



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA GESTIONALE

Anno Accademico 2022–2023

Appunti dalle lezioni di
RICERCA OPERATIVA

STEFANO LUCIDI - MARIANNA DE SANTIS

Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale “A. Ruberti”

Università di Roma “La Sapienza”

Notazioni

R^n	spazio dei vettori x a n componenti reali;
$x \in R^n$	è inteso come vettore colonna;
$e_i \in R^n$	è il versore unitario i -esimo, cioè il vettore che ha tutte componenti nulle escluso l' i -esima che è uguale uno;
R_+	insieme dei reali non negativi;
x^T	vettore riga ottenuto come trasposto di x ;
$(x)_i$	oppure x_i indicano la i -ma componente di x (quindi $x_i \in R$);
x_k	indica il k -mo vettore di una successione (quindi $x_k \in R^n$);
$\{x_k\}$	successione formata dai vettori x_k ;
$\{x_k\}_K$	sottosuccessione definita dall'insieme (infinito) di indici K ;
$\ x\ $	norma di x ; in assenza di altre indicazioni, $\ x\ $ è la norma euclidea, ossia $\ x\ = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$, dove $x_i \in R$ sono le componenti di x ;
$B(x^*; \rho)$	sfera aperta di raggio $\rho > 0$ con centro $x^* \in R^n$, ossia: $B(x^*; \rho) = \{x \in R^n : \ x - x^*\ < \rho\}$;
$C(R^n)$	insieme delle funzioni continue su R^n ;
$C^1(R^n)$	insieme delle funzioni continuamente differenziabili su R^n ;
$C^2(R^n)$	insieme delle funzioni due volte continuamente differenziabili su R^n ;
$\nabla f(x)$	gradiente di una funzione $f : R^n \rightarrow R$ calcolato in x ; $\nabla f(x)$ è inteso come vettore colonna con componenti $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$;
$\nabla^2 f(x)$	matrice Hessiana ($n \times n$) di una funzione $f : R^n \rightarrow R$ calcolata in x , con componenti $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, per $i, j = 1, \dots, n$.
$\text{Int}(\mathcal{A})$	interno dell'insieme $\mathcal{A} \subseteq R^n$.
$\text{Cl}(\mathcal{A})$	chiusura dell'insieme $\mathcal{A} \subseteq R^n$.
$\partial(\mathcal{A})$	frontiera dell'insieme $\mathcal{A} \subseteq R^n$.
$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$	l'insieme definito da $\{x \in \mathcal{A} : x \notin \mathcal{B}\}$.

Capitolo 1

Programmazione Lineare

In questo capitolo, dopo aver introdotto alcune definizioni di base per i problemi di programmazione matematica, vengono considerati i problemi di Programmazione Lineare. Questa classe di problemi presenta una struttura particolare che può essere sfruttata nel definire metodi numerici di risoluzione estremamente efficienti.

1.1 Introduzione

L'ottimizzazione (o programmazione matematica) è una disciplina della matematica applicata che studia problemi in cui si vogliono determinare punti di minimo di una funzione f a valori reali in un insieme prefissato \mathcal{F} . Tali problemi, detti *problemi di ottimizzazione*, vengono rappresentati nella forma:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in \mathcal{F}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove

- la funzione $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *funzione obiettivo*;
- l'insieme \mathcal{F} è detto *insieme ammissibile*.

Riguardo alla possibilità di affrontare il precedente problema di minimizzazione si introducono le seguenti definizioni che caratterizzano le diverse situazioni che si possono incontrare.

Definizione 1.1.1 *Il Problema (1.1) si dice inammissibile se $\mathcal{F} = \emptyset$, cioè se non esistono soluzioni ammissibili.*

Definizione 1.1.2 *Il Problema (1.1) si dice illimitato (inferiormente) se comunque scelto un valore $M > 0$ esiste un punto $x_M \in \mathcal{F}$ tale che $f(x_M) < -M$*

Definizione 1.1.3 *Si dice che il Problema (1.1) ammette soluzione ottima (finita) se esiste un $x^* \in \mathcal{F}$ tale che risulti $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathcal{F}$. Il corrispondente valore $f(x^*)$ si dice valore ottimo.*

Si può notare che, se si ha un problema di massimizzazione cioè se si deve trovare un punto in cui la funzione f assume valore più alto possibile, ci si può sempre ricondurre a un problema di minimo, cambiando di segno la funzione obiettivo. Infatti un punto di massimo del problema

$$\max_{x \in \mathcal{F}} f(x)$$

è un punto $x^* \in \mathcal{F}$ che, per definizione, soddisfa la seguente proprietà:

$$f(x^*) \geq f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F},$$

che è equivalente a:

$$-f(x^*) \leq -f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F},$$

da cui segue che x^* è anche un punto di minimo del problema

$$\min_{x \in \mathcal{F}} -f(x)$$

e risulta:

$$\max_{x \in \mathcal{F}} f(x) = -\min_{x \in \mathcal{F}} (-f(x)).$$

Perciò non si ha nessuna perdita di generalità a studiare ed affrontare solamente problemi di minimizzazione o, viceversa, solamente problemi di massimizzazione.

1.2 Problemi di Programmazione Lineare

Definizione 1.2.1 Una funzione reale di n variabili reali $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice lineare se valgono le seguenti condizioni:

- i) per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- ii) per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ risulta $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Una immediata conseguenza di questa definizione è che una funzione è lineare se e solo se può essere scritta nella forma

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \tag{1.2}$$

con c_1, \dots, c_n costanti reali.¹

¹Infatti è immediato verificare che una funzione della forma (1.2) soddisfa la Definizione 1.2.1; d'altra parte, se una funzione $f(x)$ è lineare cioè se soddisfa la Definizione 1.2.1, allora si può scrivere nella forma (1.2); infatti se indichiamo con $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canonica di \mathbb{R}^n allora risulta $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dove le x_i sono le componenti del vettore x . Quindi utilizzando la linearità si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = f(x_1 e_1) + f(x_2 e_2) + \dots + f(x_n e_n) = \\ &= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \end{aligned}$$

dove $c_i = f(e_i)$ per $i = 1, \dots, n$.

Quindi

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 - 3.5x_3 \\ -2x_1 + (\sin 4)x_2 + \pi x_3 - 4x_5,\end{aligned}$$

sono funzioni lineari, mentre

$$\begin{aligned}(x_1)^2 + 4x_2 - 3.5x_3 \\ x_1 + 4x_2 - 3.5e^{x_3} \\ -2x_1 + \sin x_2 + \pi x_3 - 4x_5,\end{aligned}$$

non sono funzioni lineari.

Un Problema di Programmazione Lineare (Problema di PL) è caratterizzato da

- da una *funzione obiettivo lineare* da minimizzare o massimizzare che è scritta nella forma

$$f(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j.$$

- da un *ammmissibile* costituito da un numero finito, m , di *vincoli lineari*, cioè $x \in \mathcal{F}$ se e solamente se x soddisfa relazioni del tipo:

$$\begin{array}{rcccc}a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 + & \dots & + a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & \geq & b_m.\end{array}$$

Introducendo il vettore $c \in \mathbb{R}^n$, definito $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ e $x \in \mathbb{R}^n$ definito $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ la funzione obiettivo può essere scritta in notazione vettoriale

$$c^T x.$$

Inoltre, introducendo la matrice ($m \times n$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e il vettore $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ la formulazione completa di un generico problema di Programmazione Lineare può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases}$$

Per esempio,

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \\ & x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

sono problemi di PL.

1.3 Interpretazione geometrica di un Problema di Programmazione Lineare

In questo paragrafo si vuole fornire una interpretazione geometrica di un problema di Programmazione Lineare. In particolare, quando un problema di Programmazione Lineare contiene solamente due variabili, si può rappresentare efficacemente il problema sul piano cartesiano e si può determinare una sua soluzione in maniera elementare con semplici deduzioni geometriche. Le situazioni che verranno presentate nel seguito vogliono rappresentare un punto di partenza intuitivo per la trattazione di problemi di Programmazione Lineare in n variabili; i risultati che verranno dedotti per via elementare nel caso bidimensionale trovano, infatti, una generalizzazione consistente nel caso di un generico problema di Programmazione Lineare.

A questo scopo verranno considerati due esempi di problemi di Programmazione Lineare già ottenuti come primo esempi di formulazione in due variabili di un semplice problema di allocazione ottima di risorse e di un semplice problema di miscelazione (rispettivamente Esempio 3.4.1 ed Esempio 3.4.12 degli *Appunti dalle Lezioni di Ricerca Operativa – parte Modelli di Programmazione Lineare e Lineare Intera*).

Esempio 1.3.1

Si consideri ora il problema di allocazione ottima di risorse rappresentato dal seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max (7x_1 + 10x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 750 \\ x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

Sul piano cartesiano Ox_1x_2 ciascun vincolo individua un semipiano. In particolare, in Figura 1.1 è evidenziato il semipiano individuato dal primo vincolo $x_1 + x_2 \leq 750$. In

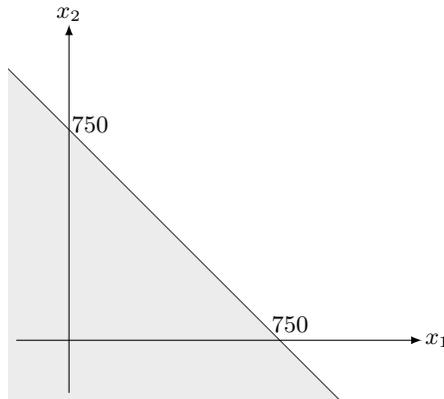


Figura 1.1: Semipiano individuato dal vincolo $x_1 + x_2 \leq 750$

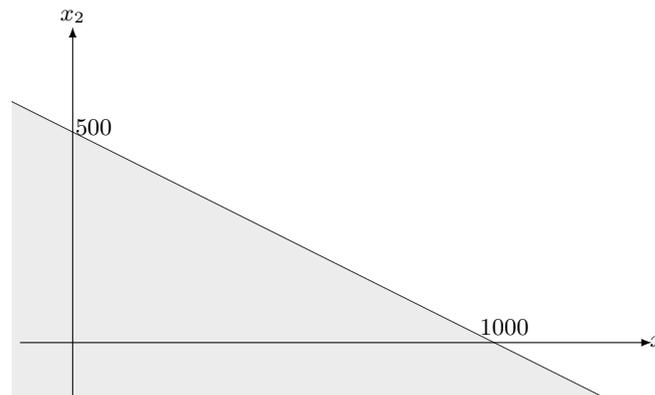


Figura 1.2: Semipiano individuato dal vincolo $x_1 + 2x_2 \leq 1000$

Figura 1.2 è evidenziato il semipiano individuato dal secondo vincolo $x_1 + 2x_2 \leq 1000$. Infine in Figura 1.3 è evidenziato il semipiano individuato dal terzo vincolo $x_2 \leq 400$. Ovviamente i vincoli di non negatività delle variabili $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ rappresentano rispettivamente il semipiano delle ascisse non negative e il semipiano delle ordinate non negative.

L'insieme ammissibile del problema di Programmazione Lineare che stiamo esaminando è dato quindi dall'intersezione di tali semipiani e si può indicare con

$$S = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 750, x_1 + 2x_2 \leq 1000, x_2 \leq 400, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}.$$

Tale regione di piano prende nome di *regione ammissibile*, è un insieme convesso ed è rappresentato in Figura 1.4. Tutti i punti $P(x_1, x_2)$ appartenenti a questa regione sono

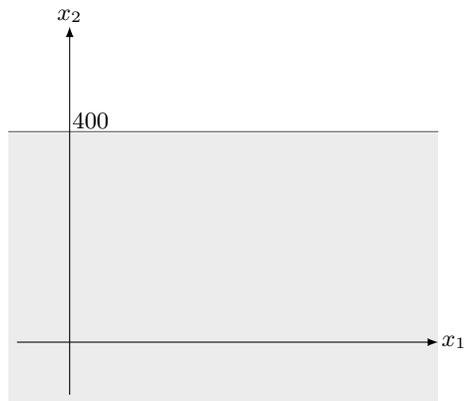


Figura 1.3: Semipiano individuato dal vincolo $x_2 \leq 400$

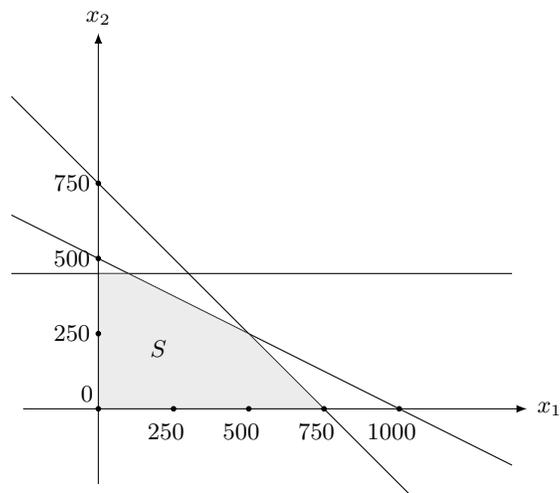


Figura 1.4: La regione ammissibile S

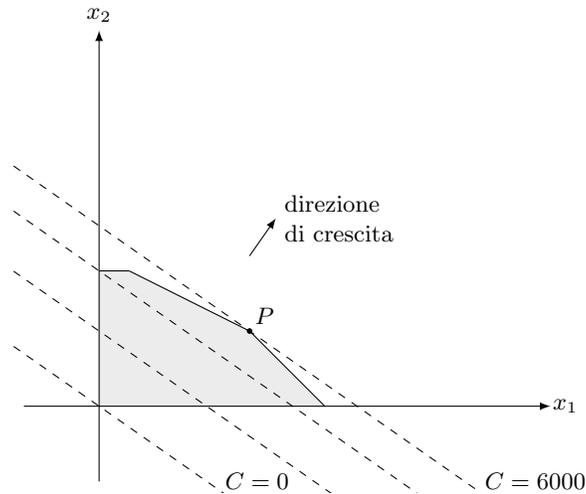


Figura 1.5: Curve di livello della funzione $f(x_1, x_2) = 7x_1 + 10x_2$ e punto di ottimo

punti dell'insieme ammissibile del problema e quindi tutti i punti di questa regione costituiscono soluzioni ammissibili del problema.

Si consideri ora la funzione obiettivo $7x_1 + 10x_2$ e si consideri la famiglia di rette

$$7x_1 + 10x_2 = C$$

ottenute al variare del parametro C . Esse costituiscono le curve di livello della funzione in due variabili $f(x_1, x_2) = 7x_1 + 10x_2$ che sono ovviamente delle rette come rappresentato in Figura 1.5.

In riferimento al problema di allocazione ottima rappresentato dal problema di Programmazione Lineare che stiamo esaminando, il parametro C rappresenta il profitto totale che deve essere massimizzato. Per $C = 0$ si ottiene la linea di livello passante per l'origine del piano Ox_1x_2 . Ovviamente, scegliendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ (che è un punto ammissibile in quanto $(0, 0) \in S$) si ottiene il profitto totale nullo. All'aumentare del valore di tale profitto, cioè all'aumentare del valore della costante C , graficamente si ottengono rette parallele alla retta di livello passante per l'origine traslate nella direzione di crescita della funzione $7x_1 + 10x_2$ data dal vettore $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ (Figura 1.5).

Poiché si desidera massimizzare la funzione obiettivo, si cercherà di raggiungere il valore più alto per la C ottenuto scegliendo per x_1 e x_2 valori ammissibili cioè tali che $(x_1, x_2) \in S$. Osservando la rappresentazione grafica della regione ammissibile S si deduce che all'aumentare di C , le rette di livello della funzione obiettivo intersecano la regione ammissibile finché $C \leq 6000$. Tale valore è ottenuto per $x_1 = 500$ e $x_2 = 250$ e non esistono altri punti della regione ammissibile in cui la funzione obiettivo assume valori maggiori. Il valore 6000 è, quindi, il massimo valore che la funzione obiettivo può raggiungere soddisfacendo i vincoli. Tale soluzione ottima è raggiunta in corrispondenza del punto P di coordinate $(x_1, x_2) = (500, 250)$; tale punto non è un punto

qualsiasi, ma costituisce quello che nella geometria piana viene detto vertice del poligono convesso che delimita la regione ammissibile. Il fatto che l'ottimo del problema è raggiunto in corrispondenza di un vertice della regione ammissibile non è casuale, ma come si vedrà in seguito, è una caratteristica fondamentale di un generico problema di Programmazione Lineare. Si osservi fin d'ora che la frontiera della regione ammissibile è definita dalle rette

$$x_1 + x_2 = 750, \quad x_1 + 2x_2 = 1000, \quad x_2 = 400, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

e che ogni intersezione di due di queste rette è un vertice della regione ammissibile; il numero di queste possibili intersezioni (non tutte necessariamente appartenenti alla regione ammissibile) è ovviamente pari al più a 10. Si osservi, infine, che nel punto di ottimo sono attivi i vincoli $x_1 + x_2 \leq 750$ e $x_1 + 2x_2 \leq 1000$ mentre non è attivo il vincolo $x_2 \leq 400$.

Nel caso particolare che stiamo esaminando, la soluzione ottima determinata è unica, ma in generale può accadere che le rette di livello della funzione obiettivo siano parallele ad un segmento del perimetro del poligono che delimita la regione ammissibile; in questo caso potrebbe accadere che esistano più punti ammissibili in cui la funzione assume lo stesso valore ottimo e quindi la soluzione non sarebbe più unica; nel problema in esame, ciò accadrebbe, ad esempio, se la funzione obiettivo fosse $cx_1 + 2cx_2$ con c costante reale positiva (Figura 1.6); infatti, tutti i punti del segmento \overline{AB} rappresentano soluzioni ottime. Tuttavia, anche in questo caso si può sempre trovare un vertice che costituisce

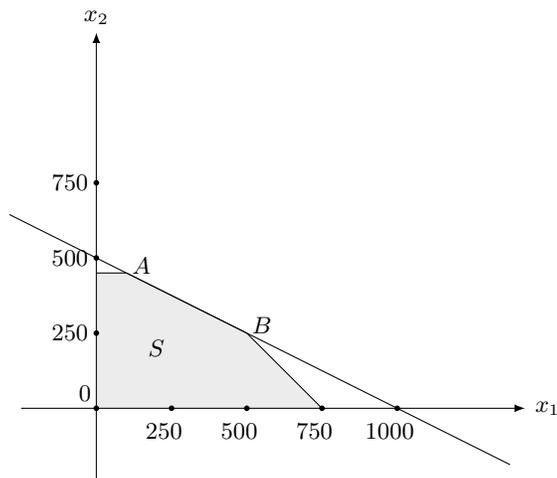


Figura 1.6: Esempio di soluzione non unica

una soluzione ottima.

Esempio 1.3.2

Consideriamo ora il problema di miscelazione rappresentato dal seguente problema di

Programazione Lineare:

$$\begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Nelle figure che seguono rappresentati i vincoli lineari di questo problema; In particolare nella Figura 1.7 è evidenziato il semipiano individuato dal vincolo $140x_1 \geq 70$. Nella

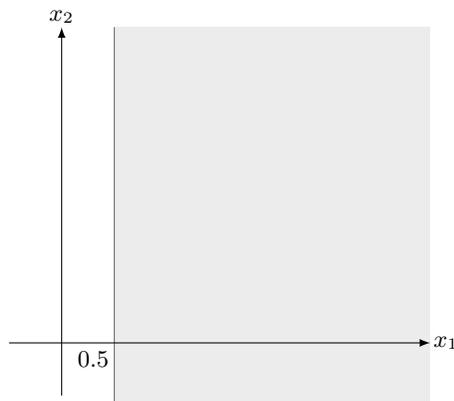


Figura 1.7: Semipiano individuato dal vincolo $140x_1 \geq 70$

Figura 1.8 e nella Figura 1.9 sono evidenziati rispettivamente i semipiani individuati dai vincoli $20x_1 + 10x_2 \geq 30$ e $25x_1 + 50x_2 \geq 75$.

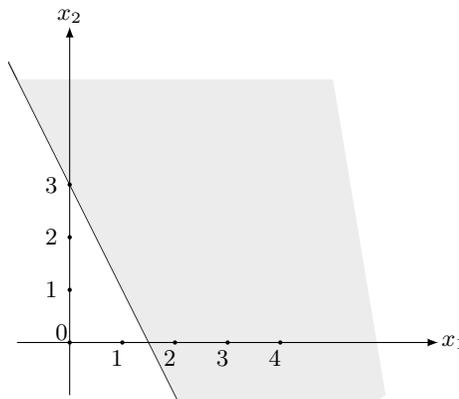


Figura 1.8: Semipiano individuato dal vincolo $20x_1 + 10x_2 \geq 30$

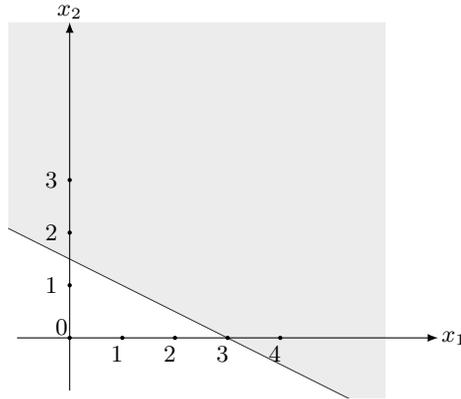


Figura 1.9: Semipiano individuato dal vincolo $25x_1 + 50x_2 \geq 75$

Ovviamente i vincoli di non negatività delle variabili $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ rappresentano rispettivamente il semipiano delle ascisse non negative e il semipiano delle ordinate non negative.

L'insieme ammissibile del problema di Programmazione Lineare che stiamo esaminando è dato quindi dall'intersezione di tali semipiani e si può indicare con

$$\tilde{S} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 140x_1 \geq 70, 20x_1 + 10x_2 \geq 30, 25x_1 + 50x_2 \geq 75, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}.$$

L'insieme \tilde{S} rappresenta la regione ammissibile del problema di Programmazione Lineare in esame ed è rappresentata in Figura 1.10. Tutti i punti $P(x_1, x_2)$ appartenenti

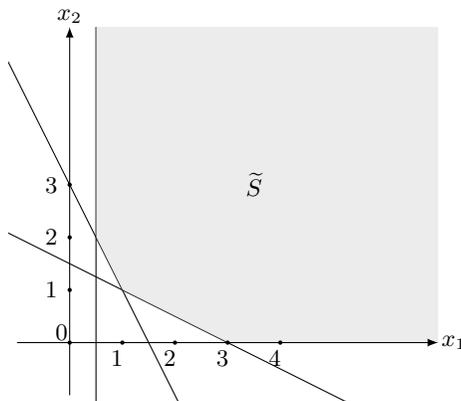


Figura 1.10: La regione ammissibile \tilde{S}

a questa regione sono punti dell'insieme ammissibile del problema e quindi tutti i punti

di questa regione costituiscono soluzioni ammissibili del problema. Si osservi che, a differenza della regione ammissibile del problema considerato nell'esempio precedente, la regione ammissibile \tilde{S} è illimitata.

