

Bozza di soluzione - Appello 04 Luglio 2000

[1] Dai due schemi (denominati di seguito Schema 1 e Schema 2) si deducono le seguenti relazioni

$$\text{Schema 1} \begin{cases} u_1 = u = r + fz \\ u_2 = y = cx \end{cases}, \quad \text{Schema 2} \begin{cases} u_1 = u = fz \\ u_2 = y - r = cx - r \end{cases}$$

La dinamica dell'errore di osservazione $e = x - z$ si ottiene determinando \dot{e} . Per lo Schema 1 si ha

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{z} = ax + bu - (a - kc)z - bu_1 - ku_2 = (a - kc)e$$

mentre per lo Schema 2 si ottiene

$$\dot{e} = (a - kc)e + kr$$

Il riferimento pertanto influenza la dinamica dell'errore di osservazione nello Schema 2 entrando come forzamento, mentre nello Schema 1 l'evoluzione di $e(t)$ non è influenzata da $r(t)$.

Il sistema interconnesso ha come variabile di stato $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ o, equivalentemente, $\begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$. In queste ultime coordinate la dinamica del sistema ad anello chiuso risulta essere per lo Schema 1

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bu \\ (a - kc)e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bf & -bf \\ 0 & a - kc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} r$$

e per lo Schema 2

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bu \\ (a - kc)e + kr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bf & -bf \\ 0 & a - kc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} r$$

e pertanto anche nel secondo schema è valido il principio di separazione. Si noti che la matrice dinamica è la stessa

$$A_e = \begin{pmatrix} a + bf & -bf \\ 0 & a - kc \end{pmatrix}$$

L'individuazione di f e k è comune per entrambi gli schemi ed è tale da assegnare λ_1 e λ_2 rispettivamente a $a + bf$ e $a - kc$. Essendo tutte le quantità scalari ($b \neq 0 \Rightarrow$ sistema raggiungibile, $c \neq 0 \Rightarrow$ sistema osservabile) si può direttamente scegliere

$$\begin{aligned} f : a + bf = \lambda_1 & \rightarrow f = \frac{\lambda_1 - a}{b} \\ k : a - kc = \lambda_2 & \rightarrow k = \frac{a - \lambda_2}{c} \end{aligned}$$

Con i valori indicati si ottiene $f = \lambda_1$ e $k = -\lambda_2/2$. Date le rappresentazioni con lo spazio di stato e considerando l'uscita di interesse y

$$y = cx = (c \ 0) \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

si possono ottenere direttamente le funzioni di trasferimento richieste, per lo Schema 1

$$\begin{aligned} W_{ry,1}(s) &= (c \ 0) (sI - A_e)^{-1} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (c \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{s-(a+bf)} & \frac{-bf}{(s-a-bf)(s-a+kc)} \\ 0 & \frac{1}{s-(a-kc)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{cb}{s-(a+bf)} = \frac{cb}{s-\lambda_1} \end{aligned}$$

mentre per lo Schema 2

$$\begin{aligned} W_{ry,2}(s) &= (c \ 0) (sI - A_e)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \\ &= (c \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{s-(a+bf)} & \frac{-bf}{(s-a-bf)(s-a+kc)} \\ 0 & \frac{1}{s-(a-kc)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \\ &= \frac{-cbfk}{(s-a-bf)(s-a+kc)} = \frac{-cbfk}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} \end{aligned}$$

Una prima osservazione riguardante le differenze tra i due schemi nasce dalla evidente assenza del polo in $s = \lambda_2$ nella funzione di trasferimento $W_{ry,1}(s)$ (a parità di autovalori). Tale cancellazione, avendo i due sistemi di controllo la stessa matrice dell'uscita, deriva da una perdita di eccitabilità del modo naturale $e^{-\lambda_2 t}$ e cioè da una perdita di raggiungibilità (rispetto a r) della dinamica dell'osservatore asintotico dello stato nello Schema 1. Una seconda importante osservazione riguarda il guadagno del sistema di controllo

$$W_{ry,1}(0) = -\frac{cb}{\lambda_1}, \quad \text{mentre} \quad W_{ry,2}(0) = -\frac{cbfk}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2}$$

