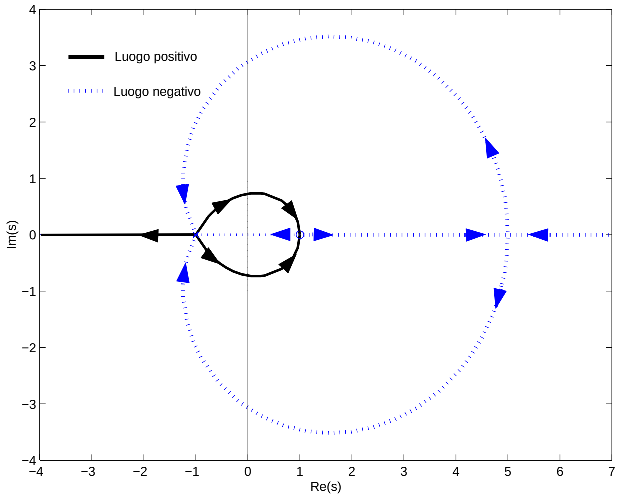
Bozza di soluzione - Appello 20 Giugno 2000

[1] Per quanto riguarda il luogo delle radici:

- si hanno $n - m = 1$ asintoti sia per il luogo positivo che negativo
- polo in $s = -1$, polo multiplo di molteplicità 3 $\Longrightarrow$ punto singolare di molteplicità 3 (attenzione agli angoli dei rami del luogo in prossimità del punto singolare)
- zero in $s = 1$, zero multiplo di molteplicità 2 $\Longrightarrow$ punto singolare di molteplicità 2 (attenzione agli angoli dei rami del luogo in prossimità del punto singolare)
- è evidente la necessità di almeno un punto singolare sull'asse reale a destra degli zeri in $s = +1$
- dal tracciamento del luogo si deduce la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso per valori di K piccoli in valore assoluto (da determinare tramite l'applicazione del criterio di Routh).



Luogo delle radici

- denominatore della funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso

$$p(s, K) = (s + 1)^3 + K(s - 1)^2 = s^3 + (K + 3)s^2 + (3 - 2K)s + K + 1$$

condizione necessaria affinché tutte le radici siano a parte reale minore di zero $-1 < K < 3/2$. La penultima riga della tabella di Routh si annulla per $K = -1 \pm \sqrt{5} \Longrightarrow$

$$p(s, -1 \pm \sqrt{5}) = p_1(s)p_2(s) = p_1(s)((K + 3)s^2 + (K + 1))\big|_{-1\pm\sqrt{5}}$$

pertanto per $K = -1 + \sqrt{5}$, il luogo positivo attraversa l'asse immaginario in $s = \pm 0.726j$, mentre per $K = -1 - \sqrt{5}$ il luogo negativo attraversa l'asse immaginario in $s = \pm 3.077j$. Dall'annullamento dell'ultima riga (termine noto) si deduce che per $K = -1$ il luogo negativo attraversa l'asse immaginario in $s = 0$. Il criterio di Routh ci permette di concludere che il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente per $-1 < K < -1 + \sqrt{5}$.

- Il diagramma di Nyquist è, per $K = 1$ rappresentato in figura; per $K = -1$ (introduzione di uno sfasamento di $-\pi$) il diagramma di Nyquist si ottiene ruotando quello per $K = 1$ di $-\pi$. Essendo il sistema ad anello aperto privo di poli a parte reale positiva, i diagrammi di Nyquist non compiono giri intorno al punto $(-1, 0)$ per valori di K piccoli in valore assoluto.

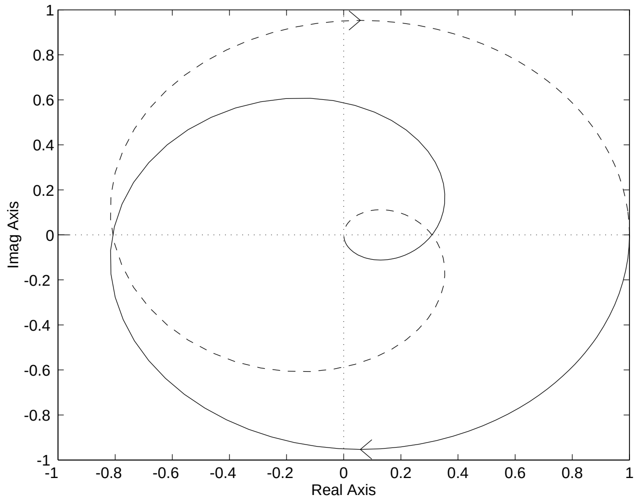


Diagramma di Nyquist per $K = 1$

[2] Si ricorda che la funzione di trasferimento disturbo-uscita (nel caso di disturbo agente sul ramo di controreazione) è pari a