Ora, tracciando le curve di livello della funzione obiettivo $400x_1 + 600x_2$ si ottiene la famiglia di rette

$$400x_1 + 600x_2 = C.$$

Trattandosi di un problema di minimizzazione si vuole determinare il valore piú basso di C ottenuto scegliendo per x_1 e x_2 valori ammissibili cioè tali che $(x_1, x_2) \in \tilde{S}$. Osservando la rappresentazione grafica della regione ammissibile \tilde{S} e osservando che la direzione di decrescita è quella opposta al vettore $\begin{pmatrix} 400 \\ 600 \end{pmatrix}$, si deduce che al diminuire di C , le rette di livello della funzione obiettivo intersecano la regione ammissibile finché $C \geq 1000$ (Figura 1.11) Tale valore è ottenuto per $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$ e non esistono

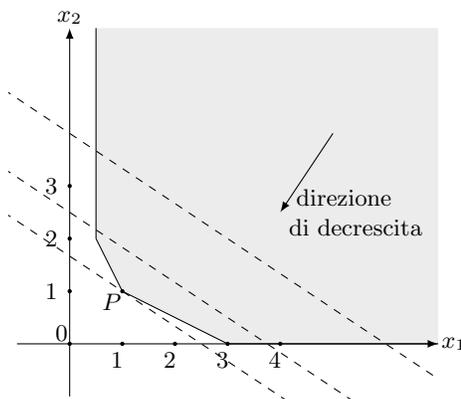


Figura 1.11: Curve di livello della funzione $400x_1 + 600x_2$ e punto di ottimo

altri punti della regione ammissibile in cui la funzione obiettivo assume valori minori. Il valore 1000 è, quindi, il minimo valore che la funzione obiettivo può raggiungere soddisfacendo i vincoli. Tale soluzione ottima è raggiunta in corrispondenza del punto P di coordinate $(x_1, x_2) = (1, 1)$; si osservi che anche in questo caso tale punto è un punto particolare della regione ammissibile. Si osservi, infine che in questo punto sono attivi i vincoli $20x_1 + 10x_2 \geq 30$ e $25x_1 + 50x_2 \geq 75$ mentre risulta non attivo il vincolo $140x_1 \geq 70$.

Abbiamo esaminato due esempi di interpretazione geometrica e soluzione grafica di problemi di Programmazione Lineare in due variabili. In entrambe i problemi è stato possibile determinare una soluzione ottima. Tuttavia è facile dedurre, sempre per via geometrica, che un problema di Programmazione Lineare può non ammettere soluzione ottima. Ad esempio, se nell'Esempio 1.3.1 sostituiamo il vincolo $x_2 \leq 400$ con il vincolo $x_2 \geq 1000$, la regione ammissibile sarebbe vuota nel senso che non esisterebbe nessun punto del piano che soddisfa tutti i vincoli. In questo caso il problema risulterebbe

inammissibile e questo indipendentemente dalla funzione obiettivo e dal fatto che il problema è in forma di minimizzazione o massimizzazione.

Un altro esempio di problema di Programmazione Lineare che non ammette soluzione ottima si può ottenere considerando il problema dell'Esempio 1.3.2 e supponendo che la funzione obiettivo debba essere massimizzata anziché minimizzata. In questo caso nella regione ammissibile (che è illimitata) la funzione obiettivo può assumere valori arbitrariamente grandi cioè tali che comunque scelto un valore $M > 0$ esiste un punto in cui la funzione obiettivo assume valore maggiore di M ; questo significa che il problema è illimitato superiormente e quindi non può esistere una soluzione ottima.

Sulla base di queste considerazioni sulla geometria di un problema di Programmazione Lineare in due variabili si può intuire che le situazioni che si possono verificare sono le seguenti:

- *il problema ammette soluzione ottima* (che può essere o non essere unica) in un vertice del poligono convesso che delimita la regione ammissibile;
- *il problema non ammette soluzione ottima* perché
 - la regione ammissibile è vuota
 - la regione ammissibile è illimitata e la funzione obiettivo è illimitata superiormente (se il problema è di massimizzazione) o illimitata inferiormente (se il problema è di minimizzazione).

Quindi se si suppone che esiste un punto ammissibile, cioè che la regione ammissibile sia non vuota, allora sembrerebbe di poter dedurre che o il problema di Programmazione Lineare ammette soluzione ottima in un vertice del poligono convesso che delimita la regione ammissibile oppure è illimitato.

Questi asserti, ora semplicemente dedotti intuitivamente per via geometrica, hanno in effetti una validità generale e verranno enunciati e dimostrati in maniera rigorosa nel prossimo capitolo. Come ultima considerazione intuitiva si vuole citare la possibilità che la regione ammissibile sia costituita da una striscia di piano, cioè dalla porzione di piano compresa tra due rette parallele (Figura 1.12). In questo caso non esistono vertici per la regione ammissibile e il problema risulta illimitato ad eccezione del caso particolare in cui le rette di livello della funzione obiettivo sono parallele alle rette che delimitano la striscia di piano; in questo caso si hanno infinite soluzioni.

La non esistenza di vertici in questo caso si intuisce essere legata al fatto che la regione ammissibile costituita da una striscia di piano *contiene rette*. Infatti nei casi delle regioni ammissibili S e \tilde{S} dei problemi di Programmazione Lineare dell'Esempio 1.3.1 e dell'Esempio 1.3.2 non esistono rette contenute in S o in \tilde{S} . Anche la regione illimitata \tilde{S} può contenere semirette, ma non rette.

Ad eccezione del caso particolare della regione ammissibile rappresentata da una striscia di piano, il caso in cui sembrerebbe essere possibile garantire l'esistenza di almeno una soluzione ottima è quello della regione ammissibile che non contiene nemmeno semirette (che è il caso della regione S dell'Esempio 1.3.1). Anche questa intuizione è vera in generale e verrà formalizzata e dimostrata in maniera rigorosa nel prossimo paragrafo.

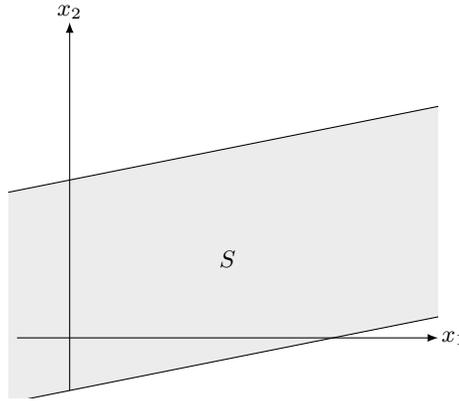


Figura 1.12: Regione ammissibile costituita da una striscia di piano

1.4 Elementi di geometria in \mathbb{R}^n

1.4.1 Poliedri

Il primo passo per analizzare la particolare struttura dei problemi Programmazione Lineare è di caratterizzare i loro insiemi ammissibili. A questo fine è necessario introdurre dei particolari insiemi.

Definizione 1.4.1 Sia a_i un vettore di \mathbb{R}^n e b_i un numero reale. L'insieme

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x = b_i\}$$

è detto iperpiano definito dall'equazione $a_i^T x = b_i$. Gli insiemi

$$S^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq b_i\}$$

$$S^{\geq} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \geq b_i\}$$

sono detti semispazi chiusi definiti dalle disequazioni $a_i^T x \leq b_i$ e $a_i^T x \geq b_i$.

Nel caso dello spazio R^2 il concetto di iperpiano coincide con quello di retta, mentre nel caso dello spazio R^3 il concetto di iperpiano coincide con quello di piano. In maniera intuitiva, i semispazi possono essere pensati come l'insieme dei punti che “giacciono” da una stessa parte rispetto all'iperpiano.

Notiamo che l'iperpiano H fa parte di tutti e due i semispazi e che l'intersezione dei due semispazi coincide con l'iperpiano. In termini insiemistici abbiamo che

$$H \subset S^{\geq}, \quad H \subset S^{\leq}, \quad S^{\geq} \cap S^{\leq} = H.$$

Notiamo ora che l'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare è definito come l'insieme di punti che soddisfa i vincoli, cioè un insieme di equazioni e disequazioni lineari. Usando la terminologia appena introdotta, possiamo anche dire che l'insieme di punti ammissibili di un problema di PL è dato dall'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi (disequazioni lineari) e iperpiani (equazioni lineari).

In particolare può introdurre la seguente definizione.

Definizione 1.4.2 *Un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro se è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi e iperpiani. Un poliedro limitato² viene detto politopo.*

Usando un punto di vista più algebrico si può dire che un poliedro è l'insieme di soluzioni di un qualunque sistema di equazioni e disequazioni lineari. In particolare caratterizzare i poliedri anche con la seguente definizione equivalente alla precedente.

Definizione 1.4.3 *Un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro se esistono una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ed un vettore $b \in \mathbb{R}^m$ tali che*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$$

Si può osservare che l'insieme vuoto è un poliedro (è l'insieme di soluzioni di un sistema di equazioni inconsistente) e che anche \mathbb{R}^n è un poliedro (\mathbb{R}^n è, per esempio, l'insieme di soluzioni dell'equazione lineare $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$). Notiamo anche che l'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare è un poliedro.

I poliedri sono particolari insiemi *convessi* di \mathbb{R}^n , ovvero soddisfano la seguente definizione, come dimostrato nel Teorema 1.4.5.

Definizione 1.4.4 *Dato un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice che C è un insieme convesso se comunque scelti due punti $x, y \in C$ e comunque scelto un scalare $\alpha \in [0, 1]$ si ha che*

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C.$$

Teorema 1.4.5 *Un Poliedro è un insieme convesso.*

Prova. Consideriamo due generici vettori x ed y appartenenti a

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}.$$

Vogliamo dimostrare che ogni vettore $z = \beta x + (1 - \beta)y$ con $0 \leq \beta \leq 1$ appartiene ad P , ovvero soddisfa la relazione

$$Az \geq b.$$

Ricordando la definizione di z ed il fatto che $Ax \geq b$ e $Ay \geq b$ si ha:

$$Az = A(\beta x + (1 - \beta)y) = \beta Ax + (1 - \beta)Ay \geq \beta b + (1 - \beta)b = b,$$

che dimostra che $z \in P$. □

²Un insieme $P \subset \mathbb{R}^n$ si dice *limitato* se esiste una costante $M > 0$ tale che, per ogni punto x appartenente a P risulti $|x_i| \leq M$ per ogni $i = 1, \dots, n$

1.4.2 Vertici

In questa sezione formalizziamo il concetto intuitivo di *vertice*. Questo concetto riveste un ruolo fondamentale nella teoria della Programmazione Lineare.

Definizione 1.4.6 *Un vettore x appartenente ad un insieme convesso C è detto vertice³ di C se non esistono due punti distinti $x_1, x_2 \in C$ tali che $x \neq x_1$, $x \neq x_2$ ed x appartiene al segmento di estremi x_1 e x_2 .*

Un aspetto importante è la possibilità di *caratterizzare* i vertici dell'insieme dei punti ammissibili di un problema di PL. Infatti è possibile mettere in relazione l'esistenza di un vertice con l'esistenza di n vincoli soddisfatti all'uguaglianza linearmente indipendenti.

In un generico problema di programmazione matematica, è sempre possibile associare ad una soluzione ammissibile, l'insieme degli indici dei vincoli soddisfatti all'uguaglianza da tale soluzione. Tale insieme è chiamato *insieme dei vincoli attivi* (e avremo modo di approfondire l'importanza di tale insieme nel definire le condizioni di ottimalità per problemi di ottimizzazione continua vincolata).

Si consideri un generico problema di Programmazione Lineare scritto nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$$

dove $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ una soluzione ammissibile del problema. Denotando con a_i^T , $i = 1, \dots, m$ le righe della matrice A , l'insieme dei vincoli attivi in \bar{x} si definisce come:

$$I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \dots, m\} : a_i^T \bar{x} = b_i\}.$$

Per brevità, nel seguito, chiameremo spesso *vincoli linearmente indipendenti* quei vincoli per i quali risultano linearmente indipendenti i vettori a_i^T corrispondenti.

Teorema 1.4.7 *Siano dati un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ e un punto $\bar{x} \in P$. Il punto \bar{x} è un vertice di P se e solo se esistono n righe a_i^T della matrice A con $i \in I(\bar{x})$ che sono linearmente indipendenti.*

Prova. Dimostriamo innanzitutto la condizione necessaria, cioè che se esiste un vertice del poliedro allora esistono n vincoli attivi nel vertice linearmente indipendenti. Supponiamo che \bar{x} sia un vertice del poliedro P e che, per assurdo, il numero dei vincoli attivi in \bar{x} linearmente indipendenti sia $k < n$. Allora esiste un vettore $d \in \mathbb{R}^n$ non nullo tale che

$$a_i^T d = 0, \quad \text{per ogni } i \in I(\bar{x}). \quad (1.3)$$

³Per precisione notiamo che nella letteratura quella appena data è la definizione di *punto estremo*, mentre viene normalmente indicato con vertice un punto che soddisfa una proprietà più complessa, che qui non riportiamo. Nel caso però di poliedri, che saranno gli unici insiemi convessi che prenderemo in considerazione nella Programmazione Lineare, le due definizioni coincidono, cioè un punto appartenente a un poliedro è un vertice del poliedro stesso se e solo se è un suo punto estremo.

Poiché per ogni vincolo non attivo in \bar{x} , cioè per ogni $i \notin I(\bar{x})$ si ha

$$a_i^T \bar{x} > b_i,$$

allora esiste $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che i vettori

$$\begin{aligned} y &= \bar{x} - \epsilon d \\ z &= \bar{x} + \epsilon d \end{aligned}$$

soddisfano $a_i^T y \geq b_i$, $a_i^T z \geq b_i$ per ogni $i \notin I(\bar{x})$. Inoltre per la (1.3), per ogni $i \in I(\bar{x})$ si ha

$$\begin{aligned} a_i^T y &= a_i^T \bar{x} - \epsilon a_i^T d = b_i \\ a_i^T z &= a_i^T \bar{x} + \epsilon a_i^T d = b_i \end{aligned}$$

e quindi i vettori y e z soddisfano tutti i vincoli $a_i^T x \geq b_i$, $i = 1, \dots, m$ e quindi appartengono al poliedro P . Ora poiché risulta

$$\bar{x} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z,$$

con y e z vettori di P entrambi diversi da \bar{x} , allora \bar{x} non è un vertice e questa è una contraddizione.

Dimostriamo ora la condizione sufficiente, cioè che se esistono n vincoli attivi in uno stesso punto linearmente indipendenti allora tale punto è un vertice di P . Supponiamo quindi che esistano n righe a_i^T con $i \in I(\bar{x})$ linearmente indipendenti e che per assurdo \bar{x} non sia vertice di P . Innanzitutto osserviamo che se \bar{x} non è un vertice, allora necessariamente $P \supset \{\bar{x}\}$ (cioè \bar{x} non è l'unico punto di P) ed inoltre esistono due vettori y e z entrambi diversi da \bar{x} appartenenti a P , cioè che soddisfano

$$a_i^T y \geq b_i, \quad a_i^T z \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

tali che

$$\bar{x} = \lambda y + (1 - \lambda)z \quad \text{con } \lambda \in (0, 1).$$

Ora, se per qualche $i \in I(\bar{x})$ risultasse $a_i^T y > b_i$ oppure $a_i^T z > b_i$ allora si avrebbe

$$a_i^T \bar{x} = \lambda a_i^T y + (1 - \lambda)a_i^T z > \lambda b_i + (1 - \lambda)b_i = b_i$$

e questo contraddice il fatto che $i \in I(\bar{x})$. Allora deve necessariamente essere

$$a_i^T y = b_i, \quad a_i^T z = b_i, \quad \text{per ogni } i \in I(\bar{x})$$

ma questo implica che il sistema

$$a_i^T x = b_i, \quad i \in I(\bar{x})$$

ammette più di una soluzione (cioè \bar{x} , y e z) contraddicendo l'ipotesi che esistano n righe a_i^T con $i \in I(\bar{x})$ linearmente indipendenti nel qual caso, come è noto, la soluzione è unica. \square

Seguono tre corollari che discendono in maniera immediata dal teorema appena dimostrato.

Corollario 1.4.8 Sia dato un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$. Se la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ha un numero di righe linearmente indipendenti minore di n , allora P non ha vertici. In particolare se $m < n$ allora P non ha vertici.

Corollario 1.4.9 Siano dati un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ e un punto $\bar{x} \in P$. Il punto \bar{x} è un vertice di P se e solo se è soluzione unica del sistema

$$a_i^T x = b_i \quad i \in I(\bar{x}).$$

Corollario 1.4.10 Un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ ha al più un numero finito di vertici.

Prova. Se $m < n$ il poliedro ovviamente non ha vertici. Se $m \geq n$, per il Corollario 1.4.9 ogni vertice del poliedro corrisponde ad un sottoinsieme di n righe linearmente indipendenti della matrice A . Ora poiché la matrice A ha al più $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ sottoinsiemi distinti di n righe, allora il poliedro ha al più $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ vertici. \square

Esempio 1.4.11 Determinare i vertici del poliedro descritto dalle disuguaglianze

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -30 \\ 2x_1 - x_2 \geq -12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Si osservi innanzitutto che in questo esempio la dimensione n è pari a 2 e il numero dei vincoli m pari a 4. Si devono determinare tutte le possibili intersezioni delle rette $3x_1 - 2x_2 = -30$, $2x_1 - x_2 = -12$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ che costituiscono il poliedro; si osservi che tali intersezioni sono $\binom{4}{2} = 6$. Per ogni punto così ottenuto si deve verificare innanzitutto l'appartenenza del punto al poliedro, e poi, affinché sia un vertice, l'indipendenza lineare dei vincoli attivi in quel punto.

1. Il sistema $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -30 \\ 2x_1 - x_2 = -12 \end{cases}$ corrispondente al primo e al secondo vincolo ha come unica soluzione il punto $P_1 = (6, 24)$ che si verifica immediatamente appartenere al poliedro; in questo punto ovviamente risultano attivi il primo e il secondo vincolo e quindi $I(P_1) = \{1, 2\}$ e poiché i vettori $a_1^T = (3, -2)$ e $a_2^T = (2, -1)$ corrispondenti a questi due vincoli sono linearmente indipendenti, allora il punto P_1 è un vertice del poliedro.
2. Il sistema $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -30 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ corrispondente al primo e al terzo vincolo ha come unica soluzione il punto $P_2 = (0, 15)$ che non appartiene al poliedro.
3. Il sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -30 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ corrispondente al primo e al quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_3 = (-10, 0)$ che non appartiene al poliedro.

4. Il sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -12 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ corrispondente al secondo e al terzo vincolo ha come unica soluzione il punto $P_4 = (0, 12)$ che si verifica immediatamente appartenere al poliedro; in questo punto ovviamente risultano attivi il secondo e il terzo vincolo e quindi $I(P_4) = \{2, 3\}$ e poiché i vettori $a_2^T = (2, -1)$ e $a_3^T = (1, 0)$ corrispondenti a questi due vincoli sono linearmente indipendenti, allora il punto P_4 è un vertice del poliedro.
5. Il sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -12 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ corrispondente al secondo e al quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_5 = (-6, 0)$ che non appartiene al poliedro.
6. Il sistema $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ corrispondente al terzo e al quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_6 = (0, 0)$ che si verifica immediatamente essere appartenente al poliedro; in questo punto ovviamente risultano attivi il terzo e il quarto vincolo e quindi $I(P_6) = \{3, 4\}$ e poiché i vettori $a_3^T = (1, 0)$ e $a_4^T = (0, 1)$ corrispondenti a questi due vincoli sono linearmente indipendenti, allora il punto P_6 è un vertice del poliedro.

□

Esempio 1.4.12 Dato il poliedro descritto dalle seguenti disuguaglianze

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

verificare se i punti $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (0, 0, 1/2)$ e $P_3 = (0, 0, 1)$ sono vertici del poliedro.

In questo esempio la dimensione n è pari a 3 e il numero dei vincoli m è pari a 5. Riscrivendo i primi due vincoli nella forma di disuguaglianza di maggiore o uguale, la matrice A dei coefficienti delle disuguaglianze che descrivono il poliedro è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per ogni punto dato, dopo aver verificato l'appartenenza del punto al poliedro, si deve verificare se esistono tre vincoli attivi in quel punto linearmente indipendenti.

Nel punto $P_1 = (0, 0, 0)$ (che appartiene al poliedro) sono attivi il terzo, il quarto e il quinto vincolo e quindi $I(P_1) = \{3, 4, 5\}$ e poiché le righe a_3^T , a_4^T e a_5^T della matrice A sono linearmente indipendenti, il punto P_1 è vertice del poliedro.

Nel punto $P_2 = (0, 0, 1/2)$ (che appartiene al poliedro) sono attivi solamente due vincoli (il terzo e il quarto) e quindi il punto P_2 non può essere un vertice del poliedro.

Nel punto $P_3 = (0, 0, 1)$ (che appartiene al poliedro) si hanno tre vincoli attivi; in particolare risulta $I(P_3) = \{1, 3, 4\}$ e le corrispondenti righe a_1^T , a_3^T e a_4^T della matrice A sono linearmente indipendenti e quindi il punto P_3 è un vertice del poliedro. \square

Esempio 1.4.13 *Determinare i vertici del poliedro descritto dalle seguenti disuguaglianze*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4. \end{cases}$$

In questo caso si ha $n = 3$ e $m = 4$ e quindi si devono determinare punti del poliedro in cui sono attivi tre vincoli linearmente indipendenti. Si devono quindi considerare $\binom{4}{3} = 4$ sistemi di equazioni in tre variabili:

1. il sistema ottenuto dai primi tre vincoli ha come unica soluzione il punto $P_1(1, 1, 0)$ che non è ammissibile;
2. si consideri ora il sistema ottenuto dal primo, dal secondo e dal quarto vincolo; la matrice dei coefficienti di questo sistema ha rango 2 in quanto i tre vincoli considerati (il primo, il secondo e il quarto) non sono linearmente indipendenti (il vettore corrispondente al quarto vincolo si può ottenere come somma dei vettori corrispondenti al primo e al secondo vincolo). Quindi non si può avere un vertice.
3. il sistema ottenuto dal primo, dal terzo e dal quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_2 = (2, 2, -3)$ che appartiene al poliedro e poiché i tre vincoli attivi in P_3 sono linearmente indipendenti, P_2 è un vertice del poliedro.
4. il sistema ottenuto dal secondo, dal terzo e dal quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_3 = (3, 2, -5)$ che appartiene al poliedro e poiché i tre vincoli attivi in P_3 sono linearmente indipendenti, P_3 è un vertice del poliedro.