Con i valori forniti per il processo, essendo $a = 0$ (\rightarrow autovalore in 0), si ha $W_{ry,2}(0) = 1$. La presenza del polo in $s = 0$ nel processo rende effettivamente lo Schema 2 di tipo 1 mentre ciò non è verificato per lo Schema 1. Tale differenza nasce dalla modalità con la quale agisce il riferimento nei due schemi di controllo; in effetti nello Schema 1, a causa dell'azione di u sull'osservatore, $r(t)$ non entra come nello schema a controreazione standard. Si noti che in presenza di un disturbo $d(t)$ sull'uscita le relazioni di interconnessione diventano

$$\text{Schema 1} \begin{cases} u_1 = u = r + fz \\ u_2 = cx + d \end{cases}, \quad \text{Schema 2} \begin{cases} u_1 = u = fz \\ u_2 = cx + d - r \end{cases}$$

mentre la dinamica dell'errore diventa

$$\begin{aligned} \text{Schema 1} \quad \dot{e} &= (a - kc)e - kd, \\ \text{Schema 2} \quad \dot{e} &= (a - kc)e + kr - kd \end{aligned}$$

e pertanto la funzione di trasferimento disturbo/uscita, dove l'uscita è $cx + d$, risulta

$$W_{dy,1}(s) = W_{dy,2}(s) = 1 + \frac{cbfk}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} = 1 - \frac{(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$$

Per $a = 0$ risulta, per entrambi gli schemi, $W_{dy,1}(0) = W_{dy,2}(0) = 0$ cioè astatismo rispetto a disturbi costanti.

Concludendo lo Schema 1 è caratterizzato da un guadagno non unitario e banda passante pari a λ_1 , mentre lo Schema 2 ha la stessa banda passante (se $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ come consigliato in genere per l'errore di osservazione) e guadagno unitario.

[2] La funzione di trasferimento $F(s)$ è data da

$$F(s) = \frac{K}{s(s - \alpha + j)(s - \alpha - j)}$$

ed è quindi caratterizzata da un polo nell'origine e una coppia di poli complessi e coniugati a parte reale negativa ($\alpha < 0$). Si hanno 3 asintoti sia per il luogo positivo che per il luogo negativo con centro degli asintoti in

$$s_0 = \frac{2\alpha}{3}$$

Gli eventuali punti singolari sono soluzione del sistema

$$\begin{aligned} p(s, K) &= s(s^2 - 2\alpha s + 1 + \alpha^2) + K = 0 \\ \frac{\partial p(s, K)}{\partial s} &= 3s^2 - 4\alpha s + 1 + \alpha^2 = 0 \end{aligned}$$

