Corso di Robotica 2

Controllo nello spazio cartesiano

Prof. Alessandro De Luca

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
E SISTEMISTICA ANTONIO RUBERTI

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Controllo di posizione cartesiana

- PD+ per problemi di regolazione
  - proporzionale all'errore cartesiano/derivativo (sulle velocità) nei giunti + compensazione di gravità
- robot
  - dinamica $B(q)\ddot{q} + S(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u$
  - cinematica $p = f(q) \quad \rightarrow \quad \dot{p} = J(q)\dot{q}$
- obiettivo: asintotica stabilizzazione della "posa"

dimensioni degli spazi
giunti=N
cartesiano=M

$$\boxed{p = p_d,\ \dot{q} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{p}_d = 0}$$

N.B. se N = M, allora $\dot{q} = 0 \Leftrightarrow \dot{p} = 0$, a meno di singolarità

se N > M, allora la specifica non è uno stato "completo" (mancano (N-M) coordinate posizionali…)

Regolatore cartesiano

(*) $\quad u = J^T(q)\left[K_P(p_d - p)\right] - K_D\dot{q} + g(q)$ $\quad K_P, K_D > 0$ (simmetriche)

Teorema

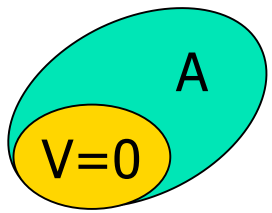
sotto il controllo (*), il robot è stabilizzato asintoticamente all'insieme di stati

$$\boxed{A = \left\{\dot{q} = 0,\ q:\ K_P\left(p_d - f(q)\right) \in \mathcal{N}\left(J^T(q)\right)\right\}} \supseteq \left\{\dot{q} = 0,\ q:\ f(q) = p_d\right\}$$

Dimostrazione

definito $e_P = p_d - p$ (errore cartesiano) si utilizza la candidata di Lyapunov

$$\boxed{V = \tfrac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q} + \tfrac{1}{2}e_P^T K_P e_P \geq 0}$$



con $V = 0 \Leftrightarrow (q,\dot{q}) \in \left\{\dot{q} = 0,\ q:\ f(q) = p_d\right\} \subseteq A$

Dimostrazione (cont)

differenziando $V = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q} + \frac{1}{2} e_P^T K_P e_P \geq 0$

$$\dot{V} = \dot{q}^T\left(B\ddot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{B}\dot{q}\right) - e_P^T K_P \dot{p}$$

$$= \dot{q}^T\left(u - \cancel{S\dot{q}} - g + \cancel{\tfrac{1}{2}\dot{B}\dot{q}}\right) - e_P^T K_P J\dot{q}$$

$$= \dot{q}^T\left(\cancel{J^T K_P e_P} - K_D\dot{q} + \cancel{g} - \cancel{g}\right) - \cancel{e_P^T K_P J\dot{q}}$$

$$= -\dot{q}^T K_D \dot{q} \leq 0$$ con $\dot{V} = 0 \;\Leftrightarrow\; \dot{q} = 0$

in tale condizione, ad anello chiuso si ha

$$B(q)\ddot{q} + g(q) = J^T(q) K_P e_P + g(q) \Rightarrow \ddot{q} = B^{-1}(q) J^T(q) K_P e_P$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{q} = 0 \Leftrightarrow K_P e_P \in \mathcal{N}\left(J^T(q)\right)}$$

applicando LaSalle segue la tesi

Corollario

se a partire da uno stato iniziale $(q(0), \dot{q}(0))$ il robot non incontra nessuna singolarità di $J^T(q)$ (configurazioni in cui $\rho(J^T) < M \leq N$), allora si ha stabilizzazione asintotica verso uno ($M=N$) o più ($M<N$) stati con