\square

Se tra vincoli che descrivono un poliedro è presente un vincolo di uguaglianza, nella determinazione dei vertici ci si può limitare a considerare solo i sistemi che contengono questo vincolo di uguaglianza, facendo diminuire considerevolmente il numero dei sistemi da prendere in considerazione. L'esempio che segue mostra una situazione di questo tipo.

Esempio 1.4.14 *Calcolare tutti i vertici del seguente poliedro:*

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 &\quad - x_3 &= 1 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Bisogna analizzare tutti i possibili sistemi di tre equazioni “estraibili” dal sistema dato, che ha cinque vincoli. Riportiamo il sistema per esteso:

$$\begin{array}{rcccc} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ x_1 & & & & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & & & & \geq & 0 \\ & & & & x_3 & & \geq & 0. \end{array}$$

Per ogni sistema bisogna preliminarmente verificare che il rango sia pari a n , cioè a 3. Se il rango è 3 si calcola l’unica soluzione del sistema. Se questa appartiene al poliedro (cioè se soddisfa tutti i vincoli che definiscono il poliedro) si ha un vertice del poliedro. Siccome è presente un vincolo di uguaglianza, ci si può limitare ad analizzare solo i sistemi che contengono il vincolo di uguaglianza.

I vertici sono 2:

$$v_1 = (5/3, 0, 2/3)^T,$$

corrispondente al sistema formato dal primo, secondo e quarto vincolo e

$$v_2 = (1, 0, 0)^T,$$

corrispondente al sistema formato dal secondo, quarto e quinto vincolo.

Per quanto riguarda gli altri sistemi “estraibili” risulta che per il sistema formato dai vincoli

- primo, secondo e terzo: il rango è 3 ma la soluzione corrispondente non è ammissibile;
- primo, secondo e quinto: il rango è 3 ma la soluzione corrispondente non è ammissibile;
- secondo, terzo e quarto: il rango è 3 ma la soluzione corrispondente non è ammissibile;
- secondo, terzo e quinto: il rango è minore di tre.

□

Come è facile osservare, non tutti i poliedri hanno almeno un vertice. Un controesempio banale di poliedro che non ha vertici è un semispazio in \mathbb{R}^n con $n > 1$. Se la matrice A ha un numero di righe strettamente minore di n , allora il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ non ha vertici perché è ovvio che in questo caso non è possibile trovare n vincoli attivi né, tantomeno, n vincoli attivi linearmente indipendenti (vedi il Corollario 1.4.8).

Il fatto che un poliedro abbia o non abbia vertici è basato sulla possibilità di un poliedro di contenere o meno rette. Questo concetto verrà ora formalizzato introducendo innanzitutto la seguente definizione.

Definizione 1.4.15 *Si dice che un poliedro P contiene una retta⁴ se esiste un punto $\tilde{x} \in P$ e un vettore non nullo $d \in \mathbb{R}^n$ tale che $\tilde{x} + \lambda d \in P$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$*

Riportiamo quindi, senza dimostrazione, il seguente risultato, che aiuta a capire la relazione tra vertici e poliedri che non contengono rette.

Teorema 1.4.16 *Sia P un poliedro non vuoto. P possiede almeno un vertice se e solo se P non contiene rette.*

⁴L'insieme di punti $\{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{x} + \lambda d, \lambda \in \mathbb{R}\}$ è una retta che viene spesso indicata come retta che passa per \tilde{x} e ha direzione d . Analogamente, l'insieme di punti $\{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{x} + \lambda d, \lambda \geq 0\}$ è una semiretta che viene indicata come semiretta che ha origine in \tilde{x} e direzione d .

1.5 Caratterizzazione dei Problemi di Programmazione Lineare

1.5.1 Il Teorema fondamentale della Programmazione Lineare

In questa sezione viene riportato un risultato di fondamentale importanza che caratterizza i problemi di Programmazione Lineare.

Teorema 1.5.1 – Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare

Si consideri il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases} \quad (\text{PL})$$

Supponiamo che il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ non contenga rette. Allora una e una sola delle seguenti tre affermazioni è vera:

- 1. Il problema è inammissibile, ovvero il poliedro P è vuoto;*
- 2. Il problema (PL) è illimitato inferiormente;*
- 3. Il problema (PL) ammette soluzioni ottime e almeno una di queste soluzioni è un vertice del poliedro P .*

Prima di dimostrare questo teorema enunciamo e dimostriamo un lemma che sarà alla base della dimostrazione del Teorema fondamentale.

Lemma 1.5.2 *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases}$$

Supponiamo che il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ sia non vuoto e non contenga rette. Supponiamo inoltre che il problema non sia illimitato inferiormente. Allora se \tilde{x} è un punto di P che non è un vertice di P , è possibile trovare un punto \hat{x} appartenente a P tale che $c^T \hat{x} \leq c^T \tilde{x}$ e il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in \hat{x} è maggiore che in \tilde{x} .

Prova. (La prova non fa parte del programma d'esame). Sia \tilde{x} un punto qualunque di P e indichiamo con k il numero dei vincoli attivi in \tilde{x} che sono linearmente indipendenti. Siccome \tilde{x} non è un vertice, ne segue che $k < n$. Sia $I(\tilde{x})$ l'insieme degli indici dei vincoli attivi in \tilde{x} ; poiché $k < n$, si può trovare un vettore $d \in \mathbb{R}^n$ non nullo tale che $a_i^T d = 0$ per ogni $i \in I(\tilde{x})$. Inoltre, si può assumere che $c^T d \leq 0$; infatti se questo non si verificasse (cioè se fosse $c^T d > 0$) sarebbe sufficiente prendere $-d$ e ottenere comunque $c^T d \leq 0$.

Ora possono verificarsi due casi: $c^T d < 0$ e $c^T d = 0$.

• Primo caso: $c^T d < 0$. Consideriamo la semiretta $x(\lambda) = \tilde{x} + \lambda d$ con $\lambda \geq 0$. Per ogni punto di tale semiretta, ovvero per ogni $\lambda \geq 0$, e per $i \in I(\tilde{x})$ si ha

$$a_i^T x(\lambda) = a_i^T \tilde{x} + \lambda a_i^T d = a_i^T \tilde{x} = b_i. \quad (1.4)$$

Quindi tutti i vincoli che erano attivi in \tilde{x} rimangono attivi in tutti i punti della semiretta. Ora, se l'intera semiretta è contenuta nel poliedro P si può far tendere λ a $+\infty$ e poiché $c^T d < 0$ si ha

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} c^T(\tilde{x} + \lambda d) = c^T \tilde{x} + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda c^T d = -\infty.$$

Il problema sarebbe quindi illimitato inferiormente, ma ciò è stato escluso per ipotesi e quindi la semiretta non è interamente contenuta in P . Se la semiretta $x(\lambda)$ non è interamente contenuta in P , devono esistere valori di λ per i quali i punti $x(\lambda)$ non appartengono al poliedro P , ovvero deve esistere almeno un indice $j \notin I(\tilde{x})$ tale che, per tali valori di λ , il j -esimo vincolo è violato, cioè risulta $a_j^T x(\lambda) < b_j$. Tra questi indici j deve esistere un indice j_0 tale che possa essere scelto un $\hat{\lambda} > 0$ in modo che risulti

$$\begin{aligned} a_{j_0}^T x(\hat{\lambda}) &= b_{j_0} \\ a_j^T x(\hat{\lambda}) &\geq b_j, \quad \text{per ogni } j \notin I(\tilde{x}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Poiché per la (1.4) per ogni $\lambda \geq 0$ risulta $a_j^T x(\lambda) = b_j$ quando $j \in I(\tilde{x})$, il punto $\hat{x} = x(\hat{\lambda})$ appartiene al poliedro P . Dalla (1.5), ricordando che $j_0 \notin I(\tilde{x})$, si ha che il vincolo j_0 -esimo non era attivo in \tilde{x} ed è attivo in $\hat{x} = x(\hat{\lambda})$ che è un punto del poliedro. Quindi, spostandosi da \tilde{x} a $\tilde{x} + \hat{\lambda}d$, il numero dei vincoli attivi aumenta di almeno uno.

Dobbiamo ora dimostrare che $a_{j_0}^T$ (ovvero la riga della matrice A corrispondente al vincolo che è divenuto attivo passando da \tilde{x} a $\tilde{x} + \hat{\lambda}d$) non può essere ottenuta come combinazione lineare delle righe a_i^T , $i \in I(\tilde{x})$ (ovvero delle righe corrispondenti ai vincoli attivi in \tilde{x}). Infatti, se per assurdo fosse

$$a_{j_0} = \sum_{i \in I(\tilde{x})} \mu_i a_i \quad \text{con } \mu_i \in \mathcal{R}, \quad \mu_i \text{ non tutti nulli}, \quad (1.6)$$

moltiplicando scalarmente per il vettore d entrambe i membri della (1.6) e tenendo conto che $a_i^T d = 0$ per ogni $i \in I(\tilde{x})$, si avrebbe

$$a_{j_0}^T d = \sum_{i \in I(\tilde{x})} \mu_i a_i^T d = 0 \quad (1.7)$$

e questo è assurdo perché $j_0 \notin I(\tilde{x})$ ed invece dalla (1.5) risulterebbe

$$b_{j_0} = a_{j_0}^T x(\hat{\lambda}) = a_{j_0}^T(\tilde{x} + \hat{\lambda}d) = a_{j_0}^T \tilde{x}.$$

Perciò, spostandosi da \tilde{x} a $\tilde{x} + \hat{\lambda}d$, il numero dei vincoli attivi linearmente indipendenti è almeno pari a $k + 1$. Inoltre, ricordando che $c^T d < 0$ e $\hat{\lambda} > 0$, si ha che $c^T \hat{x} = c^T \tilde{x} + \hat{\lambda}c^T d < c^T \tilde{x}$. Possiamo quindi concludere che nel caso $c^T d < 0$ l'affermazione del lemma è verificata.

• Secondo caso: $c^T d = 0$. Consideriamo la retta $x(\lambda) = \tilde{x} + \lambda d$ con $\lambda \in R$. Poiché si è supposto che il poliedro P non contenga rette, ragionando nello stesso modo del caso precedente, ci si può spostare da \tilde{x} lungo la direzione d e determinare un punto \hat{x} in cui il numero dei vincoli attivi linearmente indipendenti è maggiore del numero dei vincoli attivi linearmente indipendenti in \tilde{x} . Inoltre, poiché $c^T d = 0$ si ha $c^T \hat{x} = c^T \tilde{x} + \hat{\lambda}c^T d = c^T \tilde{x}$. Quindi, anche in questo caso, l'affermazione del lemma risulta verificata. \square

Utilizzando il Lemma precedente, possiamo ora dimostrare il Teorema 1.5.1.

Dimostrazione del Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare.

Prova. Le tre affermazioni 1, 2 e 3 sono ovviamente mutuamente escludentesi (cioè al più una di esse può essere vera). Per dimostrare il teorema è allora sufficiente far vedere che almeno una di esse è vera. A questo fine basta mostrare che se né l'affermazione 1 né quella 2 sono verificate allora l'affermazione 3 è verificata. Supponiamo dunque che P sia non vuoto e che il problema di Programmazione Lineare (PL) non sia illimitato inferiormente. Se P è costituito da un solo punto \bar{x} , cioè $P = \{\bar{x}\}$, allora \bar{x} è un vertice ed è anche, ovviamente, una soluzione ottima del problema; il teorema è quindi vero in questo caso. Consideriamo allora il caso non banale in cui P è costituito da infiniti punti⁵. Per dimostrare che l'affermazione 3 è vera utilizziamo il risultato del Lemma 1.5.2, ovvero che se \tilde{x} è un punto di P che non è un vertice, è possibile trovare un punto \hat{x} appartenente a P tale che $c^T \hat{x} \leq c^T \tilde{x}$ e il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in \hat{x} è maggiore che in \tilde{x} . Il punto \hat{x} appartiene a P e sono possibili allora due casi: o \hat{x} è un vertice di P o è possibile applicare di nuovo il risultato del Lemma 1.5.2 e concludere che esiste un ulteriore punto \tilde{x} in P in cui il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti è strettamente maggiore del numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in \hat{x} e $c^T \tilde{x} \leq c^T \hat{x}$. Iterando questo procedimento, e tenendo conto che il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in un punto può essere al più n , un semplice ragionamento induttivo mostra che dal Lemma 1.5.2 possiamo dedurre che

$$\begin{aligned} &\text{Se } \tilde{x} \text{ è un punto di } P \text{ che non è un vertice,} \\ &\text{allora è possibile trovare un vertice } \hat{v} \text{ di } P \text{ tale che} \\ &\quad c^T \hat{v} \leq c^T \tilde{x}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Siano, ora, $\{v_1, \dots, v_p\}$ i vertici di P (ricordiamo che i vertici sono sicuramente in numero finito, si veda il Corollario 1.4.10); indichiamo con v^* uno di questi vertici per

⁵Se il poliedro P contiene almeno due punti distinti deve contenere, in quanto insieme convesso, tutto il segmento che congiunge questi due punti. Siccome questo segmento contiene infiniti punti possiamo concludere che un poliedro non vuoto o contiene un singolo punto o ne contiene infiniti

cui $c^T v^* \leq c^T v_h$ per ogni $h = 1, \dots, p$. Dalla definizione di v^* e dalla (1.8) segue immediatamente che per ogni punto $\tilde{x} \in P$ possiamo scrivere, per un qualche vertice \hat{v} :

$$c^T v^* \leq c^T \hat{v} \leq c^T \tilde{x}.$$

Questo mostra che il vertice v^* è una soluzione ottima del problema di Programmazione Lineare (PL) e che l'affermazione 3 è vera. \square

Un'immediata conseguenza del Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare è che se il poliedro è un politopo, allora il problema ammette soluzione ottima in un vertice del politopo. Questo risultato è formalizzato nel seguente corollario.

Corollario 1.5.3 *Se un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, \}$ è un politopo non vuoto, allora il problema di Programmazione Lineare ammette soluzione ottima (finita) in un vertice del poliedro P .*

Osservazione La struttura lineare di un problema di Programmazione Lineare è l'elemento chiave che permette di ottenere un risultato così forte circa la possibile soluzione di un problema di ottimizzazione. Infatti, come controesempio si consideri il problema in una variabile reale

$$\begin{cases} \min \frac{1}{x} \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Questo problema non ammette soluzione ottima pur non essendo illimitato inferiormente. L'alternativa espressa dal Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare in questo caso non vale proprio perché viene meno l'ipotesi fondamentale di linearità della funzione obiettivo.

Osservazione Se un problema di Programmazione Lineare, come accade spesso nei problemi provenienti da modelli reali, presenta limitazioni inferiori e superiori sulle variabili cioè è del tipo

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ l \leq x \leq u \end{cases}$$

dove $l \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^n$ sono rispettivamente una limitazione inferiore e superiore delle variabili, allora il poliedro che descrive l'insieme ammissibile è un politopo e quindi vale la caratterizzazione delle soluzioni data dal Corollario 1.5.3.

1.6 Dualità nella Programmazione Lineare

In questa sezione si analizza la teoria della dualità per problemi di Programmazione Lineare e si accenna ad alcune delle sue possibili interpretazioni.

1.6.1 Problema Duale di un Problema di Programmazione Lineare

Sia dato il seguente Problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ Ax \geq b, \end{aligned} \tag{1.9}$$

si associa il seguente problema:

$$\begin{aligned} \max b^T u \\ A^T u = c \\ u \geq 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Il Problema (1.9) viene detto *Problema Primale* e $x \in \mathbb{R}^n$ vettore delle *Variabili Primali*. Il Problema (1.10) viene detto *Problema Duale* e $u \in \mathbb{R}^m$ vettore delle *Variabili Duali*.

La teoria della dualità stabilisce che un problema primale ha dei legami importanti con il corrispondente problema duale. Il primo di questi legami è descritto dal seguente Teorema.

Teorema 1.6.1 (Dualità Debole) *Se $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è un punto ammissibile per il Problema Primale (1.9) e $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$ è un punto ammissibile per il Problema Duale (1.10) si ha che:*

$$c^T \bar{x} \geq b^T \tilde{u}. \tag{1.11}$$

Prova. Poichè i vettori \bar{x} e \tilde{u} sono ammissibili per i corrispondenti problemi soddisfano le seguenti relazioni:

$$(A\bar{x} - b)_i \geq 0, \quad \tilde{u}_i \geq 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m,$$

da cui segue:

$$\bar{x}^T A^T \tilde{u} - b^T \tilde{u} = (A\bar{x} - b)^T \tilde{u} = \sum_{i=1}^m (A\bar{x} - b)_i \tilde{u}_i \geq 0.$$

Dalla precedente disuguaglianza e dal fatto che il vettore \tilde{u} soddisfa il vincolo di uguaglianza del Problema (1.10) si ottiene:

$$c^T \bar{x} - b^T \tilde{u} = \bar{x}^T A^T \tilde{u} - b^T \tilde{u} \geq 0,$$

che dimostra la relazione (1.11). □

Il precedente teorema ha delle importanti conseguenze che sono descritte dal seguente corollario.

Corollario 1.6.2 *Le seguenti proprietà valgono:*

i) Se esistono un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ammissibile per il Problema Primale (1.9) ed un punto $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$ ammissibile per il Problema Duale (1.10) tali che:

$$c^T \bar{x} = b^T \tilde{u}, \quad (1.12)$$

allora \bar{x} è una soluzione ottima per il Problema Primale (1.9) e \tilde{u} è una soluzione ottima per il Problema Duale (1.10).

ii) Se il Problema Primale (1.9) è illimitato inferiormente allora il Problema Duale (1.10) è non ammissibile.

iii) Se il Problema Duale (1.10) è illimitato superiormente allora il Problema Primale (1.9) è non ammissibile.

Prova. Punto i). Dalla ((1.12)) e dalla ((1.11)) si ha che, per ogni punto $u \in \mathbb{R}^m$ ammissibile per il Problema Duale (1.10) si ha:

$$b^T \tilde{u} = c^T \bar{x} \geq b^T u, \quad (1.13)$$

mentre per ogni punto ammissibile $x \in \mathbb{R}^n$ per il Problema Primale (1.9) si ha:

$$c^T \bar{x} = b^T \tilde{u} \leq c^T x. \quad (1.14)$$

Dalle precedenti relazioni segue che \bar{x} è una soluzione ottima per il Problema Primale (1.9) e \tilde{u} è una soluzione ottima per il Problema Duale (1.10).

Punti ii) e iii). Se esistesse un punto ammissibile per il Problema Duale (1.10), la ((1.11)) implicherebbe che il Problema Primale (1.9) sarebbe limitato inferiormente. Analogamente se esistesse un punto ammissibile per il Problema Primale (??), la ((1.11)) implicherebbe che il Problema Duale (1.10) sarebbe limitato superiormente. \square

Nel successivo Capitolo 5 verrà descritta la Teoria della Dualità per problemi di ottimizzazione più generali e, nel caso di problemi di Programmazione Lineare, verrà dimostrato il seguente Teorema.

Teorema 1.6.3 – Teorema della Dualità Forte

Se il Problema Primale (1.9) ammette una soluzione ottima $x^* \in \mathbb{R}^n$ allora anche il Problema Duale (1.10) ammette una soluzione ottima $u^* \in \mathbb{R}^m$. Simmetricamente, se il Problema Duale (1.10) ammette una soluzione ottima $u^* \in \mathbb{R}^m$ allora anche il Problema Primale (1.9) ammette una soluzione ottima $x^* \in \mathbb{R}^n$. Inoltre i valori delle funzioni obiettivo dei due problemi all'ottimo sono uguali cioè risulta

$$c^T x^* = b^T u^*. \quad (1.15)$$

Sulla base dei risultati fino ad ora esaminati si evince che data un coppia primale-duale di problemi di Programmazione Lineare possono verificarsi le seguenti situazioni: o entrambi ammettono soluzione ottima, oppure se uno è illimitato l'altro è

inammissibile, oppure sono entrambi inammissibili. Queste possibilità sono riportate schematicamente nella tabella che segue.

		DUALE		
		OTTIMO FINITO	ILLIMITATO SUPERIOR.	INAMMISSIBILE
PRIMALE	OTTIMO FINITO	SI	NO	NO
	ILLIMITATO INFERIOR.	NO	NO	SI
	INAMMISSIBILE	NO	SI	SI

Si consideri, ora, un problema Programmazione Lineare scritto nella forma più generale possibile cioè il seguente problema.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & c^T x + d^T y \\
 & Cx + Dy = h \\
 & Ex + Fy \geq g \\
 & x \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

con $x \in R^p$, $c \in R^p$, $y \in R^{n-p}$, $d \in R^{n-p}$; C matrice $q \times p$, D matrice $q \times (n-p)$ e $h \in R^q$; E matrice $(m-q) \times p$, F matrice $(m-q) \times (n-p)$ e $g \in R^{m-q}$.

La notazione in cui è scritto questo generico problema di Programmazione Lineare (1.16) è tale da evidenziare che

- alcune delle variabili (il sottovettore x) sono vincolate in segno e mentre altre variabili (il sottovettore y) non sono vincolate in segno,
- alcuni vincoli sono di uguaglianza ed altri di disuguaglianza.

Invece di utilizzare la definizione di Problema Duale Lagrangiano (5.30) oppure quella di Problema Duale di Wolfe (5.40), il Problema Duale del Problema (1.16) può essere costruito sulla base della coppia di problemi dati dal Problema Primale (5.62) e dal Problema Duale (5.64).

Prima di tutto si trasforma il problema (1.16) in un problema equivalente con soli vincoli di disuguaglianza cioè con la forma del problema (5.62).

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d^T y \\ & Cx + Dy \geq h \\ & -Cx - Dy \geq -h \\ & Ex + Fy \geq g \\ & I_p x \geq 0. \end{aligned}$$

dove I_p è la matrice identità di ordine p . I vincoli di questo problema possono essere scritti in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} C & D \\ -C & -D \\ E & F \\ I_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} h \\ -h \\ g \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi il Problema (1.16) è stato ricondotto nella forma (5.62). Siamo quindi in grado di scrivere il duale di questo problema nella forma (5.64) cioè:

$$\begin{aligned} \max \quad & h^T t - h^T w + g^T v \\ & C^T t - C^T w + E^T v + I_p z = c \\ & D^T t - D^T w + F^T v = d \\ & t \geq 0, w \geq 0, v \geq 0, z \geq 0. \end{aligned}$$

Eliminando la variabile z ed effettuando il cambio di variabili $t - w = u$ si ottiene il seguente problema nelle variabili (u, v) , con u non vincolata in segno e $v \geq 0$:

$$\begin{aligned} \max \quad & h^T u + g^T v \\ & C^T u + E^T v \leq c \\ & D^T u + F^T v = d \\ & v \geq 0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

con $u \in R^q$ e $v \in R^{m-q}$.