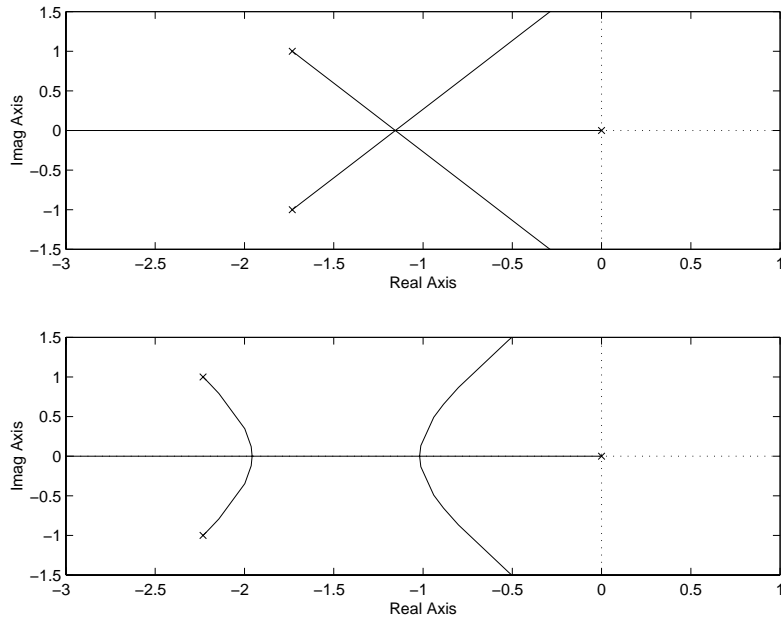
Dalla seconda equazione si ottiene

$$s^* = \frac{2\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 3}}{3}$$

Per il sistema considerato (3 poli ad anello chiuso) non è possibile avere punti singolari complessi e coniugati, mentre se $\alpha^2 \geq 3$ si hanno due punti singolari (eventualmente coincidenti se $\alpha^2 = 3$) reali. In particolare, vista la limitazione su α imposta dal testo,

$$\begin{aligned} \text{se } \alpha &= -\sqrt{3} & s^* &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \text{se } \alpha < -\sqrt{3} & s^* &= \frac{2\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 3}}{3} \end{aligned}$$

Nel primo caso si ha un punto singolare di molteplicità 3 (molteplicità nell'equazione del luogo), mentre nel secondo caso i punti singolari hanno molteplicità pari a 2. Il due luoghi delle radici corrispondenti rispettivamente al caso $\alpha = -\sqrt{3}$ e $\alpha < -\sqrt{3}$ sono riportati in figura (solo il luogo positivo essendo il luogo negativo privo di problemi).



Luogo delle radici

- [3] Essendo la funzione di trasferimento del sistema propria è necessario mettere in evidenza il legame diretto ingresso/uscita riscrivendo la funzione come la somma di una funzione razionale strettamente propria e di un termine costante

$$F(s) = \frac{s^2 + 1}{-3s^2 + 2s + 1} = -\frac{1}{3} + \frac{\frac{2}{3}s + \frac{4}{3}}{-3s^2 + 2s + 1} = -\frac{1}{3} + \frac{-\frac{2}{9}s - \frac{4}{9}}{s^2 - \frac{2}{3}s - \frac{1}{3}}$$

Si noti che per poter usare la realizzazione in forma canonica raggiungibile (o indifferentemente osservabile) è necessario rendere il denominatore della funzione razionale strettamente propria monico. Il sistema è rappresentato dalla quaterna

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \left(-\frac{4}{9} \quad -\frac{2}{9}\right), \quad D = -\frac{1}{3}$$

- [4] Per individuare l'esempio richiesto devono essere contemporaneamente verificate le seguenti condizioni:
- presenza di una dinamica instabile (ad esempio caratterizzata da un autovalore a parte reale positiva). Tale dinamica deve necessariamente far parte del sottosistema raggiungibile altrimenti il sistema non sarebbe stabilizzabile con reazione dallo stato;
 - presenza di una dinamica non raggiungibile necessariamente stabile asintoticamente;

c) presenza di una dinamica inosservabile instabile (eventualmente coincidente con la dinamica raggiungibile)

Si può pertanto iniziare con un sistema scomposto rispetto alla proprietà di raggiungibilità lasciando la matrice C parametrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (c_1 \quad c_2)$$

la cui matrice di osservabilità è pari a

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 & -c_2 \end{pmatrix}$$

Per imporre la non completa osservabilità deve essere $\det(\mathcal{O}) = -2c_1c_2 = 0$. Inoltre si vuole individuare, se esiste, C in modo tale che l'autovalore $\lambda_1 = 1$ caratterizzi la dinamica inosservabile. Usando il test di PBH

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \neq 2 \implies c_1 = 0$$

In definitiva un sistema rispondente alle caratteristiche richieste è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad 1)$$

[5] La matrice dinamica A ha una struttura diagonale a blocchi e pertanto il calcolo degli autovalori è semplice. In particolare si individuano gli autovalori a parte reale nulla

$$\lambda_{1/2} = \pm j$$

con molteplicità algebrica 2. Ai fini della stabilità è importante determinare la molteplicità geometrica, ad esempio calcolando la $(sI - A)^{-1}$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 1} \begin{pmatrix} s & 1 & 0 & 0 \\ -1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 1 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{pmatrix}$$

da cui $m_g = 1$ e quindi il sistema è stabile semplicemente.