Compito di Robotica II

Origine: Automazione degli Impianti, 19 Aprile 1990

1. Derivare le equazioni che descrivono la dinamica di un robot di tipo SCARA, a due gradi di libertà rotatori che si muove nel piano orizzontale (x, y). Siano, per $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} m_{bi} &: \text{massa del braccio } i \\ m_{mi} &: \text{massa del motore } i \\ \ell_i &: \text{lunghezza del braccio } i \\ \ell_{ci} &: \text{distanza del baricentro del braccio } i \text{ dall'asse del giunto } i \\ I_{bi} &: \text{inerzia del braccio } i \text{ rispetto all'asse baricentrale normale al piano } (x, y) \\ I_{mi} &: \text{inerzia del motore } i \text{ rispetto al proprio asse di rotazione} \end{aligned}$$

   I due motori sono collocati in corrispondenza ai giunti ed hanno asse di rotazione normale al piano (x, y) e baricentro sull'asse di rotazione. I rapporti di riduzione delle trasmissioni sono unitari.

2. Utilizzando in fase di progetto una traiettoria nello spazio dei giunti di tipo *bang-bang* in accelerazione tale da effettuare una rotazione (da fermo a fermo) di $90°$ in un secondo, e dati i seguenti valori dei parametri meccanici

$$\begin{aligned} m_{b1} &= 10\ kg & m_{b2} &= 5\ kg \\ m_{m1} &= 6\ kg & m_{m2} &= 2\ kg \\ \ell_1 &= 0.7\ m & \ell_2 &= 0.3\ m \\ \ell_{c1} &= 0.35\ m & \ell_{c2} &= 0.15\ m \\ I_{b1} &= 0.5\ kg\, m^2 & I_{b2} &= 0.05\ kg\, m^2 \\ I_{m1} &= 0.02\ kg\, m^2 & I_{m2} &= 0.005\ kg\, m^2 \end{aligned}$$

   determinare in modo approssimato il valore di coppia massima che deve essere fornita da ciascun motore.

[150 minuti di tempo; libri chiusi]

Soluzione

A. *Calcolo delle energie cinetiche dei singoli corpi rigidi costituenti il robot*

Si utilizza la forma generale

$$T_k = \frac{1}{2}\omega_k^T \mathbf{I}_k \omega_k + \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_{ck}^T \mathbf{v}_{ck}.$$

Sia q_i le posizione del braccio i-esimo. Poichè i rapporti di riduzione sono unitari, le velocità di rotazione dei motori sono le stesse dei bracci da essi azionati. Si ha

$$\begin{aligned}
T_{m1} &= \frac{1}{2} I_{m1} \dot{q}_1^2 \\
T_{b1} &= \frac{1}{2} I_{b1} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_{b1} (\ell_{c1} \dot{q}_1)^2 \\
T_{m2} &= \frac{1}{2} I_{m2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} m_{m2} (\ell_1 \dot{q}_1)^2 \\
T_{b2} &= \frac{1}{2} I_{b2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} m_{b2} \big(\ell_1^2 \dot{q}_1^2 + \ell_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2 \ell_1 \ell_{c2} \cos q_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \big)
\end{aligned}$$

e quindi

$$T = T_{m1} + T_{b1} + T_{m2} + T_{b2} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}.$$

B. *Calcolo delle matrici dinamiche del modello*

Il modello dinamico è

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}$$

con il termine di gravità $\mathbf{e}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ poichè il robot si muove su un piano orizzontale. Dal punto A, si ha

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a + 2b\cos q_2 & c + b\cos q_2 \\ c + b \cos q_2 & c \end{bmatrix},$$

con

$$\begin{aligned}
a &= I_{m1} + I_{b1} + m_{b1} \ell_{c1}^2 + I_{m2} + m_{m2} \ell_1^2 + I_{b2} + m_{b2} (\ell_1^2 + \ell_{c2}^2) \\
b &= m_{b2} \ell_1 \ell_{c2} \\
c &= I_{m2} + I_{b2} + m_{b2} \ell_{c2}^2
\end{aligned}$$

I termini di Coriolis e centrifughi si ottengono utilizzando l'espressione

$$c_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \Big(\frac{\partial b_i(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial b_i(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}^T - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \Big) \dot{\mathbf{q}}, \quad i = 1, \dots, N$$

dove $b_i(\mathbf{q})$ è la i-esima colonna di $\mathbf{B}(\mathbf{q})$. Si ha quindi

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -b \sin q_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \\ b \sin q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}.$$

C. Calcolo dell'accelerazione e velocità massima sulla traiettoria di progetto

Poichè $\ddot{q}_i(t) = A_{max}$ per $t \in [0, T/2]$ e la traiettoria è simmetrica, si ha

$$\begin{aligned} \dot{q}_i(t) &= A_{max}t + \dot{q}_i(0), \quad t \in [0, T/2] \\ q_i(t) &= A_{max}t^2/2 + \dot{q}_i(0)t + q_i(0), \quad t \in [0, T/2] \end{aligned}$$

ed essendo $\dot{q}_i(0) = 0$ e $q_i(T/2) - q_i(0) = L/2$ con $T = 1$ sec, $L = 90° = \pi/2$ rad, si ha

$$A_{max} = 2\pi \text{ rad/sec}^2, \qquad V_{max} = \dot{q}_i(1/2) = \pi \text{ rad/sec}.$$

D. Maggiorazione delle coppie richieste

Considerando le singole espressioni delle coppie, si possono effettuare le seguenti maggiorazioni

$$\begin{aligned} u_1 &= (a + 2b\cos q_2)\ddot{q}_1 + (c + b\cos q_2)\ddot{q}_2 - b\sin q_2(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \\ &\le (a + c)A_{max} + b\big((2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\cos q_2 - (2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)\sin q_2\big) \\ &< (a + c)A_{max} + 3b(A_{max} + V_{max}^2) = 2\pi(a + c) + 3b\pi(2 + \pi) \\ u_2 &= (c + b\cos q_2)\ddot{q}_1 + c\ddot{q}_2 + b\sin q_2\dot{q}_1^2 \\ &\le 2cA_{max} + b\big(A_{max}\cos q_2 + V_{max}^2\sin q_2\big) \\ &< 2cA_{max} + b(A_{max} + V_{max}^2) = 4\pi c + b\pi(2 + \pi) \end{aligned}$$

e con i dati del problema

$$a = 5.3425, \quad b = 0.525, \quad c = 0.1675,$$

si ottiene

$$u_1 < 60.06 \text{ Nm}, \qquad u_2 < 10.58 \text{ Nm}.$$

Maggiorazioni di tipo più stretto potevano essere ricavate studiando il massimo (positivo) delle funzioni

$$\phi_1 = 6\pi\cos q_2 - 3\pi^2\sin q_2, \quad \phi_2 = 2\pi\cos q_2 + \pi^2\sin q_2,$$

che compaiono rispettivamente nella prima e seconda coppia. In tal caso si sarebbe ottenuto

$$u_1 \le 53.04 \text{ Nm}, \qquad u_2 \le 8.24 \text{ Nm},$$

con le uguaglianze effettivamente raggiungibili per particolari configurazioni iniziali di moto.