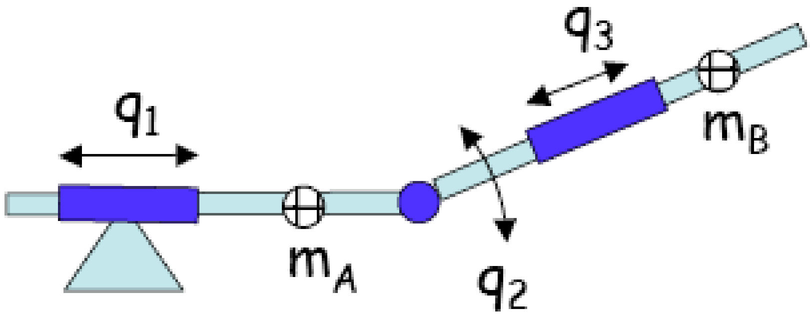
Prova Scritta di Robotica II

19 Aprile 2007

Esercizio 1



Si ricavi il modello dinamico del robot PRP mostrato in figura, in moto in un piano verticale. Si indichino esplicitamente le assunzioni fatte nella modellizzazione.

Esercizio 2

Si consideri un robot a N giunti il cui modello dinamico è espresso nella forma generale

$$B(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) = u.$$

Fornire l'espressione di una legge di controllo per un problema di regolazione della configurazione costante q_d, con $g(q_d) = 0$, che imponga all'errore di posizione $e = q_d - q$ la seguente dinamica transitoria:

$$\ddot{e} + 20\, I_N\, \dot{e} + 100\, I_N\, e = 0,$$

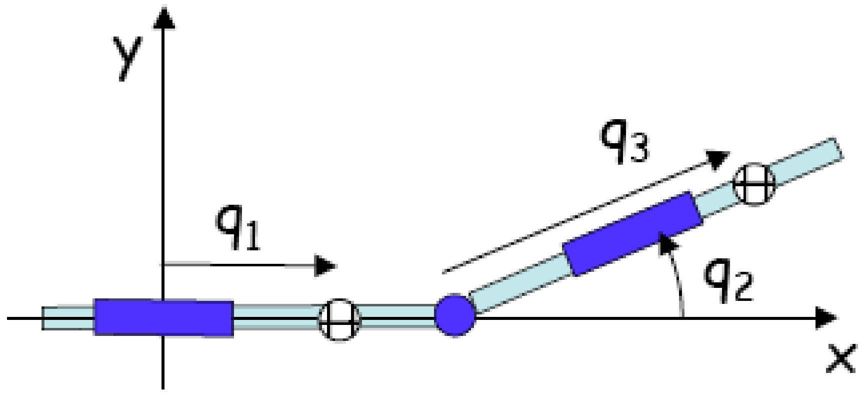
dove I_N è la matrice identica $N \times N$.

[120 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzioni

19 Aprile 2007

Esercizio 1



Definite le coordinate generalizzate come in figura, si calcola l'energia cinetica dei due corpi costituenti il robot. Si può trascurare la massa della parte fissa a valle del giunto rotatorio. Si ha:

$$T_A = \frac{1}{2} m_A \dot{q}_1^2, \qquad T_B = \frac{1}{2} I_B \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^T v_B,$$

dove I_B (scalare) è l'inerzia del corpo B intorno all'asse normale al piano del moto e passante per il baricentro e v_B è la velocità del baricentro stesso. Lavorando nel piano (x, y) del moto, la posizione del baricentro è data da

$$p_B = \begin{bmatrix} q_1 + \Delta + q_3 \cos q_2 \\ q_3 \sin q_2 \end{bmatrix},$$

dove Δ è la distanza costante tra il baricentro del corpo A ed il secondo giunto, da cui

$$v_B = \dot{p}_B = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 + \dot{q}_3 \cos q_2 - q_3\, \dot{q}_2 \sin q_2 \\ \dot{q}_3 \sin q_2 + q_3\, \dot{q}_2 \cos q_2 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$v_B^T v_B = \|v_B\|^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^3 + q_3^2\, \dot{q}_2^2 + 2 \cos q_2\, \dot{q}_1 \dot{q}_3 - 2 q_3 \sin q_2\, \dot{q}_1 \dot{q}_2.$$

L'energia cinetica totale è

$$T(q, \dot{q}) = T_A + T_B = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q}$$

con matrice di inerzia del robot pari a

$$B(q) = \begin{bmatrix} m_A + m_B & -m_B q_3 \sin q_2 & m_B \cos q_2 \\ -m_B q_3 \sin q_2 & I_B + m_B q_3^3 & 0 \\ m_B \cos q_2 & 0 & m_B \end{bmatrix}.$$

I termini di Coriolis e centrifughi si calcolano dalle usuali formule di Christoffels, per differenziazione degli elementi della matrice di inerzia:

$$c_i(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T C_i(q)\dot{q}, \qquad C_i(q) = \left[\left(\frac{\partial b_i}{\partial q}\right) + \left(\frac{\partial b_i}{\partial q}\right)^T - \frac{\partial B}{\partial q_i}\right], \qquad i = 1, 2, 3.$$

Si ha quindi:

$$C_1(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2m_B q_3 \cos q_2 & -2m_B \sin q_2 \\ 0 & -2m_B \sin q_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1(q, \dot{q}) = -m_B(q_3 \cos q_2\, \dot{q}_2^2 + 2 \sin q_2\, \dot{q}_2 \dot{q}_3),$$

$$C_2(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_B q_3 \\ 0 & 2m_B q_3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_2(q, \dot{q}) = 2m_B q_3\, \dot{q}_2 \dot{q}_3,$$

$$C_3(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2m_B q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_3(q, \dot{q}) = -m_B q_3\, \dot{q}_2^2.$$

Infine, l'energia potenziale gravitazionale è data da $U(q) = U_0 + g_0 m_B q_3 \sin q_2$ (con $g_0 = 9.81 > 0$). Il termine gravitazionale del modello è pertanto

$$g(q) = \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)^T = g_0 \begin{bmatrix} 0 \\ m_B q_3 \cos q_2 \\ m_B \sin q_2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Imporre una dinamica lineare all'errore di posizione richiede la cancellazione delle non-linearità dinamiche. Il fatto che q_d sia una configurazione di equilibrio ad anello aperto non ha alcun rilievo. Pertanto la legge di controllo cercata è

$$u = B(q)\left[-20\dot{q} + 100(q_d - q)\right] + c(q, \dot{q}) + g(q),$$

che sostituita nel modello, dopo semplificazioni, fornisce

$$\ddot{q} = -20\dot{q} + 100(q_d - q)$$

ossia la relazione dinamica d'errore cercata, essendo $\dot{e} = -\dot{q}$, $\ddot{e} = -\ddot{q}$.

* * * * *