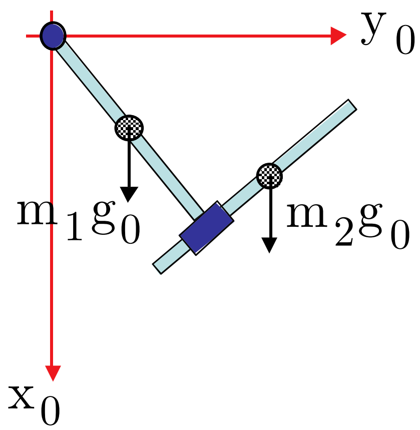
Prova Scritta di Robotica II

25 Marzo 2004

Si consideri il robot planare RP in figura, in moto in un piano verticale. Siano: m_1 e m_2 le masse dei due bracci; d_1 la distanza del baricentro del primo braccio dall'asse del primo giunto; l_1 la lunghezza del primo braccio; I_1 e I_2 i momenti di inerzia baricentrali dei due bracci (intorno ad un asse normale al piano del moto).



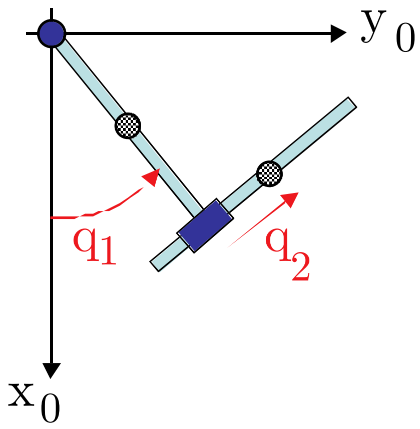
- Ricavare il modello dinamico del robot in forma Lagrangiana.
- Progettare una legge di controllo adattativa che sia in grado di inseguire asintoticamente traiettorie di giunto assegnate in assenza di informazioni sui parametri dinamici. Supponendo note l_1 e l'accelerazione di gravità g_0, determinare l'espressione di tale legge di controllo adattativa in termini di un numero minimo di coefficienti dinamici (pari al numero di stati del controllore dinamico).
- Supponendo che il secondo giunto (prismatico) sia non attuato ($u_2 = 0$), progettare una legge di controllo nonlineare con reazione istantanea dallo stato in modo da linearizzare esattamente e globalmente il comportamento dinamico della prima variabile di giunto q_1. È possibile, in alternativa, ottenere lo stesso risultato con riferimento alla variabile q_2?

[120 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzione

25 Marzo 2004

Si fa riferimento alle coordinate generalizzate mostrate in figura, che corrispondono peraltro alle variabili θ_1 e d_2 della notazione di Denavit-Hartenberg).



L'energia cinetica $T = T_1 + T_2$ del sistema è calcolata come segue:

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1 d_1^2 + I_1)\dot{q}_1^2 \qquad T_2 = \frac{1}{2}m_2 v_{c2}^T v_{c2} + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_1^2.$$

Essendo la posizione del baricentro del secondo braccio pari a

$$p_{c2} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 - q_2 s_1 \\ l_1 s_1 + q_2 c_1 \end{bmatrix},$$

in cui si è posto $s_1 = \sin q_1$ e $c_1 = \cos q_1$, la sua velocità lineare risulta essere

$$v_{c2} = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + q_2 c_1)\dot{q}_1 - s_1\dot{q}_2 \\ (l_1 c_1 - q_2 s_1)\dot{q}_1 + c_1\dot{q}_2 \end{bmatrix}.$$

Pertanto la matrice di inerzia $B(q)$ del sistema si ricava dalla $T = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q}$ come

$$B(q) = \begin{bmatrix} I_0 + m_2 q_2^2 & m_2 l_1 \\ m_2 l_1 & m_2 \end{bmatrix}.$$

dove si è posto $I_0 = I_1 + m_1 d_1^2 + I_2 + m_2 l_1^2$. Si sottolinea che, assumendo nota l_1 (che d'altronde è una grandezza cinematica), il numero di coefficienti dinamici indipendenti presenti nella matrice d'inerzia è pari a due (m_2 ed I_0).

I termini centrifughi e di Coriolis si calcolano mediante i simboli di Christoffel, ovvero dalle

$$c_i(q,\dot{q}) = \dot{q}^T C_i(q)\dot{q} \qquad C_i(q) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial b_i}{\partial q}\right) + \left(\frac{\partial b_i}{\partial q}\right)^T - \left(\frac{\partial B}{\partial q_i}\right)\right], \qquad i = 1,2$$

dove b_i è la colonna i-esima di $B(q)$. Si ottiene

$$C_1(q) = \begin{bmatrix} 0 & m_2 q_2 \\ m_2 q_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_2(q) = \begin{bmatrix} -m_2 q_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui

$$c(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ -m_2 q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}.$$

Una fattorizzazione $c(q, \dot{q}) = S(q, \dot{q})\dot{q}$ tale da rendere la matrice $\dot{B} - 2S$ antisimmetrica è ottenuta scegliendo come righe della S le $s_i^T = \dot{q}^T C_i(q)$. Si ha quindi

$$S(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} m_2 q_2 \dot{q}_2 & m_2 q_2 \dot{q}_1 \\ -m_2 q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tale scelta sarà importante per il progetto del controllore adattativo.
Infine per i termini legati al potenziale gravitazionale $U = U_1 + U_2$ si ha

$$U_1 = -m_1 g_0 d_1 c_1 \qquad U_2 = -m_2 g_0 (l_1 c_1 - q_2 s_1),$$

da cui

$$g(q) = \left(\frac{\partial U}{\partial q} \right)^T = \begin{bmatrix} md_3 g_0 s_1 + m_2 g_0 q_2 c_1 \\ m_2 g_0 s_1 \end{bmatrix}$$

dove si è posto $md_3 = m_1 d_1 + m_2 l_1$. Si noti che, essendo noto per ipotesi g_0, tale coefficiente dinamico è l'unico aggiuntivo (per un totale di tre).
Il modello dinamico risultante è nella forma usuale

$$B(q)\ddot{q} + S(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u. \tag{1}$$