$$\boxed{e_P = 0, \quad \dot{q} = 0}$$

N.B. le configurazioni q singolari di $J^T(q)$ coincidono con quelle di $J(q)$

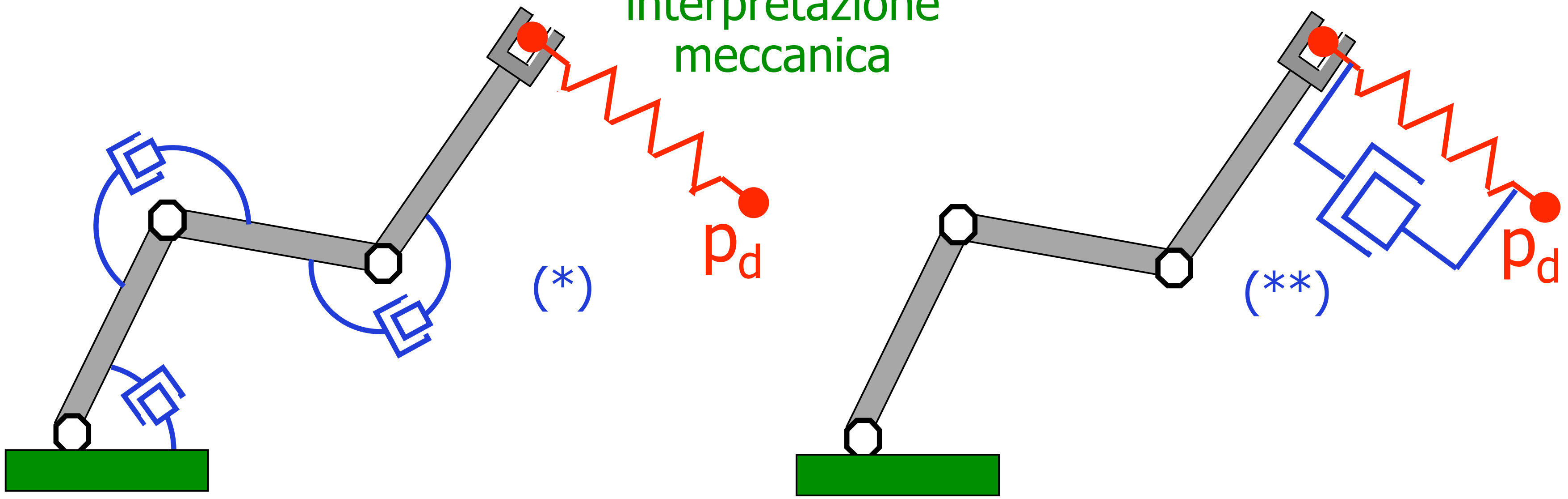
Una variante per la regolazione

controllo PD "tutto" cartesiano + compensazione gravità

(**) $$u = J^T(q)\left[K_P(p_d - p) - K_D\dot{p}\right] + g(q)$$

$K_P, K_D > 0$ (simmetriche)

interpretazione meccanica



J^T trasforma la forza/coppia di richiamo elastica (visco-elastica nel caso (**)) sull'end-effector in coppie ai giunti

Feedback linearizzazione nel cartesiano

robot $B(q)\ddot{q} + c(q,\dot{q}) + g(q) = u$

uscita $y = p, \quad p = f(q)$ posizione/orientamento cartesiano

ipotesi: M = N

Algoritmo si deriva l'uscita fino alla comparsa dell'ingresso e si verifica che l'ingresso sia esplicitabile ("controllo per inversione")

$$y = f(q)$$

$$\dot{y} = J(q)\dot{q}$$

dal modello dinamico

$$\ddot{y} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q}$$

$$= J(q)B^{-1}(q)u - J(q)B^{-1}(q)\left[c(q,\dot{q}) + g(q)\right] + \dot{J}(q)\dot{q}$$

Teorema

per un robot (non ridondante), è possibile linearizzare esattamente e disaccoppiare il comportamento dinamico cartesiano se e solo se

$$\det J(q) \neq 0$$

FL nello spazio cartesiano

legge di controllo

$$u = B(q)J^{-1}(q)a + c(q,\dot{q}) + g(q) - B(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)\dot{q}$$

$$= \beta(q)a + \alpha(q,\dot{q})$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = \ddot{p} = J(q)B^{-1}(q)u - J(q)B^{-1}(q)\left[c(q,\dot{q}) + g(q)\right] + \dot{J}(q)\dot{q} = a$$

p, $\dot{p}$ sono le coordinate "linearizzanti"