$$W_d(s) = \frac{-F(s)}{1 + F(s)}$$

con $F(s)$ la funzione di trasferimento in catena diretta. Si noti che $W_d(s)$ coincide con la funzione di trasferimento riferimento-uscita ($L(s)$ funzione di sensitività complementare) cambiata di segno. La presenza di un polo in $s = 0$ in catena diretta (processo) implica che il sistema è di tipo 1 e quindi ha guadagno unitario. È quindi necessario introdurre un controllore tale da rendere $|W(j\omega)|_{dB} < -20dB$ per il campo di pulsazioni di interesse. Ad esempio un semplice controllore statico (guadagno K) fornisce

$$W_d(s) = \frac{-10K}{s + 10K} = -\frac{1}{1 + \frac{s}{10K}}$$

La risposta armonica corrispondente ha un fattore binomio con pulsazione di rottura in $10K$ a partire dalla quale il modulo decresce con pendenza pari a -20dB/decade. Tale pulsazione di rottura deve quindi trovarsi a sinistra di 1 rad/sec $\Longrightarrow K < 1/10$. È ovviamente anche necessaria la stabilità asintotica (per l'esistenza del regime permanente), garantita se $K > 0$.

Questa analisi è confermata dall'andamento tipico della funzione di sensitività complementare (in dB, in modulo prossimo a zero fino alla pulsazione di attraversamento, pari al modulo di $F(j\omega)$ per pulsazioni maggiori).

[3] La funzione di trasferimento del sistema può essere ricavata attraverso il rapporto della trasformata dell'uscita sulla trasformata dell'ingresso, ottenendo

$$F(s) = \frac{5s+6}{2(s+1)(s+2)}$$

Il sistema è stabile asintoticamente e pertanto esiste il regime permanente. La risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = (t + \sin 2t)\delta_{-1}(t)$ è pari alla somma della risposta a regime permanente a $u_1(t) = t\delta_{-1}(t)$

$$y_{RP1}(t) = \left(F(0)t + \frac{dF(s)}{ds}\Big|_{s=0} \right) \delta_{-1}(t)$$

e della risposta a regime permanente a $u_2(t) = \sin(2t)\delta_{-1}(t)$

$$y_{RP2}(t) = |F(j\omega)|_{\omega=2} \sin(2t + \langle F(j\omega)_{\omega=2})$$

dove $\langle F(j\omega)_{\omega=2}$ indica la fase di $F(j\omega)$ valutata in $\omega = 2$ rad/sec.

[4] Gli autovalori di A sono facilmente calcolabili data la struttura triangolare superiore della matrice e sono pari a

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2/3} = 1$$

e pertanto il sistema è instabile. Per studiare la possibilità di stabilizzare il sistema tramite una reazione dallo stato è necessario studiare la raggiungibilità del sistema. La matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+2 & 2\alpha+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è singolare per qualsiasi valore di α. In particolare $\mathcal{Q}$ ha rango pari a 2 se $\alpha \neq -1$ e pari a 1 se $\alpha = -1$. Nel caso $\alpha \neq -1$ l'insieme degli stati raggiungibili è generato da

$$\mathcal{P} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha+2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per mettere in evidenza la dinamica del sottosistema non raggiungibile si può scegliere la matrice T, che caratterizza il cambiamento di coordinate, tale che

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dando luogo alla nuova matrice dinamica

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Essendo la dinamica del sottosistema non raggiungibile già stabile asintoticamente (autovalore in -1), il sistema è stabilizzabile con una semplice reazione dallo stato. In alternativa era sufficiente usare il PBH test per l'autovalore semplice -1 e quindi verificare che

$$\text{rango}\,(\, A - \lambda_1 I \quad B\,) = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 3$$

e quindi che l'autovalore -1 caratterizzava il sottosistema non raggiungibile.

Per $\alpha = -1$ la matrice di raggiungibilità ha rango 1 e quindi il sottosistema non raggiungibile ha dimensione 2 ed è sicuramente instabile.