Dall'osservazione dei due problemi (1.16) e (1.17) si deducono facilmente le proprietà fondamentali di una coppia primale–duale; innanzitutto un problema è di minimizzazione mentre l'altro è di massimizzazione. Inoltre poiché la matrice dei coefficienti dei vincoli di un problema si ottiene trasponendo quella dell'altro, si ha che ad ogni variabile di un problema corrisponde un vincolo nell'altro. Si osserva inoltre uno scambio tra i termini noti di un problema e i coefficienti della funzione obiettivo dell'altro.

Queste proprietà possono essere così schematicamente riassunte:

- il Problema Duale di un problema di minimizzazione è un problema di massimizzazione e simmetricamente, il Problema Duale di un problema di massimizzazione è un problema di minimizzazione;

- ad ogni vincolo di uguaglianza del Problema Primale è associata una variabile nel Problema Duale non vincolata in segno che ha come coefficiente nella funzione obiettivo duale il termine noto del vincolo primale associato;
- ad ogni vincolo di disuguaglianza (di maggiore o uguale) del Problema Primale è associata una variabile nel problema duale vincolata in segno che ha come coefficiente nella funzione obiettivo duale il termine noto del vincolo primale associato;
- ad ogni variabile vincolata in segno del Problema Primale è associato un vincolo di disuguaglianza (di minore o uguale) del Problema Duale il cui termine noto è dato dal coefficiente della funzione obiettivo primale;
- ad ogni variabile non vincolata in segno del Problema Primale è associato un vincolo di uguaglianza del Problema Duale il cui termine noto è dato dal coefficiente della funzione obiettivo primale.

Queste corrispondenze possono essere riassunte nella tabella che segue dove gli insiemi I , J , M e N sono insiemi di indici:

	PRIMALE	DUALE	
	$\min c^T x$	$\max b^T u$	
VINCOLI	$= b_i, \quad i \in I$ $\geq b_i, \quad i \in J$	$u_i, \quad i \in I, \text{ libere}$ $u_i, \quad i \in J, u_i \geq 0$	VARIABILI
VARIABILI	$x_j \geq 0, \quad j \in M$ $x_j, \quad j \in N \text{ libere}$	$\leq c_j, \quad j \in M$ $= c_j, \quad j \in N$	VINCOLI

Osservazione. Se si costruisce il Problema Duale del Problema (5.64) si ritrova il Problema (5.62). Si può quindi concludere che il Problema Duale del Duale è il Problema Primale.

Esempio 1.6.4 Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \\ x_1 - 5x_3 + 2x_4 \geq 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 \geq 9. \end{cases}$$

Il Problema Duale associato è

$$\begin{cases} \max 7u_1 + 9u_2 \\ u_1 + 2u_2 = 2 \\ 4u_2 = 3 \\ -5u_1 - 6u_2 = 4 \\ 2u_1 = 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0. \end{cases}$$

Esempio 1.6.5 Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \max 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ 2x_1 - x_3 \leq 7 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Il Problema Duale è il seguente problema di minimizzazione

$$\begin{cases} \min 8u_1 + 7u_2 + 5u_3 + 6u_4 \\ u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 4 \\ 2u_1 + 4u_3 + u_4 \geq 3 \\ 3u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0. \end{cases}$$

Esempio 1.6.6 Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 7 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 \leq 9 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Dopo aver riscritto il secondo vincolo come $-x_1 - x_2 + 6x_3 \geq -9$ si può formulare facilmente il Problema Duale associato

$$\begin{cases} \max 7u_1 - 9u_2 + 8u_3 \\ 3u_1 - u_2 + 4u_3 \leq 2 \\ u_1 - u_2 - u_3 \leq -3 \\ 5u_1 + 6u_2 - 2u_3 = 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

1.6.2 Condizioni di complementarità

Un'ulteriore proprietà della coppia primale-duale è la cosiddetta *complementarità*. Tale proprietà è di fondamentale importanza anche negli sviluppi algoritmici in quanto è alla base dei cosiddetti *metodi primali duali* per soluzione dei problemi di Programmazione Lineare. In particolare, riportiamo di seguito un teorema fondamentale che caratterizza ulteriormente le soluzioni ottime di una coppia primale-duale di problemi di Programmazione Lineare.

Teorema 1.6.7 Sia (\bar{x}, \bar{y}) un punto ammissibile del Problema Primale (1.16) e sia (\bar{u}, \bar{v}) un punto ammissibile del Problema Duale (1.17). Allora (\bar{x}, \bar{y}) e (\bar{u}, \bar{v}) sono soluzioni ottime rispettivamente del Problema Primale (1.16) e del Problema Duale (1.17) se e solo se soddisfano le seguenti condizioni:

$$\bar{v}^T (E\bar{x} + F\bar{y} - g) = 0 \quad (1.18)$$

$$\bar{x}^T (c - C^T\bar{u} - E^T\bar{v}) = 0. \quad (1.19)$$

Le condizioni ((1.18)) e ((1.19)) vengono chiamate *condizioni di complementarità* e costituiscono, di fatto, delle condizioni di ottimalità per i problemi della coppia primale-duale.

Dal precedente risultato seguono facilmente i seguenti corollari.

Corollario 1.6.8 Sia (\bar{x}, \bar{y}) un punto ammissibile del Problema Primale (1.16) e sia (\bar{u}, \bar{v}) un punto ammissibile del Problema Duale (1.17). Allora (\bar{x}, \bar{y}) e (\bar{u}, \bar{v}) sono soluzioni ottime rispettivamente del Problema Primale (1.16) e del Problema Duale (1.17) se e solo se soddisfano le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \bar{v}_j^T (E\bar{x} + F\bar{y} - g)_j &= 0 \\ \bar{x}_i^T (c - C^T\bar{u} - E^T\bar{v})_i &= 0. \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, m - q.$$

Il Corollario (1.6.8) può essere formulato in maniera del tutto equivalente nella seguente forma:

Corollario 1.6.9 Sia (\bar{x}, \bar{y}) un punto ammissibile del Problema Primale (1.16) e sia (\bar{u}, \bar{v}) un punto ammissibile del Problema Duale (1.17). Allora (\bar{x}, \bar{y}) e (\bar{u}, \bar{v}) sono soluzioni ottime rispettivamente del Problema Primale (1.16) e del Problema Duale (1.17) se e solo se soddisfano le seguenti proprietà:

- i) per ogni variabile \bar{x}_i del Problema Primale (1.16) che assume valore non nullo, il corrispondente vincolo del Problema Duale (1.17) deve essere soddisfatto all'uguaglianza;*
- ii) per ogni variabile \bar{v}_j del Problema Duale (1.17) che assume valore non nullo, il corrispondente vincolo del Problema Primale (1.16) deve essere soddisfatto all'uguaglianza.*

Nel seguito vengono riportati alcuni esempi di applicazione della complementarità.

Esempio 1.6.10 Si consideri il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 3 \\ 7x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 9x_4 = -2 \end{cases} .$$

Il Problema Duale associato è

$$\begin{cases} \max 5u_1 + 3u_2 - 2u_3 \\ u_1 + 2u_2 + 7u_3 = 3 \\ u_2 - 4u_3 = 2 \\ -3u_1 - u_2 + 6u_3 = 1 \\ 2u_1 + 9u_3 = 4 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

Visti i vincoli di uguaglianza presenti nei due problemi, le condizioni di complementarità si riducono a

$$\begin{aligned} u_1(x_1 - 3x_3 + 2x_4 - 5) &= 0 \\ u_2(2x_1 + x_2 - x_3 - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Esempio 1.6.11 Dato il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_4 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

si consideri il punto $\bar{x} = (0, 0, 2, 1/3)$ soluzione ammissibile per il problema (1.20) e il punto $\bar{u} = (1, 1/3)$ soluzione ammissibile per il Problema Duale associato a (1.20). Attraverso le condizioni di complementarità si vuole verificare se \bar{x} è una soluzione ottima del problema del problema (1.20). Innanzitutto scriviamo il Problema Duale del problema dato; esso è

$$\begin{cases} \max 2u_1 + u_2 \\ u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ u_1 \leq 3 \\ u_1 \leq 1 \\ 3u_2 \leq 1. \end{cases}$$

Poiché il problema (1.20) presenta solo vincoli di uguaglianza, le condizioni di complementarità si riducono a $x^T(c - A^T u) = 0$ che in questo caso sono

$$\begin{aligned} x_1(2 - u_1 - 2u_2) &= 0 \\ x_2(3 - u_1) &= 0 \\ x_3(1 - u_1) &= 0 \\ x_4(1 - 3u_2) &= 0 \end{aligned}$$

Sostituendo i valori delle soluzioni ammissibili \bar{x} , \bar{u} rispettivamente per il primale ed il duale, le condizioni di complementarità risultano verificate. Quindi la soluzione \bar{x} è effettivamente ottima per il primale e \bar{u} è ottima per il duale.

Esempio 1.6.12 Si consideri il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

con $c_1 \in R$, $c_2 \in R$, $c_3 \in R$. Utilizzando la teoria della dualità, si vuole stabilire se esistono valori (non tutti nulli) di c_1, c_2, c_3 tali che il punto $\bar{x} = (0, 0, 1/2)^T$ sia una soluzione ottima del problema.

Innanzitutto scriviamo il Problema Duale associato che è

$$\begin{cases} \max -2u_1 - 3u_2 \\ -u_1 - u_2 \leq c_1 \\ -2u_1 - 4u_2 \leq c_2 \\ -2u_1 - 2u_2 \leq c_3 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0. \end{cases}$$

e le condizioni di complementarità

$$\begin{aligned} u_1(-2 + x_1 + 2x_2 + 2x_3) &= 0 \\ u_2(-3 + x_1 + 4x_2 + 2x_3) &= 0 \\ x_1(c_1 + u_1 + u_2) &= 0 \\ x_2(c_2 + 2u_1 + 4u_2) &= 0 \\ x_3(c_3 + 2u_1 + 2u_2) &= 0 \end{aligned}$$

Sostituendo il punto \bar{x} affinché siano soddisfatte tutte le equazioni deve essere

$$\bar{u}_1 = 0, \quad \bar{u}_2 = 0, \quad \frac{1}{2}(c_3 + 2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2) = 0$$

e quindi $c_3 = 0$ (dove \bar{u} è soluzione ottima del Problema Duale). Quindi le condizioni di complementarità sono soddisfatte per qualunque c_1 e c_2 e $c_3 = 0$. Quindi il punto dato \bar{x} è soluzione ottima del problema per qualsiasi valore di c_1 e c_2 e $c_3 = 0$.

1.7 Conseguenze del Teorema Fondamentale e Problemi di Programmazione Lineare in Forma Standard

1.7.1 Conseguenze del Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare

Il Teorema Fondamentale fornisce la base teorica al *Metodo del Simplexso*. Tale metodo è stato il primo algoritmo pratico per la risoluzione di problemi di PL ed è tuttora il più usato e uno dei più efficienti in pratica.

Per introdurre il modo di operare del Metodo del Simplexso iniziamo con il ricordare che *un poliedro ha sempre un numero finito di vertici* (eventualmente il numero dei vertici, come abbiamo già avuto modo di osservare, può essere zero; in questa analisi introduttiva, supponiamo per semplicità che ciò non si verifichi). Comunque, benchè finito, il numero di vertici di un poliedro può essere arbitrariamente alto. Basta pensare all'area racchiusa da un poligono nel piano. All'aumentare del numero dei lati cresce il numero di vertici. Per fare un altro esempio, consideriamo il poliedro

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Se $n = 1$ abbiamo ovviamente un segmento, con 2 vertici ($2 = 2^1$). Se $n = 2$ abbiamo un quadrato, con 4 vertici ($4 = 2^2$). Se $n = 3$ abbiamo un cubo con 8 vertici ($8 = 2^3$). In generale, per $n > 3$ l'insieme I è noto come ipercubo di dimensione n e ha un numero di vertici pari a 2^n , che quindi cresce *esponenzialmente* con la dimensione dello spazio.

Supponiamo di avere un problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & x \in P, \end{aligned}$$

dove P è un poliedro che non contiene rette, e di sapere che il problema ammette (almeno) una soluzione ottima. Allora, il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare ci autorizza a limitare la ricerca di una soluzione ottima ai vertici del poliedro P . Una procedura teorica per la ricerca dell'ottimo, potrebbe essere quindi:

1. Calcola tutti i vertici v_1, v_2, \dots, v_q del poliedro P .
2. Valuta la funzione obiettivo in tutti i vertici e denota con v^* il vertice per cui si raggiunge il valore minimo:

$$c^T v^* \leq c^T v_i \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

3. v^* è una soluzione ottima del problema.

Ovviamente questa strategia deve essere completata da procedure in grado di determinare se P è vuoto o se il problema è illimitato. Inoltre bisogna essere in grado di calcolare i vertici. Il problema principale di questo modo di procedere è che siccome il numero di vertici può essere altissimo, essa può diventare computazionalmente così onerosa da risultare impraticabile. Il Metodo del Simplexso, nella sostanza, è un modo raffinato di realizzare lo schema precedente e può essere schematizzato come segue:

1. Determina un vertice iniziale v di P ;
2. Decidi se v è una soluzione ottima;
3. Se v non è una soluzione ottima allora determina “in modo intelligente” un nuovo vertice v di P e torna al passo 2.

Il Metodo del Simplex si applica a problemi di Programmazione Lineare “*in forma standard*”, ovvero a problemi che presentano una particolare struttura adatta ad essere sfruttata da un punto di vista algoritmico.

1.7.2 Problemi di Programmazione Lineare in Forma Standard

Fino ad ora abbiamo scritto un generico problema di Programmazione Lineare nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases} \quad (1.21)$$

Un problema di Programmazione Lineare in questa forma viene detto problema in *forma generale*. Il Metodo del Simplex assume che il problema di Programmazione Lineare sia nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

che viene chiamata *forma standard*. Come vedremo un problema scritto in forma standard presenta importanti proprietà che possono essere sfruttate nella risoluzione di un problema di PL. Osserviamo innanzitutto che il poliedro di un problema di Programmazione Lineare in forma standard (che d’ora in poi chiameremo “poliedro in forma standard”), è contenuto nell’ortante positivo e quindi non può contenere rette. Di conseguenza, ad un problema in forma standard si applica sempre il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare. Inoltre, la struttura dell’insieme ammissibile di un problema in forma standard permette di caratterizzare i vertici dell’insieme ammissibile stesso.

Preliminarmente dimostriamo che assumere che un problema di Programmazione Lineare sia in forma standard non fa perdere di generalità in quanto qualunque problema di PL può essere trasformato in un problema equivalente in forma standard. Infatti se si ha un problema di Programmazione Lineare nella forma (1.21) si può passare ad un problema equivalente con soli vincoli di uguaglianza introducendo un vettore $u \in \mathbb{R}^m$, $u \geq 0$, e riscrivendo il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax - u = b \\ u \geq 0. \end{cases}$$

Le variabili u vengono chiamate *variabili di surplus* e rappresentano la differenza non negativa tra il primo e il secondo membro dei vincoli di disuguaglianza. È immediato ricondurre ad un problema con soli vincoli di uguaglianza anche un problema di Programmazione Lineare scritto nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \leq b. \end{cases} \quad (1.23)$$

Infatti sarà sufficiente introdurre un vettore $w \in \mathbb{R}^m$, $w \geq 0$, e riscrivere il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax + w = b \\ w \geq 0. \end{cases}$$

Le variabili w vengono chiamate *variabili di slack*.

È inoltre sempre possibile ricondurre un qualsiasi problema di Programmazione Lineare ad un problema equivalente che presenti tutte le variabili vincolate ad essere non negative. Questo può essere facilmente ottenuto attraverso la trasformazione di variabili

$$x = x^+ - x^- \quad (1.24)$$

dove $x^+ \geq 0$ e $x^- \geq 0$. Se infatti consideriamo un problema di Programmazione Lineare nella forma (1.21), la trasformazione (1.24) permette di riscrivere il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T(x^+ - x^-) \\ A(x^+ - x^-) \geq b \\ x^+ \geq 0, \quad x^- \geq 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

in cui tutte le variabili sono non negative. Si osservi che l'insieme ammissibile di un tale problema con tutte le variabili non negative, è un poliedro che non contiene rette.

Osservazione Ovviamente il problema (1.25) può essere posto nella seguente forma vettoriale

$$\begin{cases} \min \tilde{c}^T \tilde{x} \\ \tilde{A} \tilde{x} \geq b \\ \tilde{x} \geq 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

dove $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}$, $\tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}$ e $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & -A \end{pmatrix}$. Da questa rappresentazione dell'insieme ammissibile, riscrivendo i vincoli in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ I_n \end{pmatrix} \tilde{x} \geq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

si vede immediatamente che i coefficienti delle ultime n righe della matrice dei vincoli formano un insieme di vettori linearmente indipendenti (sono i versori degli assi coordinati).

Da queste considerazioni si deduce immediatamente che si può passare da un problema di Programmazione Lineare in forma generale (1.21) ad uno in forma standard

(1.22) semplicemente introducendo i vettori $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$, $y, z, u \geq 0$ e riscrivendo il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T(y - z) \\ A(y - z) - u = b \\ y \geq 0, z \geq 0, u \geq 0. \end{cases}$$

Viceversa, avendo un problema di PL in forma standard,

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

si può passare facilmente trasformarlo in uno in forma generale riscrivendolo

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ -Ax \geq -b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \min c^T x \\ \bar{A}x \geq \bar{b} \end{cases}$$

dove

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I_{n \times n} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0_n \end{pmatrix}$$

Esempio 1.7.1 Si consideri il problema

$$\begin{cases} \min (12x_1 + x_2 + 5x_3) \\ x_2 - 2x_3 \geq 7 \\ 2x_1 + x_3 \leq 10 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Questo problema può essere trasformato in un problema equivalente con vincoli di sola uguaglianza mediante l'introduzione di una variabile di surplus x_4 e una variabile di slack x_5 e scrivendo il problema

$$\begin{cases} \min (12x_1 + x_2 + 5x_3) \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 10 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Questo problema può essere ulteriormente trasformato in un problema equivalente con tutte le variabili vincolate in segno. È sufficiente rappresentare la variabile x_2 che

non è vincolata in segno nella forma $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ e scrivere il problema nella forma equivalente

$$\begin{cases} \min (12x_1 + x_2^+ - x_2^- + 5x_3) \\ x_2^+ - x_2^- - 2x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 10 \\ 3x_1 - x_2^+ + x_2^- - 2x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

□

1.7.3 Vertici e Soluzioni di Base Ammissibile

Come abbiamo visto nell'introduzione di questo capitolo, un punto centrale del metodo del semplice è la visita dei vertici del poliedro ammissibile. È quindi molto importante disporre di metodi efficaci per l'individuazione e l'analisi dei vertici di un poliedro. Uno dei vantaggi di considerare i problemi di Programmazione Lineare in forma standard è la particolare caratterizzazione che si può dare per i vertici dei loro insiemi ammissibili.

Per descrivere tale caratterizzazione, consideriamo un generico poliedro in forma standard

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}, \quad (1.28)$$

dove A è una matrice $m \times n$ e dove supponiamo che valga la seguente assunzione.

Assunzione: *il poliedro P è non vuoto e $\text{rank}(A) = m$.*

Notiamo che l'assunzione fatta implica $m \leq n$ e garantisce l'esistenza di almeno una sottomatrice $B \in R^{m \times m}$ non singolare. Notiamo inoltre che, come vedremo successivamente, tale assunzione non è limitativa.

Teorema 1.7.2 *Sia \bar{x} un punto appartenente al poliedro P definito come in (1.28). Allora \bar{x} è un vertice di P se e solo se le colonne di A relative alle componenti positive di \bar{x} sono linearmente indipendenti.*

Prova. (La prova non fa parte del programma d'esame). Riscrivendo le equazioni $Ax = b$ nella definizione del poliedro (1.28) come coppia di disequazioni abbiamo che P è definito dal sistema di disequazioni

$$\begin{aligned} Ax &\geq b \\ -Ax &\geq -b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

È ovvio che, siccome il punto \bar{x} è ammissibile, soddisfa le prime $2m$ disequazioni all'uguaglianza. Supponiamo inoltre, senza perdita di generalità, che le prime r variabili siano strettamente positive, mentre le ultime $n - r$ sono nulle. Perciò si ha:

$$A\bar{x} = b$$

$$\begin{aligned}
-A\bar{x} &= -b \\
\bar{x}_{r+1} &= 0 \\
&\vdots \\
\bar{x}_n &= 0.
\end{aligned}$$

Ora, indicando con e_i un vettore di \mathbb{R}^n con tutte componenti nulle ad eccezione della i -esima che è pari ad 1, ovvero $e_i^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, ricordando che $\bar{x}_i = e_i^T \bar{x}$ ed il Teorema 1.4.7, abbiamo che \bar{x} è un vertice se e solo se il rango della matrice dei vincoli attivi è n , cioè se e sole se

$$\begin{aligned}
\text{rango} \begin{pmatrix} A \\ -A \\ e_{r+1}^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix} &= \text{rango} \begin{pmatrix} A & & \\ 0_{(n-r) \times r} & I_{(n-r) \times (n-r)} & \end{pmatrix} = \\
&= \text{rango} \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_r & a_{r+1} \cdots a_n \\ 0_{(n-r) \times r} & I_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} = n. \tag{1.29}
\end{aligned}$$

Usando la definizione di rango, l'ultima uguaglianza della (1.29) è equivalente al fatto che

$$\begin{pmatrix} a_1 \cdots a_r & a_{r+1} \cdots a_n \\ 0_{(n-r) \times r} & I_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{implica} \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0. \tag{1.30}$$

Sfruttando la sua particolare struttura, l'implicazione (1.30) può essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned}
(a_1 \cdots a_r) y + (a_{r+1} \cdots a_n) z &= 0 \\
z &= 0
\end{aligned} \quad \text{implica} \quad y = 0 \quad \text{e} \quad z = 0,$$

che, ovviamente, è equivalente al fatto che

$$(a_1 \cdots a_r) y = 0 \quad \text{implica} \quad y = 0, \tag{1.31}$$

cioè all'indipendenza lineare delle colonne a_1, \dots, a_r corrispondenti alle componenti positive di \bar{x} . \square

Un conseguenza immediata del precedente teorema è il seguente corollario.