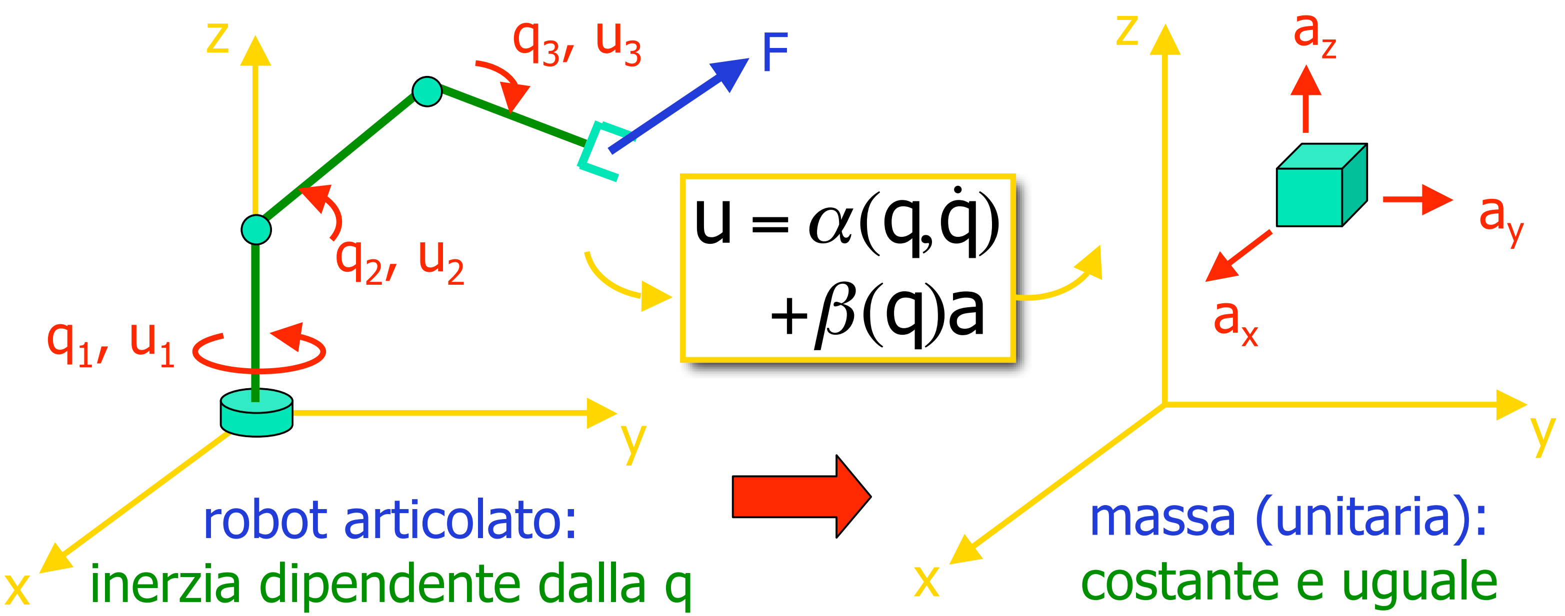
equazioni ad anello chiuso (nello spazio dei giunti)

$$B^{-1} * \quad B\ddot{q} + c + g = BJ^{-1}a + c + g - BJ^{-1}\dot{J}\dot{q}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{q} = J^{-1}a - J^{-1}\dot{J}\dot{q}$$

puramente cinematiche!

Interpretazione



robot articolato:
inerzia dipendente dalla q
e variabile nelle direzioni cartesiane

massa (unitaria):
costante e uguale
in tutte le direzioni

risposta ad una forza F sull'E-E: il robot originario accelera con una $\ddot{p}$ in direzione diversa, la massa unitaria invece nella stessa direzione di F

Commenti

- il sistema robotico ha tutte le uscite con grado relativo uniforme pari a 2 (posizione p ⇔ accelerazione a)
- si può ottenere disaccoppiamento e linearizzazione ingresso-uscita (non di tutto lo stato) anche per robot ridondanti (M<N) sostituendo J^{-1} con $J^{\#}$
- la sintesi di un controllore di traiettoria cartesiana si completa stabilizzando le singole catene di doppi integratori con

$$\boxed{a_i = \ddot{p}_{di} + K_{Di}(\dot{p}_{di} - \dot{p}_i) + K_{Pi}(p_{di} - p_i)} \quad i=1,\ldots,M$$

Commenti (cont)

- il transitorio dell'errore cartesiano lungo la traiettoria è esponenzialmente stabile (con autovalori assegnabili a piacere tramite K_P e K_D)
- applicato al caso particolare p_d = costante (regolazione), fornisce

$$u = B(q)J^{-1}(q)[K_P e_P - K_D \dot{q}] + c(q,\dot{q}) + g(q) - B(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)\dot{q}$$

più complesso di quelli pensati direttamente per la regolazione (*) o (**), ma con transitorio di errore ancora esponenziale

Rilettura in termini cartesiani

il controllo disaccoppiante e linearizzante può riscriversi nello spazio cartesiano in termini di una forza/coppia F

$$\boxed{u = B(q)J^{-1}(q)a + c(q,\dot{q}) + g(q) - B(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)\dot{q}}$$

il comando u si sposta nello spazio cartesiano come $F = J^{-T}(q)u$

$$F = \left[J^{-T}BJ^{-1}\right]a \longrightarrow \text{inerzia cartesiana}$$

$$+\left[J^{-T}c - J^{-T}BJ^{-1}\dot{J}\dot{q}\right] \longrightarrow \text{Coriolis/centrifughe cartesiane}$$

$$+\left[J^{-T}g\right] \longrightarrow \text{gravità cartesiana}$$

$$= B_p a + c_p + g_p$$

il modello dinamico cartesiano era infatti

$$B_p(p)\ddot{p} + c_p(p,\dot{p}) + g_p(p) = F$$