Il controllore adattativo richiesto ha la seguente struttura. Posto

$$a = \begin{bmatrix} I_0 \\ m_2 \\ md_3 \end{bmatrix} \in I\!R^3,$$

si ha

$$\begin{aligned} u &= \widehat{B}(q)\ddot{q}_r + \widehat{S}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \widehat{g}(q) + K_P e + K_D \dot{e} \\ &= Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\widehat{a} + K_P e + K_D \dot{e} \end{aligned}$$

dove $q_d = q_d(t)$ è la traiettoria desiderata, $e = q_d - q$, $\dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda e$ (velocità di riferimento, con $\Lambda > 0$ diagonale) e le matrici dei guadagni $K_P > 0$ e $K_D > 0$ si possono prendere diagonali. Inoltre

$$Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{1r} & q_2^2 \ddot{q}_{1r} + l_1 \ddot{q}_{2r} + q_2(\dot{q}_1 \dot{q}_{2r} + \dot{q}_2 \dot{q}_{1r}) + g_0 q_2 c_1 & g_0 s_1 \\ 0 & l_1 \ddot{q}_{1r} + \ddot{q}_{2r} - q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_{1r} + g_0 s_1 & 0 \end{bmatrix},$$

dove si è utilizzata la struttura della matrice $S(q, \dot{q})$ per i termini quadratici nelle velocità. Per la stima $\widehat{a}$ si ha l'aggiornamento

$$\dot{\widehat{a}} = \Gamma\, Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \left(\dot{q}_r - \dot{q}\right)$$

con la matrice $\Gamma > 0$ (diagonale).

Si supponga ora di non avere a disposizione un attuatore sul secondo giunto (prismatico), ossia $u_2 = 0$. Le equazioni dinamiche (1) si possono allora convenientemente riscrivere nella seguente forma scalare:

$$(I_0 + m_2 q_2^2)\ddot{q}_1 + m_2 l_1 \ddot{q}_2 + 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + g_0(m d_3 s_1 + m_2 q_2 c_1) = u_1 \qquad (2)$$

$$m_2 l_1 \ddot{q}_1 + m_2 \ddot{q}_2 - m_2 q_2 \dot{q}_1^2 + g_0 m_2 s_1 = 0. \qquad (3)$$

Isolando $\ddot{q}_2$ dalla equazione (3)

$$\ddot{q}_2 = -l_1 \ddot{q}_1 + q_2 \dot{q}_1^2 - g_0 s_1$$

e sostituendo nella (2) si ottiene per questa

$$(I_0 + m_2 q_2^2 - m_2 l_1^2)\ddot{q}_1 + m_2 q_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_1 \dot{q}_1^2) + g_0(m_1 d_1 s_1 + m_2 q_2 c_1) = u_1.$$

Si noti che il termine inerziale a fattore della $\ddot{q}_1$ è certamente positivo in quanto

$$I_0 - m_2 l_1^2 = I_1 + m_1 d_1^2 + I_2 =: I_0' > 0.$$

Questa proprietà è vera anche più in generale, ossia per un robot a n gradi di libertà —dei quali solo $m < n$ attuati— quando si vadano ad eliminare le accelerazioni dei giunti passivi, grazie alla definita positività degli elementi o dei blocchi sulla diagonale della matrice di inerzia. In analogia alla legge di controllo linearizzante (e disaccoppiante) per un robot completamente attuato, si può allora definire in modo globale il controllore con reazione dallo stato

$$u_1 = (I_0' + m_2 q_2^2) a_1 + m_2 q_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_1 \dot{q}_1^2) + g_0(m_1 d_1 s_1 + m_2 q_2 c_1)$$

che fornisce ad anello chiuso il risultato richiesto, ossia la linearizzazione esatta della dinamica della q_1 (la variabile *collocata* con l'attuazione disponibile):

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= a_1 \\ \ddot{q}_2 &= -l_1 a_1 + q_2 \dot{q}_1^2 - g_0 s_1. \end{aligned}$$

Si noti che la dinamica della seconda variabile q_2 è ancora non lineare ed accoppiata a quella della prima.
Si può alternativamente linearizzare in modo esatto la dinamica della variabile q_2, che risulta *non collocata* con l'attuazione u_1 disponibile. Procedendo in maniera simmetrica al caso precedente, il controllore

$$\begin{aligned} u_1 = &\left[m_2 l_1 - \frac{I_0 + m_2 q_2^2}{l_1} \right] a_2 + 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (I_0 + m_2 q_2^2) \frac{q_2}{l_1} \dot{q}_1^2 \\ &+ g_0(m d_3 s_1 + m_2 q_2 c_1) - (I_0 + m_2 q_2^2) \frac{g_0}{l_1} s_1 \end{aligned}$$

fornisce infatti ad anello chiuso:

$$\begin{aligned}(I_0 + m_2 q_2^2)\ddot{q}_1 + 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + g_0(m d_3 s_1 + m_2 q_2 c_1) &= -m_2 l_1 a_2 \\ \ddot{q}_2 &= a_2.\end{aligned}$$

Si noti che, in questo caso particolare, la legge di controllo per u_1 risulta ancora valida globalmente in quanto il termine a fattore della a_2 è definito in segno (sempre negativo). Questa proprietà non è però vera in generale per la situazione non collocata.