Corollario 1.7.3 *Sia \bar{x} un punto appartenente al poliedro P definito come in (1.28). Se \bar{x} è un vertice di P allora almeno $n - m$ componenti di \bar{x} sono nulle.*

Esempio 1.7.4 Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 4x_6 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 &= 5 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 &= 7 \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.32}$$

e il punto $x = (2, 1, 1, 1, 0, 0)^T$. Si verifica facilmente per sostituzione che il punto x è una soluzione ammissibile del sistema considerato, ma non è un suo vertice. Infatti le colonne di A relative alle componenti di x positive

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

non sono linearmente indipendenti (cfr. Corollario 1.7.3) □

Esempio 1.7.5 Consideriamo il poliedro P definito dal seguente sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

e i due punti $(1, 1, 0, 0)^T$ e $(0, 0, 0, 1)^T$. Si verifica immediatamente che i due punti sono ammissibili o, in altri termini, appartengono al poliedro P . Inoltre, applicando il Teorema 1.7.2, si può constatare che i due punti sono vertici di P . Nel primo caso infatti

$$\det(a_1 \ a_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

e quindi l'insieme costituito dalla prima e seconda colonna, corrispondenti alle componenti del punto maggiori di 0, è linearmente indipendente. Nel secondo caso il risultato è ancora più ovvio perché l'insieme costituito dalla sola quarta colonna (diversa da zero) è banalmente linearmente indipendente. Notiamo che per tutti e due i punti il numero di componenti maggiore di zero è minore o uguale a $m = 2$. □

Introduciamo ora alcune definizioni che permetteranno di dare una importante caratterizzazione dei vertici di un poliedro in forma standard. Il punto di partenza è la definizione di sottomatrice di matrice base della matrice A .

Definizione 1.7.6 Sia $A \in R^{m \times n}$ la matrice dei coefficienti di un poliedro in forma standard (1.28), e siano $\{a_1, \dots, a_n\}$ l'insieme delle sue colonne. Una sottomatrice $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m}) \in R^{m \times m}$ di A non singolare è detta matrice di base di A .

Scelta una particolare matrice di base B di A , si possono introdurre le seguenti definizioni.

Definizione 1.7.7 Data una matrice di base $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m})$ di A :

- la sottomatrice $N = (a_{j_{m+1}}, \dots, a_{j_n}) \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ di A è detta matrice delle colonne fuori base di A ;
- l'insieme $I_B = \{j_1, \dots, j_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ viene detto insieme degli indici di base;
- l'insieme $I_N = \{j_{m+1}, \dots, j_n\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ viene detto insieme degli indici fuori base;
- le componenti x_i , $i \in I_B$ vengono dette variabili di base;
- le componenti x_i , $i \in I_N$ vengono dette variabili fuori base;
- ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ può essere partizionato in due sottovettori

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{j_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad x_N = \begin{pmatrix} x_{j_{m+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{j_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m},$$

detti vettore delle variabili di base (x_B) e vettore delle variabili fuori base (x_N).

Esempio 1.7.8 Sia dato il seguente sistema

$$\begin{array}{rcccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & + & x_6 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & + & 2x_6 & = & 8 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & + & x_6 & = & 2 \\ & & & & & & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Consideriamo la sottomatrice di A

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ottenuta considerando nell'ordine la sesta, prima e quarta colonna della matrice A del sistema. In questo caso

$$I_B = \{j_1 = 6, j_2 = 1, j_3 = 4\},$$

e, poiché si verifica facilmente che $\det B = -3$, abbiamo che B è una matrice di base di A , le colonne a_6 , a_1 e a_4 sono colonne di base e gli indici 6, 1 e 4 sono indici di base.

Consideriamo ora, invece, la sottomatrice di A

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ottenuta considerando nell'ordine la seconda, quinta e quarta colonna della matrice A del sistema. In questo caso

$$I_B = \{j_1 = 2, j_2 = 5, j_3 = 4\},$$

e, poiché si verifica facilmente che $\det B = 0$, abbiamo che B non è una matrice di base di A . \square

Utilizzando gli insiemi di indici I_B e I_N si può riscrivere il sistema $Ax = b$ nella seguente maniera:

$$\sum_{i \in I_B} a_{ji} x_{ji} + \sum_{i \in I_N} a_{ji} x_{ji} = b. \quad (1.33)$$

Utilizzando i sottovettori x_B e x_N , il sistema (1.33) può essere posto nella forma:

$$Bx_B + Nx_N = b \quad (1.34)$$

oppure nella forma:

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \quad (1.35)$$

I sistemi (1.34) e (1.35) mettono in evidenza che il sistema $Ax = b$ può essere risolto esprimendo il vettore delle variabili base x_B in funzione del vettore delle variabili fuori base. La particolare soluzione del sistema $Ax = b$ che si ottiene annullando il vettore delle variabili fuori base viene caratterizzata dalla seguente definizione.

Definizione 1.7.9 *Data una matrice di base B di A . Un vettore \bar{x} è detto Soluzione di Base del sistema $Ax = b$ se i suoi sottovettori \bar{x}_B e \bar{x}_N sono tali che:*

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m} \end{aligned}$$

Data una matrice di base B , anche il vettore c dei coefficienti della funzione obiettivo può essere decomposto nei due sottovettori:

$$c_B = \begin{pmatrix} c_{j_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{j_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad c_N = \begin{pmatrix} c_{j_{m+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{j_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m},$$

che rappresentano i coefficienti di costo delle variabili di base e quelli delle variabili fuori base.

Un problema in forma standard può quindi essere riscritto nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned} \tag{1.36}$$

oppure nella forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned} \tag{1.37}$$

Osservazione Un problema di PL in forma standard può essere scritto nella forma equivalente (1.36) in tanti modi diversi quante sono le matrici di base di A .

Utilizzando delle particolari matrici di base del sistema $Ax = b$ è possibile caratterizzare delle particolari soluzioni ammissibili del Problema in Forma Standard (1.36) (oppure (1.37)), a questo scopo sono necessarie altre due definizioni.

Definizione 1.7.10 Dato un problema in forma standard (1.36), una matrice di base B di A è detta matrice di base ammissibile se risulta

$$B^{-1}b \geq 0_m.$$

Definizione 1.7.11 Dato un problema in forma standard (1.36) e data una matrice di base ammissibile B di A . Un vettore \bar{x} è detto Soluzione di Base Ammissibile (SBA) del problema (1.36) se i suoi sottovettori \bar{x}_B e \bar{x}_N sono tali che:

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m} \end{aligned}$$

Esempio 1.7.12 Consideriamo il sistema dell'Esempio 1.7.8 e la prima delle basi ivi presa in considerazione.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

con

$$I_B = \{j_1 = 6, j_2 = 1, j_3 = 4\},$$

Sappiamo già che B è una matrice di base, verifichiamo se è una matrice di base ammissibile. Risulta

$$B^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{e quindi} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Quindi B è una base ammissibile. La soluzione di base ammissibile associata è

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= \begin{pmatrix} x_6 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \bar{x}_N &= \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ovvero

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora una matrice di base diversa, più precisamente

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

corrispondente a

$$I_B = \{j_1 = 1, j_2 = 2, j_3 = 6\}.$$

È facile verificare che B è una matrice di base (il suo determinante è diverso da 0), e che la soluzione di base ad essa associata è

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1 \\ 16/3 \end{pmatrix} \\ \bar{x}_N &= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ovvero

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16/3 \end{pmatrix}.$$

che, ovviamente, non è ammissibile perché la prima e seconda componente sono negative. □

Possiamo ora studiare la relazione tra SBA e vertici. Vale il seguente teorema.

Teorema 1.7.13 *Sia \bar{x} un punto appartenente al poliedro P definito come in (1.28). Allora \bar{x} è un vertice di P se e solo se è una SBA.*

Prova. (La prova non fa parte del programma d'esame). Se \bar{x} è una SBA, abbiamo, per la definizione stessa di SBA, che $n - m$ variabili sono sicuramente nulle, quindi vale l'inclusione $\{i : \bar{x}_i > 0\} \subseteq I_B$. Quindi abbiamo che le colonne della matrice A corrispondenti a variabili positive sono un sottoinsieme delle colonne della matrice di base B . Ma per la definizione di matrice di base, le colonne di B sono linearmente indipendenti e quindi saranno linearmente indipendenti anche le colonne di qualunque suo sottoinsieme di colonne. Ma allora \bar{x} è un vertice per il Teorema 1.7.2.

Supponiamo ora che \bar{x} sia un vertice e mostriamo che esiste una base la cui soluzione di base associata coincide con \bar{x} . Supponiamo, senza perdita di generalità, che le prime r componenti di \bar{x} siano positive e che le restanti componenti siano nulle, supponiamo, cioè, che $\{i : \bar{x}_i > 0\} = \{1, \dots, r\}$. Per il Teorema 1.7.2 abbiamo che le colonne $a_1 \cdots a_r$ sono linearmente indipendenti. Siccome il rango di A è m , si ha che $r \leq m$. Per il teorema del completamento possiamo trovare $m - r$ colonne di A tra le ultime $n - r$ colonne (supponiamo, senza perdita di generalità, che siano le colonne $a_{r+1} \cdots a_m$), tali che le colonne

$$a_1 \cdots a_r, a_{r+1} \cdots a_m$$

siano linearmente indipendenti. Posto

$$B = (a_1 \cdots a_r, a_{r+1} \cdots a_m),$$

abbiamo ovviamente che B è una matrice non singolare. Per far vedere che \bar{x} è una soluzione di base, sarà ora sufficiente mostrare che

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Ricordando che $r \leq m$, abbiamo ovviamente che $\bar{x}_N = 0_{n-m}$. Quindi per concludere basta mostrare che $\bar{x}_B = B^{-1}b$ o, equivalentemente, visto che B è non singolare, $B\bar{x}_B = b$. Ma, tenendo conto che \bar{x} appartiene al poliedro (1.28), possiamo scrivere

$$b = A\bar{x} = B\bar{x}_B + N\bar{x}_N = B\bar{x}_B + N0_m = B\bar{x}_B.$$

□

È facile convincersi che il numero di SBA (e quindi il numero di vertici) è finito ed è pari, al massimo, al numero di possibili modi diversi di prendere m colonne di A fra n . Vale cioè il seguente teorema

Teorema 1.7.14 *Il numero di SBA (cioè di vertici) è finito e pari, al più, a $\binom{n}{m}$.*

Notiamo che in effetti il numero di SBA può essere inferiore al limite massimo di $\binom{n}{m}$ perché una volta fissate m colonne di A queste potrebbero non essere linearmente indipendenti o, anche nel caso lo fossero, la soluzione di base associata può non essere ammissibile.

Esempio 1.7.15 Sia dato il seguente sistema.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + \frac{5}{2}x_4 &= 4 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= 2 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Esaminiamo tutte le possibili coppie ($m = 2$) di colonne della matrice A . Applicando le definizioni di base, soluzione di base e soluzione di base ammissibile, otteniamo i risultati riportati qui di seguito.

<i>Indici delle colonne</i>	<i>Base</i>	<i>Soluzione di base</i>	<i>Ammissibile</i>
{1, 2}	Sì	$(2, 1, 0, 0)^T$	Sì
{1, 3}	No	–	–
{1, 4}	Sì	$(-1, 0, 0, 2)^T$	No
{2, 3}	Sì	$(0, 1, -1, 0)^T$	No
{2, 4}	Sì	$(0, 1/3, 0, 4/3)^T$	Sì
{3, 4}	Sì	$(0, 0, 1/2, 2)^T$	Sì

Come si vede su $\binom{n}{m} = \binom{4}{2} = 6$ possibili combinazioni abbiamo 5 basi di cui solo tre sono ammissibili. □

Dal Teorema 1.7.2 e dal Teorema 1.7.13 segue immediatamente il seguente corollario.

Corollario 1.7.16 *Una soluzione $\bar{x} \neq 0_n$ appartenente a P è una SBA se e solo se le colonne di A corrispondenti alle componenti di \bar{x} positive sono linearmente indipendenti.*

Il significato del Teorema 1.7.13 e del Corollario 1.7.16 è che i concetti di vertice di P e quello di soluzione di base ammissibile sono assolutamente equivalenti. In effetti noi siamo partiti da una formalizzazione *geometrica* del concetto di vertice che si presta bene ai ragionamenti intuitivi e siamo poi arrivati al concetto algebrico (equivalente) di SBA che si presta meglio al tipo di manipolazione che dovremo introdurre per studiare un algoritmo risolutivo di tipo generale per i problemi di PL. Nel seguito ci riferiremo

principalmente al concetto di SBA, ma, al fine di avere un'idea più intuitiva del significato dei risultati cui perverremo, conviene tenere sempre presente anche il suo aspetto geometrico di vertice, così come introdotto in precedenza.

Osservazione La corrispondenza tra basi ammissibili e soluzioni di base ammissibili non è biunivoca. Infatti, mentre a ciascuna base ammissibile B di A corrisponde una sola soluzione di base ammissibile $x = (B^{-1}b \ 0_{n-m})^T$, è possibile che una soluzione di base ammissibile sia associata a due basi ammissibili diverse.

Esempio 1.7.17 Sia dato il seguente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Compiliamo una tabella analoga a quella dell'Esempio 1.7.15.

<i>Indici delle colonne</i>	<i>Base</i>	<i>Soluzione di base</i>	<i>Ammissibile</i>
{1, 2}	Sì	$(-1, 1, 0, 0)^T$	No
{1, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì
{1, 4}	No	–	–
{2, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì
{2, 4}	Sì	$(0, 1, 0, 1)^T$	Sì
{3, 4}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì

Si vede che abbiamo 4 basi ammissibili, ma solo 2 soluzioni di base ammissibili (ovvero solo due vertici). Infatti tre basi diverse, {1, 3}, {2, 3}, {3, 4}, danno origine ad un'unica soluzione di base, $(0, 0, 1, 0)^T$. \square

Risulta abbastanza evidente che la possibilità che a una stessa SBA (equivalentemente, a uno stesso vertice) corrispondano più basi è legato al fatto che nel vettore $B^{-1}b$ ci siano degli zeri, che corrispondono al fatto che alcune variabili, che valgono 0, possono indifferentemente essere considerate in base o fuori base.

Allo scopo di chiarire il legame tra basi ammissibili e soluzioni ammissibili di base (vertici) introduciamo la seguente definizione.

Definizione 1.7.18 Una soluzione di base ammissibile \bar{x} è degenera se il numero di componenti positive di \bar{x} è minore di m .

Dalla precedente definizione discende immediatamente che se una soluzione è non degenera allora *ogni* componente del vettore $B^{-1}b$ è strettamente positiva. Nel caso di soluzioni di base non degeneri la corrispondenza tra basi ammissibili e soluzioni di base ammissibili diviene biunivoca, come mostrato nel seguente teorema.

Teorema 1.7.19 *Se una soluzione di base ammissibile \bar{x} è non degenera allora esiste una ed una sola base ammissibile B tale che*

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m}.\end{aligned}$$

Prova. (La prova non fa parte del programma d'esame) Sia \tilde{B} una base ammissibile di A diversa da B e sia \tilde{x} la soluzione di base associata a \tilde{B} ovvero:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{\tilde{B}} &= \tilde{B}^{-1}b, \\ \tilde{x}_{\tilde{N}} &= 0_{n-m}.\end{aligned}$$

Poichè $\tilde{B} \neq B$ abbiamo che almeno una colonna di A , ad esempio l' i -esima, appartiene a B e non appartiene a \tilde{B} . Di conseguenza, $i \in I_{\tilde{N}}$ che implica $\tilde{x}_i = 0$; mentre $i \in I_B$ implica $\bar{x}_i > 0$ (poichè \bar{x} è non degenera). Perciò $\tilde{x} \neq \bar{x}$. Abbiamo quindi che ogni base ammissibile diversa da B produce una soluzione di base ammissibile diversa da \bar{x} ed il teorema segue. \square

Se una soluzione \bar{x} è degenera, allora una o più componenti del vettore $\bar{x}_B = B^{-1}b$ sono nulle. In tal caso, basi ammissibili diverse possono produrre la stessa soluzione ammissibile di base \bar{x} .

Esempio 1.7.20 Con riferimento all' Esempio 1.7.17, completiamo la tabella, aggiungendo l'indicazione di soluzione degenera o meno.

<i>Indici delle colonne</i>	<i>Base</i>	<i>Soluzione di base</i>	<i>Ammissibile</i>	<i>Degenera</i>
{1, 2}	Sì	$(-1, 1, 0, 0)^T$	No	-
{1, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì
{1, 4}	No	-	-	-
{2, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì
{2, 4}	Sì	$(0, 1, 0, 1)^T$	Sì	No
{3, 4}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì

1.8 Introduzione al metodo del simplesso

1.8.1 Introduzione

Il Metodo del Semplesso permette di risolvere problemi di Programmazione Lineare in *forma standard*, cioè problemi di Programmazione Lineare della forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n, \end{aligned} \tag{1.38}$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Come detto precedentemente il metodo del Semplesso trae ispirazione dal Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare e si basa sull'idea di cercare una possibile soluzione del problema di Programmazione Lineare tra i vertici del poliedro che descrive l'insieme ammissibile del problema. Gli elementi caratterizzanti di questo metodo sono:

- la capacità di selezionare in maniera efficiente i vertici che visita;
- il fatto di passare da un vertice ad un'altro senza richiedere inversioni di matrici o soluzioni di sistemi di equazioni;
- l'uso di semplici criteri che permettono di individuare il vertice ottimo o di concludere che il problema di Programmazione Lineare non ammette soluzioni in quanto è illimitato inferiormente.

Queste importanti caratteristiche sono ottenute grazie ad un uso molto efficiente delle basi ammissibili della matrice A . Tali basi permettono, da una parte, di individuare facilmente un vertice dell'insieme ammissibile (una soluzione di base ammissibile) e, dall'altra parte, di sfruttare i vincoli di uguaglianza dell'insieme ammissibile per esprimere un gruppo di variabili (le variabili di base) in funzione delle altre (le variabili non di base).

In questa sezione vengono accennati gli elementi essenziali su cui si basa il metodo del simplesso.

Per semplificare la descrizione, si suppongono vere le seguenti assunzioni.

Assunzione 1.8.1

- i) *l'insieme ammissibile del problema (1.38) è non vuoto;*
- ii) $\text{rango}(A) = m$;
- iii) *data una base ammissibile B , si hanno a disposizione la matrice $B^{-1}N$ ed il vettore $B^{-1}b$.*

Per quanto visto precedentemente, l'assunzione iii) può essere sfruttata per riscrivere il problema nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ & x_B \geq 0_m \\ & x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Questa forma mette in evidenza il fatto che il vettore x_B è funzione del vettore x_N infatti:

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N. \tag{1.40}$$

Sostituendo l'espressione di x_B nella funzione obiettivo del problema (1.39) si ottiene una nuova forma equivalente del problema (1.38):

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N \\ & x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \\ & x_B \geq 0_m \\ & x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned} \tag{1.41}$$

dove in vettore γ è detto *vettore dei costi ridotti* ed è dato da:

$$\gamma = c_N - (B^{-1} N)^T c_B \in R^{n-m}.$$

Il problema (1.41) viene detto *problema in forma canonica rispetto alla base B*.

1.8.2 Criterio di ottimalità

Data una base ammissibile e, quindi, una soluzione di base ammissibile associata, il primo passo che affronta il metodo del simplesso è quello di cercare di capire se questa soluzione di base ammissibile è una soluzione ottima del problema. A questo fine, gioca un ruolo fondamentale il seguente criterio di ottimalità.

Teorema 1.8.1 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema (1.38). Se il vettore dei costi ridotti è non negativo, ovvero se:*

$$\gamma = c_N - (B^{-1} N)^T c_B \geq 0_{n-m},$$

allora la soluzione di base ammissibile \bar{x} associata alla base B (cioè il vettore che dato da $\bar{x}_B = B^{-1} b$ e $\bar{x}_N = 0_{n-m}$) è ottima per il problema (1.38).

Prova. Si deve dimostrare che, se il vettore dei coefficienti ridotti è non negativo, allora per una qualunque vettore ammissibile x risulta

$$c^T x \geq c^T \bar{x}.$$

Sia x un qualsiasi punto ammissibile del problema (1.38) si ha:

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

e ricordando l'espressione (1.40) di x_B

$$c^T x = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N$$

D'altra parte, per ipotesi si ha $\gamma \geq 0$ e per l'ammissibilità di x si ha $x_N \geq 0$, da cui si ottiene:

$$c^T x \geq c_B^T B^{-1} b = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T 0_{n-m} = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x}.$$

Ma la precedente relazione mostra che la soluzione di base ammissibile \bar{x} associata alla matrice di base B è ottima per il problema (1.38). \square

Dal precedente teorema si può derivare il seguente corollario.

Corollario 1.8.2 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema (1.38). Se il vettore dei costi ridotti è positivo, ovvero se:*

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B > 0_{n-m},$$

allora la soluzione di base ammissibile \bar{x} associata alla base B (cioè il vettore che dato da $\bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_N = 0_{n-m}$) è l'unica soluzione ottima del problema (1.38).

Prova. Ripetendo gli stessi argomenti usati nella prova del Teorema 1.8.1, si ottiene che per ogni vettore x ammissibile

$$c^T x = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N > c_B^T B^{-1} b = c^T \bar{x}, \quad (1.42)$$

dove la stretta disuguaglianza segue dall'ipotesi che $\gamma > 0$ e dal fatto che ogni punto ammissibile x distinto da \bar{x} deve avere $x_N \geq 0_{n-m}$ e $x_N \neq 0_{n-m}$. Dalla (1.42) segue che la soluzione di base ammissibile è l'unica soluzione ottima per il problema (1.38) \square

Il seguente teorema mostra che una base ammissibile che soddisfa il criterio di ottimalità permette di determinare facilmente la soluzione del problema duale associato al problema (1.38).

Teorema 1.8.3 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema (1.38). Se il vettore dei costi ridotti è non negativo, ovvero se:*

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \geq 0_{n-m},$$

allora il vettore

$$\lambda^* = B^{-T} c_B$$

è una soluzione ottima del duale del problema (1.38).

Prova. Invece di considerare il problema originario (1.38) si fa riferimento alla sua formulazione equivalente descritta dal problema (1.36). Il duale del problema (1.36) è dato da:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T \lambda & (1.43) \\ & B^T \lambda \leq c_B \\ & N^T \lambda \leq c_N, \end{aligned}$$

Per definizione il vettore λ^* soddisfa il primo vincolo del precedente problema. Ricordando che il criterio di ottimalità è soddisfatto e l'espressione del vettore λ^* si ha:

$$c_N \geq (B^{-1}N)^T c_B = N^T B^{-T} c_B = N^T \lambda^*,$$

da cui segue che anche il secondo vincolo del problema (1.43) è soddisfatto dal vettore λ^* .

Riguardo il valore della funzione obiettivo del problema duale (1.43) nel punto λ^* si ha:

$$b^T \lambda^* = b^T B^{-T} c_B = c_B^T B^{-1} b = c^T x^*,$$

Dove x^* , per il Teorema 1.8.1, è una soluzione ottima del problema primale (1.36). Quindi la precedente relazione implica che il valore della funzione obiettivo del problema duale (1.43) nel punto ammissibile λ^* coincide con il valore ottimo del problema primale. Il punto (ii) del Corollario ?? implica che λ^* è una soluzione ottima del problema duale. \square

I risultati appena descritti ci consentono di formulare un *criterio sufficiente di ottimalità* per una soluzione di base ammissibile.

