$$

- colonna i-esima della matrice di inerzia

$$u = NE_{0}(q,0,e_i) = b_i(q)$$

e_i = i-esima colonna matrice identità

- termini centrifughi e di Coriolis

$$u = NE_{0}(q,\dot{q},0) = c(q,\dot{q})$$

- momento generalizzato

$$u = NE_{0}(q,0,\dot{q}) = B(q)\dot{q}$$