Esempio 1.8.4 Consideriamo il seguente problema di PL.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = 3 \\ & 2x_1 - x_2 - 5x_3 & + x_5 & = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 & & + x_6 & = 1 \\ & & & & & x & \geq 0. \end{aligned}$$

Consideriamo la base formata dalle colonne 1, 3 e 4 ($I_B = \{1, 3, 4\}$ e $I_N = \{2, 5, 6\}$).
Abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -11 \end{pmatrix}.$$

$$c_B = (1, 1, 1)^T, \quad c_N = (2, 1, 1)^T, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i coefficienti ridotti.

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (10/3, 1/3, 7/3).$$

Siccome i coefficienti ridotti sono tutti positivi abbiamo identificato una soluzione ottima che è anche l'unica. Tale soluzione ottima è data da

$$x_B = B^{-1}b = (1, 0, 2)^T, \quad x_N = 0_3,$$

per cui

$$x = (1, 0, 0, 2, 0, 0)^T.$$

Esempio 1.8.5 Consideriamo di nuovo il problema dell'Esempio 1.8.4, e consideriamo la base costituita dalle colonne 1, 4 e 6 ($I_B = \{1, 4, 6\}$ e $I_N = \{2, 3, 5\}$). Abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$c_B = (1, 1, 1)^T, \quad c_N = (2, 1, 1)^T, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i coefficienti ridotti.

$$\gamma = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (-5/2, -7/2, 3/2).$$

Calcoliamo anche la soluzione di base associata.

$$x_B = B^{-1}b = (1, 2, 0)^T, \quad x_N = 0_3,$$

per cui

$$x = (1, 0, 0, 2, 0, 0)^T.$$

Come si vede la soluzione di base trovata è la stessa trovata nell' Esempio 1.8.4, ed è quindi ottima (si tratta ovviamente di una SBA degenera). Come si vede il test impiegato non è stato capace, in questo caso, di determinare il fatto che la soluzione corrente è ottima. Questo perché il criterio impiegato è solo sufficiente, ma non necessario.

Il criterio di ottimalità è una condizione necessaria di ottimo in corrispondenza di vertici non degeneri come mostra il seguente risultato.

Teorema 1.8.6 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema (1.38). Se la soluzione di base ammissibile x^* associata alla base B (cioè il vettore che dato da $x_B^* = B^{-1}b$ e $x_N^* = 0_{n-m}$) è una soluzione ottima per il problema (1.38) e se è un vertice non degeneri allora:*

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \geq 0_{n-m}.$$

Prova. Si consideri di nuovo duale del problema (1.36) è dato da:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T \lambda \\ & B^T \lambda \leq c_B \\ & N^T \lambda \leq c_N, \end{aligned}$$

e sia λ^* una sua soluzione ottima.

Dalla relazione (1.19) del teorema 1.6.7 si ha:

$$(x_B^*)^T (B^T \lambda^* - c_B) = 0.$$

Poichè, dalla non degenerazione di x^* , si ha $\bar{x}_B^* > 0$ la precedente relazione implica che:

$$\lambda^* = B^{-T} c_B.$$

Sostituendo questa espressione nel secondo vincolo del problema duale si ha:

$$0 \leq c_N - N^T \lambda^* = c_N - N^T B^{-T} c_B = c_N - (B^{-1}N)^T c_B = \gamma,$$

che dimostra il teorema. □

1.8.3 Criterio di illimitatezza

Se il criterio di ottimalità non è verificato il metodo del simplesso cerca di capire se il problema da risolvere sia illimitato inferiormente.

Il fallimento del criterio di ottimalità implica:

$$\{i \in \{1, \dots, n - m\} : \gamma_i < 0\} \neq \emptyset.$$

In questa situazione si può considerare il seguente criterio sufficiente di illimitatezza (inferiore) del problema (1.38).

Teorema 1.8.7 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema (1.38). Se per qualche indice $i \in \{1, \dots, n - m\}$ abbiamo che:*

$$c_B = (-1, 0)^T, \quad c_N = (-1, 0)^T, \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice $B^{-1}N$ e i coefficienti ridotti

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N = (-2, 1).$$

Notiamo che in corrispondenza al coefficiente ridotto della prima variabile non in base (x_2), che è negativo, la prima colonna della matrice $B^{-1}N$ contiene solo elementi non positivi. Quindi possiamo concludere che il problema è illimitato inferiormente.

1.8.4 Determinazione di una nuova base ammissibile

Data una soluzione di base ammissibile

$$\bar{x} = \begin{cases} \bar{x}_B = B^{-1}b \\ \bar{x}_N = 0_{n-m} \end{cases}$$

del problema (1.38), nel caso in cui i criteri di ottimalità ed illimitatezza, applicati ad \bar{x} , non siano soddisfatti, il metodo del simplesso cerca di determinare una nuova soluzione di base ammissibile o, almeno, una nuova base ammissibile del problema.

Nel seguito, per semplicità, le colonne della matrice $B^{-1}N$ saranno indicate da $\{\pi_1, \dots, \pi_{n-m}\}$, cioè:

$$B^{-1}N = (\pi_1, \dots, \pi_{n-m}).$$

Come già osservato se il criterio di ottimalità non è soddisfatto si ha:

$$\left\{ i \in \{1, \dots, n-m\} : \gamma_i < 0 \right\} \neq \emptyset. \quad (1.44)$$

Mentre se non è soddisfatto il criterio di illimitatezza, allora per ogni indice $h \in \{1, \dots, n-m\}$ tale che $\gamma_h < 0$ si ha:

$$\left\{ k \in \{1, \dots, m\} : \pi_{kh} > 0 \right\} \neq \emptyset. \quad (1.45)$$

Perciò in questa sezione si considererà il caso in cui sia la (1.44) sia la (1.45) sono sempre verificate.

Falliti i due criteri, il metodo del simplesso cerca di costruire una nuova soluzione di base ammissibile del problema (1.38), cioè un punto

$$\tilde{x} = \begin{cases} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{cases}$$

che, per essere diverso da \bar{x} , deve avere almeno una componente del vettore \tilde{x}_N è diversa da zero. Infatti, se $\tilde{x}_N = 0_{n-m}$, allora $\tilde{x}_B = B^{-1}b$ ed $\tilde{x} = \bar{x}$.

L'idea base del Metodo del Simpleso è quella di modificare *una sola componente del vettore* x_N , ad esempio l' h -esima (ricordando la definizione di x_N si ha $(x_N)_h = x_{j_{m+h}}$), portandola da zero ad un valore positivo ρ . Formalmente viene considerata la seguente semiretta di punti:

$$x(\rho) = \begin{cases} x_B(\rho) = B^{-1}b - \rho B^{-1}N e_h \\ x_N(\rho) = \rho e_h \end{cases} \quad (1.46)$$

dove ρ è un numero reale non-negativo, e_h è l' h -esimo vettore unitario con $n - m$ componenti e l'espressione del sottovettore $x_B(\rho)$ è data dalla (1.40) che nasce dalla necessità di soddisfare i vincoli di uguaglianza del problema originario.

Dopo aver definito il generico punto $x(\rho)$ rimangono da risolvere le due seguenti questioni:

- quale variabile fuori base modificare, cioè come scegliere l'indice h ;
- quanto variare la variabile fuori base scelta, cioè quale valore dare allo scalare ρ .

Scelta dell'indice h .

Per quanto riguarda la scelta dell'indice h , ovvero di quale variabile fuori base modificare, il Metodo del Simpleso fa riferimento al fatto di cercare di determinare dei nuovi punti in cui la funzione obiettivo sia diminuita (o, al peggio non sia aumentata). In particolare il seguente teorema indica una scelta opportuna per l'indice h .

Teorema 1.8.9 *Data una matrice di base ammissibile B del problema (1.38). Sia \bar{x} la soluzione di base ammissibile associata e sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti. Se l'indice $h \in \{1, \dots, n - m\}$ è tale che*

$$\gamma_h \leq 0,$$

allora, il punto $x(\rho)$ definito dalla (1.46) con $\rho \geq 0$, ha un valore della funzione obiettivo non superiore a quello di \bar{x} , cioè

$$c^T x(\rho) \leq c^T \bar{x}.$$

Prova. Utilizzando l'espressione di $x_B(\rho)$ e di $x_N(\rho)$ date dalla (1.46), si ha:

$$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1}b + \gamma^T x_N(\rho) = c_B^T B^{-1}b + \rho \gamma^T e_h,$$

ricordando che $\gamma^T e_h = \gamma_h$ e che, per ipotesi, $\gamma_h \leq 0$, si ottiene:

$$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1}b + \rho \gamma_h \leq c_B^T B^{-1}b = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x}$$

e quindi che il valore della funzione obiettivo in $x(\rho)$ è minore o uguale al valore della funzione obiettivo in \bar{x} . \square

Una semplice conseguenza del precedente teorema è il seguente corollario.

Corollario 1.8.10 *Data una matrice di base ammissibile B del problema (1.38). Sia \bar{x} la soluzione di base ammissibile associata e sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti. Se l'indice $h \in \{1, \dots, n - m\}$ è tale che*

$$\gamma_h < 0,$$

allora, il punto $x(\rho)$ definito dalla (1.46) con $\rho > 0$, ha un valore della funzione obiettivo inferiore a quello di \bar{x} , cioè

$$c^T x(\rho) < c^T \bar{x}.$$

Scelta del valore dello scalare ρ .

Il valore dello scalare ρ , oltre ad indicare il valore della variabile fuori base scelta, influenza anche il valore delle variabili di base. Perciò nello scegliere il valore di ρ si deve prima di tutto tener conto della ammissibilità del punto prodotto $x(\rho)$.

Teorema 1.8.11 *Data una matrice di base ammissibile B del problema (1.38). Sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia h un indice tale che $\gamma_h < 0$ e sia $\bar{\rho}$ lo scalare dato da*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{\substack{i=1, \dots, m \\ \pi_{ih} > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih}} \right\}. \quad (1.47)$$

Allora, i punti $x(\rho)$ definiti dalla (1.46) con $\rho \in [0, \bar{\rho}]$, sono punti ammissibili per il problema (1.38).

Prova. Prima di tutto osserviamo che la (1.44) e la (1.45) implicano che il minimo al secondo membro della (1.47) è sempre ben definito. Per dimostrare che i punti $x(\rho)$ definiti dalla (1.46) con $\rho \in [0, \bar{\rho}]$, sono punti ammissibili per il problema (1.38), basta far vedere che soddisfano i vincoli del problema equivalente (1.39).

I vincoli di uguaglianza del problema (1.39) sono soddisfatti grazie alla particolare definizione del vettore $x_B(\rho)$. Poichè $\rho \geq 0$ anche il vincolo $x(\rho)_N = \rho e_h \geq 0_{n-m}$ è soddisfatto. Di conseguenza, $x(\rho)$ è una soluzione ammissibile del problema (1.38) o del problema (1.39) se soddisfa i rimanenti vincoli $x_B(\rho) \geq 0_{n-m}$. Cioè se ρ è una soluzione non negativa del sistema di disequazioni

$$\begin{aligned} x_B(\rho)_1 &= x_{j_1} = (B^{-1}b)_1 - \rho\pi_{1h} \geq 0 \\ &\vdots \\ x_B(\rho)_i &= x_{j_i} = (B^{-1}b)_i - \rho\pi_{ih} \geq 0 \\ &\vdots \\ x_B(\rho)_m &= x_{j_m} = (B^{-1}b)_m - \rho\pi_{mh} \geq 0, \end{aligned}$$

ovvero se ρ è una soluzione non negativa del sistema di disequazioni

$$\rho \pi_{ih} \leq (B^{-1}b)_i \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.48)$$

Dalla definizione di base ammissibile si ha che $(B^{-1}b)_i \geq 0$ e quindi che se $\pi_{ih} \leq 0$, allora ogni ρ non negativo soddisfa la disequazione i -esima.

Le possibili limitazioni su valori positivi di ρ nascono dalle disequazioni per cui $\pi_{ih} > 0$. Perciò $\rho \geq 0$ è una soluzione del sistema (1.48) se e solo se soddisfa tutte le disequazioni:

$$\rho \leq \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih}} \quad i = 1, \dots, m, \quad \pi_{ih} > 0. \quad (1.49)$$

Ma ρ soddisfa le disequazioni (1.49) se e solo se:

$$\rho \leq \bar{\rho} = \min_{\substack{i=1, \dots, m \\ \pi_{ih} > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih}} \right\}. \quad (1.50)$$

Da cui si ottiene che, per ogni $\rho \in [0, \bar{\rho}]$, la soluzione $x(\rho)$ è ammissibile per il problema (1.38). \square

Il precedente risultato identifica l'insieme di valori di ρ che determinano punti $x(\rho)$ ammissibili. Il passo successivo è quello di far vedere che il valore estremo $\bar{\rho}$ permette di identificare un punto $x(\bar{\rho})$ che è una soluzione di base ammissibile (e quindi un vertice) del problema (1.38). Per dimostrare tale risultato è opportuno richiamare prima un semplice lemma su insiemi di vettori linearmente indipendenti.

Lemma 1.8.12 *Siano v_1, v_2, \dots, v_m m vettori linearmente indipendenti, e sia w un vettore non nullo ottenuto combinando linearmente i vettori v_1, v_2, \dots, v_m , risulti cioè*

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \quad (1.51)$$

Se si sostituisce il vettore w a un vettore v_r tale che $\lambda_r \neq 0$ allora l'insieme di vettori $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}, w, v_{r+1}, \dots, v_m$ è linearmente indipendente.

Il prossimo teorema, oltre ad indicare che il punto $x(\bar{\rho})$ è una soluzione di base ammissibile, ne determina anche la matrice di base ammissibile associata.

Teorema 1.8.13 *Data una matrice di base ammissibile $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_k}, \dots, a_{j_m})$ del problema (1.38). Sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia h un indice tale che $\gamma_h < 0$ e siano $\bar{\rho}$ lo scalare e k l'indice dati da:*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{\substack{i=1, \dots, m \\ \pi_{ih} > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih}} \right\}. \quad (1.52)$$

Allora, il punto $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ (con $x(\rho)$ definito da (1.46)) è una soluzione di base ammissibile del problema (1.38) e la matrice di base ammissibile \tilde{B} associata è data da:

$$\tilde{B} = (a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, \dots, a_{j_m}). \quad (1.53)$$

Prova. (La prova non fa parte del programma dell'esame) Ricordando il Teorema 1.7.2 e il Teorema 1.7.13, il vettore $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ è una soluzione di base ammissibile del problema (1.38) se le colonne della matrice A corrispondenti a variabili positive di \tilde{x} , sono linearmente indipendenti.

Il primo passo per dimostrare l'indipendenza lineare delle colonne della matrice A corrispondenti a variabili positive di \tilde{x} è quello di individuare quali indici possono corrispondere a componenti positive del punto \tilde{x} . Dalla definizione di \tilde{x} , dalla (1.46) e dal Teorema 1.8.11, si ha:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{j_1} &= (\tilde{x}_B)_1 \geq 0 \\
&\vdots \\
\tilde{x}_{j_{k-1}} &= (\tilde{x}_B)_{k-1} \geq 0 \\
\tilde{x}_{j_k} &= (\tilde{x}_B)_k = (B^{-1}b)_k - \bar{\rho}\pi_{kh} = (B^{-1}b)_k - \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}}\pi_{kh} = 0 \\
\tilde{x}_{j_{k+1}} &= (\tilde{x}_B)_{k+1} \geq 0 \\
&\vdots \\
\tilde{x}_{j_m} &= (\tilde{x}_B)_m \geq 0 \\
\tilde{x}_{j_{m+1}} &= (\tilde{x}_N)_1 = 0 \\
&\vdots \\
\tilde{x}_{j_{m+h-1}} &= (\tilde{x}_N)_{h-1} = 0 \\
\tilde{x}_{j_{m+h}} &= (\tilde{x}_N)_h = \bar{\rho} \geq 0 \\
\tilde{x}_{j_{m+h+1}} &= (\tilde{x}_N)_{h+1} = 0 \\
&\vdots \\
\tilde{x}_{j_n} &= (\tilde{x}_N)_{n-m} = 0.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Dalle precedenti relazioni si ottiene

$$\{i : \tilde{x}_i > 0\} \subseteq \{j_1, \dots, j_{k-1}, j_{m+h}, j_{k+1}, \dots, j_m\}, \tag{1.55}$$

che, a sua volta, implica:

$$\{a_i, \text{ con } i : \tilde{x}_i > 0\} \subseteq \{a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, \dots, a_{j_m}\}. \tag{1.56}$$

Ricordando che $\pi_h = (B^{-1}N)_h = B^{-1}a_{j_{m+h}}$, ovvero $a_{j_{m+h}} = B\pi_h$, abbiamo che:

$$a_{j_{m+h}} = \sum_{i=1}^m \pi_{ih} a_{j_i}.$$

Poiché la matrice $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_k}, \dots, a_{j_m})$ è una base, le sue colonne sono linearmente indipendenti e poichè $\pi_{kh} > 0$ abbiamo, per il Lemma (1.8.12), che le colonne

$\{a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, \dots, a_{j_m}\}$ sono linearmente indipendenti e che, quindi, la matrice

$$\tilde{B} = \{a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, \dots, a_{j_m}\}$$

è una matrice di base di A .

Ricordando la (1.56), abbiamo che l'insieme delle colonne di A corrispondenti a variabili di $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ positive, essendo un sottoinsieme di $\{a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, \dots, a_{j_m}\}$, è costituito da vettori linearmente indipendenti e questo implica, come detto, che \tilde{x} è una soluzione di base ammissibile di (1.38).

Per completare la dimostrazione si deve dimostrare che la matrice \tilde{B} è la matrice di base ammissibile associata a \tilde{x} . Cioè si deve far vedere che

$$\tilde{B}^{-1}b \geq 0_m, \quad (1.57)$$

e che

$$\tilde{x} = \begin{cases} \tilde{x}_{\tilde{B}} = \tilde{B}^{-1}b \\ \tilde{x}_{\tilde{N}} = 0_{n-m}, \end{cases} \quad (1.58)$$

dove

$$\tilde{x}_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{j_1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_{k-1}} \\ \tilde{x}_{j_{m+h}} \\ \tilde{x}_{j_{k+1}} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_m} \end{pmatrix} \quad \tilde{x}_{\tilde{N}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{j_{m+1}} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_{m+h-1}} \\ \tilde{x}_{j_k} \\ \tilde{x}_{j_{m+h+1}} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_n} \end{pmatrix}. \quad (1.59)$$

Avendo già dimostrato che \tilde{x} è un vertice, segue che \tilde{x} soddisfa i vincoli del problema (1.38):

$$A\tilde{x} = \tilde{B}\tilde{x}_{\tilde{B}} + \tilde{N}\tilde{x}_{\tilde{N}} = b \quad (1.60)$$

$$\tilde{x}_{\tilde{B}} \geq 0, \quad \tilde{x}_{\tilde{N}} \geq 0. \quad (1.61)$$

Utilizzando (1.54) e (1.59) si ottiene:

$$\tilde{x}_{\tilde{N}} = 0_{n-m}. \quad (1.62)$$

Dalle (1.62) e (1.60) si ha:

$$\tilde{x}_{\tilde{B}} = \tilde{B}^{-1}b \geq 0_m. \quad (1.63)$$

Quindi la (1.62) e la (1.63), implicando la (1.57) e la (1.58), completano la dimostrazione del teorema. \square

Osservazione L'unione dei risultati forniti dal Teorema 1.8.9, dal Teorema 1.8.11 e dal Teorema 1.8.13 può essere interpretata: supponiamo di avere una base ammissibile B e supponiamo che non sia soddisfatto il criterio di ottimalità né quello di illimitatezza.

Allora, se si considera una nuova soluzione di base corrispondente alla base \tilde{B} ottenuta facendo entrare nella base B una qualunque variabile alla quale è associato un costo ridotto negativo e facendo uscire una variabile scelta secondo il criterio del rapporto minimo (1.47) indicato dal Teorema 1.8.13, questa nuova soluzione è ammissibile e ha un valore della funzione obiettivo non superiore a quello della soluzione di base precedente.

Osservazione Nel criterio del rapporto minimo (1.47) il minimo può essere raggiunto in corrispondenza a più di un indice, ovvero l'indice k può non essere univocamente determinato. In questo caso si può fare uscire dalla base una qualunque delle variabili in corrispondenza alle quali si è raggiunto il minimo. È facile verificare che in questo caso la nuova soluzione di base è degenera. Più precisamente saranno nulle tutte le componenti della soluzione di base corrispondenti agli indici per cui si è raggiunto il minimo nella (1.47) (oltre, ovviamente alle componenti non in base).

Osservazione Dal criterio del rapporto minimo (1.47) si deduce che $\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}}$ è nullo se e solo se $(B^{-1}b)_k = 0$. Di conseguenza, una *condizione necessaria* per avere $\bar{\rho} = 0$ è che risulti $(B^{-1}b)_i = 0$ per qualche indice i , ovvero che la soluzione \bar{x} associata alla base B sia *degenera*. In tal caso, dalla (1.46) e dalla (1.54)

si ha che la k -esima componente di \tilde{x}_B e l' h -esima componente di \tilde{x}_N hanno entrambe valore zero. Pertanto, il vettore \tilde{x} , ottenuto da \tilde{x} scambiando tali componenti, coincide con \bar{x} , ovvero

$$\tilde{x} = \bar{x}.$$

Si osservi inoltre che in questo caso la nuova soluzione di base ammissibile coincide con la vecchia mentre la nuova base ammissibile \tilde{B} è diversa dalla vecchia base B .

A questo punto sorge naturale chiedersi se la condizione $(B^{-1}b)_i = 0$ per qualche indice i , ovvero che la soluzione è degenera, è anche una *condizione sufficiente* affinché $\bar{\rho}$ sia nullo. La risposta è negativa: infatti è possibile che il valore $\bar{\rho}$ sia diverso da zero in corrispondenza ad una soluzione degenera. Dalla definizione di $\bar{\rho}$ data dalla (1.47) si deduce che tale situazione si verifica quando ad ogni componente nulla del vettore $B^{-1}b$, corrisponde una componente *non positiva* di π_h , ovvero $\pi_{ih} \leq 0$.

Dalla precedenti osservazioni segue il seguente corollario del Teorema 1.8.13

Corollario 1.8.14 *Sia B una matrice di base ammissibile del problema (1.38) associata ad un vertice \bar{x} non degenera. Sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia h un indice tale che $\gamma_h < 0$ e siano $\bar{\rho}$ lo scalare e k l'indice dati da:*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ \pi_{ih} > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih}} \right\}.$$

Allora, il punto $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ (con $x(\rho)$ definito da (1.46)) è una soluzione di base ammissibile del problema (1.38) tale che:

$$c^T \tilde{x} < c^T \bar{x}.$$

1.8.5 Calcolo della nuova forma canonica

I teoremi visti nel paragrafo precedente mostrano che, data una base ammissibile B , se non è verificato il criterio sufficiente di ottimalità né quello sufficiente di illimitatezza è sempre possibile determinare una nuova base ammissibile \tilde{B} , data dalla (1.53), a cui corrisponde un vertice con un valore della funzione obiettivo non superiore rispetto al valore precedente. In linea di principio possiamo a questo punto calcolare *ex novo* \tilde{B}^{-1} , e quindi $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ e $\tilde{B}^{-1}b$ che sono le quantità necessarie per calcolare il nuovo vertice ed effettuare i nuovi test di ottimalità e di illimitatezza. Questa procedura non è però realizzabile in pratica se non per problemi di piccole dimensioni. Infatti, per calcolare l'inversa di una matrice quadrata $m \times m$ (quale è la \tilde{B}) occorre eseguire un numero di moltiplicazioni approssimativamente proporzionale a m^3 , e questo numero diventa praticamente eccessivo per molti problemi che si incontrano nella pratica. Bisogna inoltre tenere conto che nel risolvere un problema di PL bisogna passare, in genere, per molte basi prima di arrivare l'ottimo; bisognerebbe cioè calcolare molte inverse per risolvere un singolo problema. Questa considerazione ci spingono a porci il problema se sia possibile calcolare in maniera più semplice, a partire da B^{-1} , $B^{-1}N$ e $B^{-1}b$, le analoghe quantità nell'iterazione successiva: \tilde{B}^{-1} , $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ e $\tilde{B}^{-1}b$. La risposta è affermativa, e per avere un'idea intuitiva di come ciò sia possibile si può notare che questo problema è equivalente a passare in maniera efficiente dalla forma canonica rispetto alla matrice di base ammissibile B del problema (1.38):

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ I_m x_B + B^{-1}N x_N &= B^{-1}b \\ x_B \geq 0_m, \quad x_N &\geq 0_{n-m}. \end{aligned} \tag{1.64}$$

alla forma canonica rispetto alla nuova matrice di base ammissibile \tilde{B} :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ I_m x_{\tilde{B}} + \tilde{B}^{-1}\tilde{N} x_{\tilde{N}} &= \tilde{B}^{-1}b \\ x_{\tilde{B}} \geq 0_m, \quad x_{\tilde{N}} &\geq 0_{n-m}. \end{aligned} \tag{1.65}$$

in cui compaiono la matrice $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ ed il vettore $\tilde{B}^{-1}b$.

Per notare meglio le differenze tra le due precedenti forme canoniche, conviene riscrivere la forma canonica (1.64) in funzione dei sottovettori $x_{\tilde{B}}$, $x_{\tilde{N}}$ (che, ricordiamo, si ottengono dai vettori x_B , x_N scambiando la k -esima componente in base con l' h -esima componente fuori base).

Indicando, come al solito, con e_i , con $i = 1, \dots, m$, i versori unitari m -dimensionali e con π_i , con $i = 1, \dots, n - m$, le colonne della matrice $B^{-1}N$, la forma canonica (1.64) può essere riscritta nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_m \end{pmatrix} x_B + \begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_{n-m} \end{pmatrix} x_N &= B^{-1}b \\ x_B \geq 0_m, \quad x_N &\geq 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Esplicitando i prodotti matrici-vettori dei vincoli di uguaglianza, si ottiene:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & e_1 x_{j_1} + \dots + e_k x_{j_k} + \dots + e_m x_{j_m} + \pi_1 x_{j_{m+1}} + \dots + \pi_h x_{j_{m+h}} + \dots + \pi_{n-m} x_{j_n} = B^{-1} b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Scambiando le posizioni dei termini $e_k x_{j_k}$ e $\pi_h x_{j_{m+h}}$ si ha:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & e_1 x_{j_1} + \dots + \pi_h x_{j_{m+h}} + \dots + e_m x_{j_m} + \pi_1 x_{j_{m+1}} + \dots + e_k x_{j_k} + \dots + \pi_{n-m} x_{j_n} = B^{-1} b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned}$$

utilizzando i sottovettori $x_{\tilde{B}}$, $x_{\tilde{N}}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_{k-1} & \pi_h & e_{k+1} & \cdots & e_m \end{pmatrix} x_{\tilde{B}} + \begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_{h-1} & e_k & \pi_{h+1} & \cdots & \pi_{n-m} \end{pmatrix} x_{\tilde{N}} = B^{-1} b \\ & x_{\tilde{B}} \geq 0_m, \quad x_{\tilde{N}} \geq 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Da questa formulazione si può ottenere la forma canonica (1.65), effettuando un'operazione sui vincoli di uguaglianza che permetta di ottenere un sistema lineare *equivalente* in cui le colonne e_i , con $i = 1, \dots, m$ e $i \neq k$, siano rimaste immutate e la colonna π_h sia trasformata nel versore e_k . Come è noto premoltiplicando i termini di destra e di sinistra di un sistema di equazioni con un matrice invertibile si ottiene un sistema *equivalente*, ovvero un sistema che ha le stesse soluzioni.

Sulla base delle precedenti considerazioni, introduciamo la seguente matrice $m \times m$, detta *matrice di pivot* che è descritta da:

$$T = I_m + \frac{1}{\pi_{kh}} (e_k - \pi_h) e_k^T \quad (1.66)$$

oppure svolgendo i prodotti matriciali assume la forma:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -\pi_{1h}/\pi_{kh} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -\pi_{2h}/\pi_{kh} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\pi_{k-1h}/\pi_{kh} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\pi_{kh} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\pi_{k+1h}/\pi_{kh} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\pi_{m-1h}/\pi_{kh} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\pi_{mh}/\pi_{kh} & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

↑
 k - esima colonna

Notiamo che la matrice T è ottenuta dalla matrice identità $m \times m$, sostituendo alla k -esima colonna, una colonna ottenibile a partire dagli elementi della h -esima colonna della matrice $B^{-1}N$. L'elemento π_{kh} viene detto *elemento di pivot*.

Grazie alla sua espressione, la matrice T presenta interessanti proprietà. Alcune di queste sono descritte dal seguente teorema.

Teorema 1.8.15 *Sia T la matrice data dalla (1.66) o dalla (1.67). La matrice T è invertibile ed è tale che:*

$$Te_i = e_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq k, \quad (1.68)$$

$$T\pi_h = e_k. \quad (1.69)$$

Prova. (La prova non fa parte del programma dell'esame) Il fatto che sia invertibile si può provare osservando che la sua inversa è data da:

$$T^{-1} = I_m - (e_k - \pi_h) e_k^T$$

ovvero

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \pi_{1h} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pi_{kh} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pi_{mh} & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.70)$$

↑
 k - esima colonna

Le proprietà (1.68) e (1.69), possono essere provate utilizzando l'espressione (1.67) e svolgendo i prodotti corrispondenti. Mentre, utilizzando l'espressione (1.66), basta ricordare che $e_k^T e_i = 0$, per $k \neq i$, e che $e_k^T \pi_h = \pi_{kh}$ per ottenere:

$$Te_i = e_i + \frac{1}{\pi_{kh}} (e_k - \pi_h) e_k^T e_i = e_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq k,$$

$$T\pi_h = \pi_h + \frac{1}{\pi_{kh}} (e_k - \pi_h) e_k^T \pi_h = e_k.$$

□

Il prossimo teorema mostra che la matrice T permette di calcolare efficientemente la matrice \tilde{B}^{-1} a partire dalla matrice B^{-1} .

Teorema 1.8.16 *Sia T la matrice data dalla (1.66) o dalla (1.67). Allora si ha:*

$$\tilde{B}^{-1} = TB^{-1} \quad (1.71)$$

Prova. (Questa prova non fa parte del programma dell'esame)

La dimostrazione è per verifica. Faremo cioè vedere che

$$TB^{-1}\tilde{B} = I_m.$$

Verifichiamo questa uguaglianza “per colonne”. Mostriamo cioè che

$$(TB^{-1}\tilde{B})_i = e_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.72)$$

Se $i \neq k$ possiamo scrivere, tenendo conto che l'unica colonna della base a essere cambiata è la k -esima, $(B)_i = a_{j_i} = (\tilde{B})_i$. Quindi, tenendo anche conto che, dalla definizione di matrice inversa, si ha $e_i = (B^{-1}B)_i = B^{-1}(B)_i = B^{-1}a_{j_i}$ ed utilizzando la proprietà (1.68) di T , abbiamo

$$(TB^{-1}\tilde{B})_i = TB^{-1}(\tilde{B})_i = TB^{-1}a_{j_i} = Te_i = e_i,$$

che dimostra la (1.72) per $i = 1, \dots, m$, e $i \neq k$.

Quindi rimane da dimostrare la ((1.72)) solo per $i = k$. In questo caso possiamo scrivere, tenendo conto che avendo fatto entrare in base l' h -esima variabile non in base abbiamo $(\tilde{B}_k) = a_{j_{m+h}}$ e sfruttando la proprietà (1.69) di T si ottiene:

$$(TB^{-1}\tilde{B})_k = TB^{-1}(\tilde{B})_k = TB^{-1}a_{j_{m+h}} = T(B^{-1}N)_h = T\pi_h = e_k,$$

che completa la dimostrazione del teorema. □

Il prossimo teorema mostra che, attraverso la matrice T , si possono calcolare direttamente il vettore $\tilde{B}^{-1}b$ e la matrice $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ senza utilizzare (e quindi senza costruire e memorizzare) la matrice \tilde{B}^{-1} .

Teorema 1.8.17 *Sia T la matrice data dalla (1.66) o dalla (1.67). Allora si ha:*

$$\tilde{B}^{-1}b = T(B^{-1}b) \quad (1.73)$$

$$\tilde{B}^{-1}\tilde{N} = T(\pi_1, \dots, \pi_{h-1}, e_k, \pi_{h+1}, \dots, \pi_{n-m}). \quad (1.74)$$

Prova. (Questa prova non fa parte del programma dell'esame)

La proprietà (1.73) segue dal Teorema 1.8.16, infatti possiamo scrivere:

$$T(B^{-1}b) = (TB^{-1})b = \tilde{B}^{-1}b.$$

Per quanto riguarda la proprietà (1.74), ricordando che $\pi_i = (B^{-1}N)_i = B^{-1}(N)_i = B^{-1}a_{j_{m+i}}$ per $i = 1, \dots, n - m$, e che $B^{-1}a_{j_k} = e_k$ per definizione di matrice inversa, possiamo scrivere

$$(\pi_1, \dots, \pi_{h-1}, e_k, \pi_{h+1}, \dots, \pi_{n-m}) = (B^{-1}a_{j_{m+1}}, \dots, B^{-1}a_{j_k}, \dots, B^{-1}a_{j_n}) \quad (1.75)$$

ovvero, poichè $\tilde{N} = (a_{j_{m+1}}, \dots, a_{j_k}, \dots, a_{j_n})$:

$$(\pi_1, \dots, \pi_{h-1}, e_k, \pi_{h+1}, \dots, \pi_{n-m}) = B^{-1}\tilde{N}. \quad (1.76)$$

Ma allora, utilizzando il Teorema 1.8.16 e moltiplicando ambo i membri della (1.76) per T , abbiamo

$$T(\pi_1, \dots, \pi_{h-1}, e_k, \pi_{h+1}, \dots, \pi_{n-m}) = (TB^{-1})\tilde{N} = \tilde{B}^{-1}\tilde{N},$$

che è quanto volevamo dimostrare. \square

Una conseguenza immediata del precedente teorema e della proprietà (1.69) è il seguente corollario.

Corollario 1.8.18 *Sia T la matrice data dalla (1.66) o dalla (1.67). Allora si ha:*

$$(e_k \mid \tilde{B}^{-1}\tilde{N} \mid \tilde{B}^{-1}b) = T(\pi_h \mid \pi_1 \cdots \pi_{h-1} e_k \pi_{h+1} \cdots \pi_{n-m} \mid B^{-1}b). \quad (1.77)$$

Il precedente corollario e la particolare struttura della matrice T mostrano che il vettore $\tilde{B}^{-1}b$ e la matrice $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ possono essere ottenute effettuando alcune semplici operazioni sulle righe della matrice:

$$M = (\pi_h \mid \pi_1 \cdots \pi_{h-1} e_k \pi_{h+1} \cdots \pi_{n-m} \mid B^{-1}b).$$

Infatti sia \tilde{M} la matrice data da:

$$\tilde{M} = (e_k \mid \tilde{B}^{-1}\tilde{N} \mid \tilde{B}^{-1}b),$$

e siano m_i, \tilde{m}_i, t_i , con $i = 1, \dots, m$, i vettori costituiti dalla righe di M, \tilde{M} e T . Dal Corollario 1.8.18 si ha l'uguaglianza:

$$\tilde{M} = TM$$

che, espressa per righe, è equivalente a:

$$\tilde{m}_i^T = t_i^T \begin{pmatrix} m_1^T \\ \vdots \\ m_k^T \\ \vdots \\ m_m^T \end{pmatrix} \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, m.$$

Tenendo conto della struttura di T si ottiene:

$$\tilde{m}_i^T = \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -\frac{\pi_{ih}}{\pi_{kh}}, 0, \dots, 0, \dots, 0 \right) \begin{pmatrix} m_1^T \\ \vdots \\ m_k^T \\ \vdots \\ m_m^T \end{pmatrix} \quad \text{per} \quad i < k$$

\uparrow
 i - esima componente

$$\tilde{m}_k^T = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{\pi_{kh}}, 0, \dots, 0 \right) \begin{pmatrix} m_1^T \\ \vdots \\ m_k^T \\ \vdots \\ m_m^T \end{pmatrix} \quad \text{per } i = k$$

$$\tilde{m}_i^T = \left(0, \dots, 0, -\frac{\pi_{ih}}{\pi_{kh}}, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 \right) \begin{pmatrix} m_1^T \\ \vdots \\ m_k^T \\ \vdots \\ m_m^T \end{pmatrix} \quad \text{per } i > k.$$

Effettuando i prodotti matriciali, le precedenti uguaglianze possono essere riassunte in

$$\begin{aligned} \tilde{m}_k^T &= \frac{1}{\pi_{kh}} m_k^T \\ \tilde{m}_i^T &= m_i^T - \pi_{ih} \tilde{m}_k^T \quad \text{per } i \neq k. \end{aligned}$$

Riassumendo si parte dalla matrice M e si effettua la seguente *operazione di pivot*⁶ sull'elemento π_{kh} :

- (a) si divide la riga k -esima di M per π_{kh} ;
- (b) si somma a ciascuna riga i -esima di M (con $i \neq k$), la riga k -esima ottenuta al precedente punto (a) moltiplicata per l'elemento $-\pi_{ih}$

Al termine di questa operazione si ottiene la matrice

$$\left(e_k \mid \tilde{B}^{-1} \tilde{N} \mid \tilde{B}^{-1} b \right).$$

⁶Lo studente riconoscerà in questa operazione la procedura base del metodo di eliminazione di Gauss-Jordan per la soluzione di sistemi di equazioni lineari

Metodo del simplesso

P1: *Calcolo del vettore dei costi ridotti*

- Calcolare il vettore $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$

P2: *Verifica del criterio di ottimalità*

- se per ogni $i \in \{1, \dots, n - m\}$, risulta $\gamma_i \geq 0$, allora la soluzione corrente $\bar{x}_B = B^{-1}b$, $\bar{x}_N = 0_{n-m}$ è ottima. – STOP

P3: *Verifica del criterio di illimitatezza*

- se per qualche $i \in \{1, \dots, n - m\}$, tale che $\gamma_i < 0$ risulta $\pi_i \leq 0$ allora il problema è illimitato inferiormente. – STOP

P4: *Costruzione di una nuova base ammissibile*

- selezionare un indice $h \in \{1, \dots, n - m\}$ tale che $\gamma_h < 0$;
l' h -esima variabile fuori base, ovvero $x_{j_{m+h}}$, entra in base.
- calcolare l'indice k attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{\substack{i=1, \dots, m \\ \pi_{ih} > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih}} \right\};$$

la k -esima variabile in base, ovvero x_{j_k} , esce dalla base.

- costruire le matrici \tilde{B} e \tilde{N} a partire da B e N scambiando fra loro l' h -esima colonna di N , ovvero $a_{j_{m+h}}$ con la k -esima colonna di B , ovvero a_{j_k} .
- costruire i nuovi vettori $x_{\tilde{B}}$, $x_{\tilde{N}}$, $c_{\tilde{B}}$ e $c_{\tilde{N}}$.

P5: *Costruzione di una nuova forma canonica*

- calcolare le grandezze rilevanti, relative alla nuova base \tilde{B} , ovvero $\tilde{B}^{-1}b$ e $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ attraverso un'operazione di *pivot*, e definire la nuova forma canonica rispetto alla nuova base \tilde{B} ed effettuare una nuova iterazione.

Esempio 1.8.19 Risolvere applicando la fase II del metodo del simplesso il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Il problema è in forma standard ed inoltre si dispone della base $B_0 = I$ data dalle colonne 4, 5, 6, quindi il problema è in forma canonica rispetto alle variabili x_4, x_5, x_6 , ovvero:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1} \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = B_0^{-1}N_0$$

$$x_{B_0} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad x_{N_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Iterazione 0

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_0^T = (1 \ 2 \ 1) - (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 1) - (4 \ 3 \ -3) = (-3 \ -1 \ 4)$$

Verifica del criterio di ottimalità:

Poiché esistono componenti di γ negative la verifica è fallita.

Verifica del criterio di illimitatezza:

Poiché non risulta $\pi_1 \leq 0$, o $\pi_2 \leq 0$ la verifica è fallita.

Costruzione nuova base ammissibile:

Variabile entrante: si sceglie l'indice h corrispondente al costo ridotto negativo minore ovvero $h = 1$ in quanto $\gamma_1 = -3 < -1 = \gamma_2$; quindi entra in base la prima variabile

fuori base, ovvero x_1 .

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,\dots,3 \\ \pi_{i1} > 0}} \left\{ \frac{(B_0^{-1}b)_i}{\pi_{i1}} \right\} = \min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \right\} = \frac{(B_0^{-1}b)_2}{\pi_{21}} = 1$$

si determina $k = 2$ e quindi la seconda variabile in base esce dalla base, ovvero x_5 .

Nuova base:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_{B_1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad x_{N_1} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Costruzione nuova forma canonica:

si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$(\pi_1 \mid e_2 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \mid B_0^{-1}b)$$

ovvero

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ \mathbf{2} & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_h)_k = (\pi_1)_2 = 2$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & -1/2 & 5/2 & 11/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & 3/2 & 0 \end{array} \right)$$

ovvero

$$(e_2 \mid B_1^{-1}N_1 \mid B_1^{-1}b).$$

Quindi la nuova forma canonica è

$$\min (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Iterazione 1

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_1^T = (1 \ 2 \ 1) - (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 1) - (-1/2 \ 9/2 \ 9/2) = (3/2 \ -5/2 \ -7/2)$$

Verifica del criterio di ottimalità:

Poiché esistono componenti di γ negative la verifica è fallita.

Verifica del criterio di illimitatezza:

Poiché non risulta $\pi_2 \leq 0$, o $\pi_3 \leq 0$ la verifica è fallita.

Costruzione nuova base ammissibile:

Variabile entrante: si sceglie l'indice h corrispondente al costo ridotto negativo minore ovvero $h = 3$ in quanto $\gamma_3 = -7/2 < -5/2 = \gamma_2$; quindi entra in base la terza variabile fuori base, ovvero x_3 .

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,\dots,3 \\ \pi_{i3} > 0}} \left\{ \frac{(B_1^{-1}b)_i}{\pi_{i3}} \right\} = \min \left\{ \frac{2}{11/2}, \frac{0}{3/2} \right\} = \frac{(B_1^{-1}b)_3}{\pi_{33}} = 0 \quad (1.78)$$

si determina $k = 3$ e quindi la terza variabile in base esce dalla base, ovvero x_6 .

Nuova base:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_{B_2} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_{N_2} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Costruzione nuova forma canonica:

si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$(\pi_3 \mid \pi_1 \ \pi_2 \ e_3 \mid B_1^{-1}b)$$

ovvero

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 11/2 & -1/2 & 5/2 & 0 & 2 \\ -5/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ \mathbf{3/2} & -1/2 & 5/2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_h)_k = (\pi_3)_3 = 3/2$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4/3 & -20/3 & -11/3 & 2 \\ 0 & -1/3 & 11/3 & 5/3 & 1 \\ 1 & -1/3 & 5/3 & 2/3 & 0 \end{array} \right)$$

ovvero

$$(e_3 \mid B_2^{-1}N_2 \mid B_2^{-1}b).$$

Quindi la nuova forma canonica è

$$\begin{aligned} \min \quad & (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Iterazione 2

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_2^T = (1 \ 2 \ 1) - (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 1) - (2/3 \ -4/3 \ -4/3) = (1/3 \ 10/3 \ 7/2)$$

Verifica del criterio di ottimalità:

Poiché risulta $\gamma_2 > 0$ il criterio di ottimalità è soddisfatto e quindi la soluzione

$$\bar{x}^* = (1, 0, 0, 2, 0, 0)^T$$

è soluzione ottima del problema ed è l'unica soluzione ottima poichè il vettore dei costi ridotti ha tutte le componenti positive. \square

Osservazione Nella prima iterazione del precedente Esempio 1.8.19, dal criterio del rapporto minimo (1.78) si è ottenuto il valore zero ($\bar{\rho} = 0$). In questo caso $x_{B_1} = (2, 1, 0)^T$ è una soluzione base ammissibile degenera e che la successiva soluzione base ammissibile rimane invariata pur essendo stato effettuato un cambio di base; ed infatti si ha $x_{B_2} = (2, 1, 0)^T$. In questa situazione si parla di iterazione degenera.

Esempio 1.8.20 Risolvere applicando la fase II del metodo del simplesso e utilizzando la costruzione esplicita della matrice di pivot T , il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ & x_1 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ & x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Si può applicare la fase II del metodo del simplesso in quanto il problema è in forma canonica. Infatti si può scrivere:

$$\begin{aligned} \min \quad & (3 \ 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (1 \ 1) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

La base iniziale è $B_0 = I$; $x_{B_0} = (x_1 \ x_2)^T$ e $x_{N_0} = (x_3 \ x_4)^T$.

Iterazione 0.

Calcolo dei costi ridotti.

Si calcolano i coefficienti di costo ridotto

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Verifica del criterio di ottimalità.

Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$ e quindi il criterio è fallito.

Verifica criterio di illimitatezza.

La colonna $\pi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \not\leq 0$; il criterio è fallito.

Costruzione nuova base ammissibile.

Variabile entrante: c'è un unico costo ridotto negativo -3 , e quindi si sceglie $h = 2$ che corrisponde alla variabile x_4 che entra in base.

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,2 \\ \pi_{i2} > 0}} \left\{ \frac{(B_0)^{-1}b)_i}{\pi_{i2}} \right\} = \frac{5}{2}$$

che corrisponde alla variabile x_1 e $k = 1$.

I nuovi vettori delle variabili di base e fuori base sono:

$$x_{B_1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad x_{N_1} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad c_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c_{N_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a cui corrispondono le nuove matrici:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcola la matrice

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ottiene quindi

$$B_1^{-1}N_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$
$$B_1^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 11/2 \end{pmatrix}$$

Iterazione 1

Calcolo costi ridotti.

Si calcolano i coefficienti di costo ridotto

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Verifica criterio di ottimalità.

Risulta $\gamma_1 \not\geq 0$ e quindi la verifica fallisce.

Verifica criterio di illimitatezza.

Risulta $\pi_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \not\leq 0$ e quindi la verifica fallisce.

Costruzione nuova base ammissibile.

Variabile entrante: c'è un unico costo ridotto negativo $-3/2$, e quindi $h = 1$ che corrisponde alla variabile x_3 che entra in base.

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,2 \\ \pi_{i1} > 0}} \left\{ \frac{((B_1)^{-1}b)_i}{\pi_{i1}} \right\} = \frac{((B_1)^{-1}b)_2}{\pi_{21}} = \frac{11}{3}$$

che quindi corrisponde a scegliere $k = 2$ e quindi la variabile x_2 esce dalla base.

Quindi

$$x_{B_2} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_{N_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad c_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_{N_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e le corrispondenti matrici di base e fuori base:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcola la matrice

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Si ottiene

$$(B_2)^{-1}N_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

e

$$(B_2)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/3 \\ 11/3 \end{pmatrix}$$

Iterazione 2

Calcolo costi ridotti.

Si ha

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verifica criterio di ottimalità.

Poichè i costi ridotti sono tutti positivi, la soluzione trovata è ottima.

Si ha quindi

$$x_1^* = x_2^* = 0, \quad x_3^* = 11/3 \quad x_4^* = 13/3$$

con valore della funzione obiettivo $z(x^*) = 8$. La base ottima è $B^* = B^2$ e la soluzione trovata è unica poiché i costi ridotti sono strettamente positivi. \square

1.8.6 Convergenza del metodo del simplesso

Per concludere l'analisi del metodo del simplesso, vogliamo ora mostrare che, sotto opportune ipotesi, il numero di iterazioni è finito, ovvero che, in un numero finito di iterazioni, l'algoritmo descritto nei paragrafi precedenti *converge* alla soluzione ottima del problema iniziale o conclude che il problema è illimitato inferiormente. A tale scopo notiamo che, nelle ipotesi che abbiamo finora adottato (il problema lineare è ammissibile e il rango della matrice A è m) sappiamo che il numero di basi ammissibili per il problema è finito e maggiore o uguale a 1 (perché il poliedro del problema in forma standard ammette almeno un vertice, essendo non vuoto e non contenendo rette). Il principale risultato sulla convergenza II del metodo del simplesso è il seguente.

Teorema 1.8.21 *Se nell'applicazione del metodo del simplesso non viene mai generata due volte la stessa base (cioè se nessuna base si ripete nella sequenza delle basi prodotte dal metodo), allora esiste un indice $t \geq 1$ tale che la base B_t nella sequenza prodotta dal metodo soddisfa il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza.*

Prova. Come abbiamo più volte osservato, ad ogni iterazione, se i criteri di arresto e di illimitatezza non sono verificati, il metodo è in grado di generare una nuova base ammissibile differente da quella corrente. D'altra parte, siccome le basi sono in numero finito, e abbiamo fatto l'ipotesi che non ci siano ripetizioni, dopo un numero finito di passi (pari al più al numero di basi ammissibili distinte del problema) non potranno più essere generate basi diverse da tutte le precedenti. Dunque, necessariamente, o il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza devono essere soddisfatti. \square

È appena il caso di osservare che, nelle ipotesi di questo teorema, il metodo del simplesso termina una volta raggiunta la base B_t con il soddisfacimento del criterio di ottimalità o del criterio di illimitatezza. Un caso semplice (poco frequente nelle applicazioni reali) in cui si può garantire che non ci sono ripetizioni di basi è quello in cui tutte le soluzioni di base siano *non degeneri*. In questo caso infatti, il Corollario 1.8.14 ci assicura che ad ogni cambio di base corrisponde una *diminuzione* del valore della funzione obiettivo. È allora chiaro che non ci possono essere ripetizioni di base, perché questo implicherebbe che in qualche iterazione viene generata una nuova base il cui valore è *maggiore* del valore della base precedente. Questa osservazione ci permette di enunciare, senza bisogno di ulteriori dimostrazioni, il seguente corollario.

Corollario 1.8.22 *Se ogni soluzione di base ammissibile del problema (1.38) è non degenera allora, in un numero finito di passi, il metodo del simplesso converge alla soluzione ottima o conclude che il problema è illimitato inferiormente.*

Se il problema lineare ammette SBA degeneri, è possibile che il metodo del simplesso generi una sequenza di basi ammissibili $\{B_1, \dots, B_q\}$ ($q > 1$) con $B_1 = B_q$. Ovviamente affinché ciò sia possibile è evidente che (visto che il valore della funzione obiettivo ad ogni cambio di fase non cresce) deve risultare che il valore della funzione obiettivo in ogni base $\{B_1, \dots, B_q\}$ è costante. A sua volta, ciò è possibile solamente se ad ogni iterazione $\bar{\rho} = 0$. Questo vuol quindi dire che, nella situazione appena descritta, le basi $\{B_1, \dots, B_q\}$

corrispondono tutte allo stesso vertice (degenere). In tale situazione, se usiamo un qualsiasi criterio deterministico per la scelta della variabile entrante e della variabile uscente, l'algoritmo genererà la stessa sequenza di basi ammissibili indefinitamente. Tale situazione viene detta di *ciclaggio*, ed è illustrata dal seguente esempio, dovuto a Beale.

Esempio 1.8.23 Si consideri il problema

$$\begin{array}{rccccrcr}
 \min & & \frac{3}{4}x_4 & +20x_5, & -\frac{1}{2}x_6 & +6x_7 & & \\
 & x_1 & +\frac{1}{4}x_4 & -8x_5 & -x_6 & +9x_7 & = 0 & \\
 & x_2 & +\frac{1}{2}x_4 & -12x_5 & -\frac{1}{2}x_6 & +3x_7 & = 0 & (1.79) \\
 & x_3 & & & +x_6 & & = 1 & \\
 & & & & & & & x \geq 0
 \end{array}$$

Indicando con a_i , $i = 1, \dots, 7$, le colonne della matrice dei vincoli di uguaglianza del problema (1.79), la base ottima di questo problema è (a_1, a_2, a_6) (si lascia al lettore la verifica del test di ottimalità). Supponiamo ora di applicare il metodo del simplesso a partire dalla base ammissibile ovvia (a_1, a_2, a_3) . Si tratta ovviamente di una base degenera in quanto $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Supponiamo ora di applicare il metodo del simplesso scegliendo ad ogni iterazione l'indice h della variabile entrante per il quale il coefficiente di costo ridotto è minimo e l'indice k della variabile uscente il più piccolo tra quelli possibili (ad ogni iterazione ci sono una o due scelte possibili per k). Il lettore può verificare che con queste scelte (molto naturali, e coerenti con le scelte usate in classe per la risoluzione degli esercizi) viene generata la seguente successione di basi

$$\begin{array}{l}
 (a_1, a_2, a_3), \quad (a_4, a_2, a_3), \quad (a_4, a_5, a_3), \\
 (a_6, a_5, a_3), \quad (a_6, a_7, a_3), \quad (a_1, a_7, a_3), \quad (a_1, a_2, a_3).
 \end{array}$$

Si tratta di una serie di basi degeneri tutte corrispondenti allo stesso vertice. La cosa importante da notare è che l'ultima base indicata coincide con la prima. Quindi è chiaro che (se non si cambiano i criteri di scelta di h e k) da questo punto in poi, il metodo non farà altro che ripetere indefinitamente la stessa successione di basi senza mai raggiungere la base ottima.

Quindi, nel caso (più frequente nelle applicazioni) in cui esistano SBA degeneri, il Metodo del Simplex, così come descritto prima, può non convergere, ovvero può produrre una sequenza infinita di basi ammissibili senza mai verificare uno dei due criteri di arresto.

Questa situazione indesiderata può essere risolta sfruttando la libertà esistente nel metodo nella scelta di h e k . È possibile definire opportune *regole anti ciclaggio* per la selezione di questi indici quando ci sia più di una variabile candidata ad entrare o uscire. Utilizzando queste regole si può garantire *in ogni caso* che il metodo del simplesso converga in un numero finito di passi. È da notare, però, che spesso queste regole non vengono applicate in pratica, perchè eccessivamente onerose e il metodo

del simplesso viene applicato esattamente così come lo abbiamo descritto. La pratica mostra che i casi in cui, pur non applicando nessuna regola anti ciclaggio, l'algoritmo non converge (cicla) sono rari. Inoltre, nel momento in cui ci si rende conto di trovarsi in una di queste rare situazioni è sempre possibile applicare le regole anti ciclaggio (anche ad algoritmo già iniziato). La discussione della reale implementazione pratica del metodo del simplesso è però argomento molto complesso e non può essere qui trattata in dettaglio. Ci limitiamo a riportare una delle più famose e semplici regole anti ciclaggio, la regola di Bland.

Regola anti ciclaggio di Bland: *Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad entrare in base si sceglie quella con indice h più piccolo. Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad uscire dalla base si sceglie quella con indice k più piccolo.*

Vale il seguente teorema, che riportiamo senza dimostrazione.

Teorema 1.8.24 *Supponiamo di applicare il metodo del simplesso con la regola di Bland per la scelta delle variabili entranti e delle variabili uscenti (cioè per la scelta di h e k). Allora non viene mai generata due volte la stessa base e quindi, per il Teorema 1.8.21, esiste un indice $t \geq 1$ tale che la base B_t nella sequenza generata dal metodo del simplesso soddisfa il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza e il metodo converge quindi in un numero finito di passi.*

Il lettore può verificare che se si applica la regola di Bland nella soluzione del problema di Beal considerato sopra, viene in effetti trovata la base ottima in un numero finito di passi.

1.8.7 Eliminazione delle ipotesi e calcolo della prima forma canonica

Tuttavia il precedente algoritmo può essere definito supponendo che l'Assunzione 1.8.1 sia soddisfatta e che una Base Ammissibile e la sua relativa forma canonica siano note. Queste difficoltà possono essere superate per via algoritmica e sono state proposte in letteratura varie tecniche. Un esempio è la seguente.

Si considera, come al solito, un problema di Programmazione Lineare in forma standard:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n, \end{aligned} \tag{1.80}$$

in cui si richiede la seguente assunzione.

Assunzione: *Il vettore b dei vincoli di uguaglianza del problema (1.80) è tale che:*

$$b \geq 0_m.$$

In realtà la precedente non è una vera e propria assunzione, ma piuttosto la richiesta di formulare i vincoli in maniera tale da soddisfare $b \geq 0_m$. Infatti se una componente

b_i è strettamente negativa, basta cambiare il segno ad entrambi i termini dell' i -esimo vincolo per soddisfare l'ipotesi richiesta.

A partire dal problema (1.80), si definisce il seguente problema in cui si introducono m nuove variabili $\alpha_1, \dots, \alpha_m$:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + M \sum_{i=1}^m \alpha_i & (1.81) \\ & Ax + I_m \alpha = b \\ & x \geq 0_n, \alpha \geq 0_m \end{aligned}$$

con $M \in R$, $M > 0$ e con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$.

Questo nuovo problema di Programmazione Lineare soddisfa tutte le ipotesi richieste per poter applicare il precedente metodo del sempliceo, infatti:

- è facile verificare che il punto $(x, \alpha) = (0, b)$, avendo ipotizzato $b \geq 0_m$, soddisfa tutti i vincoli del problema ausiliario, quindi l'insieme ammissibile del problema (1.81) è non vuoto;
- la matrice dei vincoli $(A \ I_m)$, contenendo la matrice identità $m \times m$, soddisfa alla richiesta che $\text{rango}(A \ I_m) = m$;
- la matrice $\hat{B} = I_m$ è una base ammissibile per il problema (1.81) (poichè $\hat{B}^{-1}b = b \geq 0_m$) e si ha che $\hat{B}^{-1}\hat{N} = \hat{N} = A$ ed $\hat{B}^{-1}b = b$.

Il seguente teorema descrive il legami tra il problema (1.81) è quello iniziale (1.80).

Teorema 1.8.25 *Esiste un valore \bar{M} tale che, per ogni $M \geq \bar{M}$ si ha che:*

- se il Problema (1.81) ha una soluzione ottima (x^*, α^*) allora:
 - se $\alpha^* = 0$ allora x^* è una soluzione ottima del Problema (1.80);
 - se $\alpha^* \neq 0$ allora il Problema (1.80) è non ammissibile;
- se il Problema (1.81) è illimitato inferiormente allora il Problema (1.80) è illimitato inferiormente oppure non ammissibile.

Esempio 1.8.26 *Risolvere applicando il metodo del sempliceo il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\min \quad x_1 - 2x_2 \quad (1.82)$$

$$2x_1 + 3x_3 = 1$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \quad (1.83)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 3.$$

Introduciamo le variabili α_1 e α_2 , il parametro $M > 0$ e consideriamo il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 + M\alpha_1 + M\alpha_2 \\ & 2x_1 + 3x_3 + \alpha_1 = 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_3 + \alpha_2 = 5 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 3 \\ & \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

La matrice $B_0 = I$ è una base ammissibile e il problema è in forma canonica rispetto alle variabili α_1, α_2 , ovvero:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1} \quad N_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = B_0^{-1}N_0$$

$$x_{B_0} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad x_{N_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & (M \ M) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + (1 \ -2 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Iterazione 0

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_0^T = (1 \ -2 \ 0) - (M \ M) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (1 \ -2 \ 0) - (5M \ 2M \ 2M) = (1-5M \ -2-2M \ -2M)$$

Verifica del criterio di ottimalità:

Poiché esistono componenti di γ negative la verifica è fallita. In particolare, $\gamma_1 < 0$ per $M > \frac{1}{5}$, $\gamma_2 < 0$ per $M > -1$ e $\gamma_3 < 0$ per $M > 0$, quindi non riusciamo a definire \bar{M} tale che per ogni $M \geq \bar{M}$ $\gamma \geq 0$.

Verifica del criterio di illimitatezza:

Poiché non risulta $\pi_1 \leq 0$, $\pi_2 \leq 0$, o $\pi_3 \leq 0$ la verifica è fallita.

Costruzione nuova base ammissibile:

Variabile entrante: secondo la regola anti ciclaggio di Bland scegliamo $h = 1$, corrispondente al costo ridotto negativo $\gamma_1 = 1 - 5M$; quindi entra in base la prima variabile

fuori base, ovvero x_1 .

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,\dots,2 \\ \pi_{i1} > 0}} \left\{ \frac{(B_0^{-1}b)_i}{\pi_{i1}} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{3} \right\} = \frac{(B_0^{-1}b)_1}{\pi_{11}} = \frac{1}{2}$$

si determina $k = 1$ e quindi la prima variabile in base esce dalla base, ovvero α_1 .

Nuova base:

$$x_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad x_{N_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Costruzione nuova forma canonica:

si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$(\pi_1 \mid e_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \mid B_0^{-1}b)$$

ovvero

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} \mathbf{2} & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_h)_k = (\pi_1)_1 = 2$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & 2 & -11/2 & 7/2 \end{array} \right)$$

ovvero

$$(e_1 \mid B_1^{-1}N_1 \mid B_1^{-1}b).$$

Quindi la nuova forma canonica è

$$\begin{aligned} \min \quad & (1 \ M) \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + (M \ -2 \ 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 3/2 \\ -3/2 & 2 & -11/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Iterazione 1

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_1^T = (M \ -2 \ 0) - (1 \ M) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 3/2 \\ -3/2 & 2 & -11/2 \end{pmatrix} = (5/2 \ M-1/2 \ -2-2M \ 11/2 \ M-3/2)$$

Verifica del criterio di ottimalità:

Poiché $\gamma_2 < 0$ per $M > 1$ la verifica è fallita.

Verifica del criterio di illimitatezza:

Poiché non risulta $\pi_2 \leq 0$ la verifica è fallita.

Costruzione nuova base ammissibile:

Variabile entrante: $h = 2$, corrispondente al costo ridotto $\gamma_2 = -2 - 2M$; quindi entra in base la seconda variabile fuori base, ovvero x_2 .

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,\dots,2 \\ \pi_{i2} > 0}} \left\{ \frac{(B_1^{-1}b)_i}{\pi_{i2}} \right\} = \min \{7/2\} = \frac{(B_1^{-1}b)_2}{\pi_{21}} = 7/2$$

si determina $k = 2$ e quindi la seconda variabile in base esce dalla base, ovvero α_2 .

Nuova base:

$$x_{B_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_{N_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Costruzione nuova forma canonica:

si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$(\pi_2 \quad | \quad \pi_1 \quad e_2 \quad \pi_3 \quad | \quad B_1^{-1}b)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 0 & | & 1/2 & 0 & 3/2 & | & 1/2 \\ \mathbf{2} & | & -3/2 & 2 & -11/2 & | & 7/2 \end{pmatrix}$$

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_h)_k = (\pi_2)_2 = 2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & | & 1/2 & 0 & 3/2 & | & 1/2 \\ 1 & | & -3/4 & 1 & -11/4 & | & 7/4 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$(e_2 \quad | \quad B_2^{-1}N_2 \quad | \quad B_2^{-1}b).$$

Quindi la nuova forma canonica è

$$\begin{aligned} \min \quad & (1 \quad -2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (M \quad M \quad 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 3/2 \\ -3/4 & 1 & -11/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/4 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Iterazione 2

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_2^T = (M \ M \ 0) - (1 \ -2) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 3/2 \\ -3/4 & 1 & -11/4 \end{pmatrix} = (M \ M \ 0) - (-1 \ -2 \ 7) = (M+1 \ M+2 \ -7)$$

Verifica del criterio di ottimalità:

Poiché $\gamma_3 < 0$ la verifica è fallita.

Verifica del criterio di illimitatezza:

Poiché non risulta $\pi_3 \leq 0$ la verifica è fallita.

Costruzione nuova base ammissibile:

Variabile entrante: $h = 3$, corrispondente al costo ridotto $\gamma_3 = -7$; quindi entra in base la terza variabile fuori base, ovvero x_3 .

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,2 \\ \pi_{i3} > 0}} \left\{ \frac{(B_2^{-1}b)_i}{\pi_{i3}} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right\} = \frac{(B_2^{-1}b)_1}{\pi_{13}} = \frac{1}{3}$$

si determina $k = 1$ e quindi la prima variabile in base esce dalla base, ovvero x_1 .

Nuova base:

$$x_{B_3} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_{N_3} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Costruzione nuova forma canonica:

si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$(\pi_3 \quad | \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad e_1 \quad | \quad B_2^{-1}b)$$

ovvero

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{3/2} & & & 1/2 & 0 & 1 & | & 1/2 \\ -11/4 & & & -3/4 & 1 & 0 & | & 7/4 \end{array} \right)$$

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_h)_k = (\pi_1)_3 = 3/2$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1/3 & 0 & 2/3 & | & 1/3 \\ 0 & & & 1/6 & 1 & 11/6 & | & 8/3 \end{array} \right)$$

ovvero

$$(e_1 \quad | \quad B_3^{-1}N_3 \quad | \quad B_3^{-1}b).$$

Quindi la nuova forma canonica è

$$\min \quad (0 \quad -2) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} + (M \ M \ 1) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/6 & 1 & 11/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Iterazione 3

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_3^T = (M \ M \ 1) - (0 \ -2) \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/6 & 1 & 11/6 \end{pmatrix} = (M \ M \ 1) - (-1/3 \ -2 \ -11/3) = (M+1/3 \ M+2 \ 14/3)$$

Verifica del criterio di ottimalità:

Poiché $\gamma \geq 0$ per ogni valore del parametro $M \geq -1/3$ il criterio di ottimalità è soddisfatto e quindi la soluzione

$$(x^*, \alpha^*) = (0 \ 8/3 \ 1/3 \ 0 \ 0)^T$$

è soluzione ottima. Poiché $\alpha^* = (0 \ 0)^T$, per il Teorema 1.8.25 si ha che

$$x^* = (0 \ 8/3 \ 1/3)^T$$

è soluzione ottima del problema (1.82).

Capitolo 2

Classificazione dei problemi di ottimizzazione e Condizioni di Esistenza

Nel primo capitolo di queste dispense, ci siamo concentrati sulla particolare classe di problemi di programmazione lineare. In questo capitolo e nei prossimi, consideriamo problemi di programmazione matematica piú generali, in cui le funzioni che definiscono obiettivo e vincoli possono essere nonlineari. Vedremo alcune definizioni di base e in questo capitolo ricaviamo alcune condizioni sufficienti per l'esistenza delle soluzioni ottime. In particolare, dimostriamo alcuni risultati che si basano sullo studio degli insiemi di livello di una funzione.

2.1 Introduzione

All'interno dei problemi di Ottimizzazione, in base alla *struttura dell'insieme ammissibile* \mathcal{F} , si possono distinguere le seguenti importanti classi di problemi:

- *Problemi di Ottimizzazione Continua* in cui le variabili possono assumere tutti i valori reali ($x \in \mathbb{R}^n$) e, quindi, si ha che $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$;
- *Problemi di Ottimizzazione Discreta* in cui le variabili sono vincolate ad assumere valori interi, ovvero ($x \in \mathbb{Z}^n$). Pertanto, si ha che $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{Z}^n$;
- *Problemi misti* in cui alcune variabili possono assumere valori reali e altre variabili sono vincolate ad assumere valori interi.

2.1.1 Problemi di Ottimizzazione Continua

Nel seguito, per indicare un Problema di Ottimizzazione Continua utilizzeremo la notazione utilizzata precedentemente, ovvero

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in \mathcal{F}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

supponendo che $x \in \mathbb{R}^n$ e che $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Con l'obiettivo di caratterizzare i possibili punti di soluzione del precedente problema di minimizzazione introduciamo le seguenti definizioni.

Definizione 2.1.1 Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ si dice punto di minimo globale di f su \mathcal{F} se

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}.$$

Definizione 2.1.2 Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ si dice punto di minimo globale stretto di f su \mathcal{F} se

$$f(x^*) < f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}, \quad x \neq x^*.$$

Definizione 2.1.3 Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ si dice punto di minimo locale di f su \mathcal{F} se esiste un intorno $B(x^*; \rho)$, con $\rho > 0$ tale che

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F} \cap B(x^*; \rho).$$

Definizione 2.1.4 Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ si dice punto di minimo locale stretto di f su \mathcal{F} se esiste un intorno $B(x^*; \rho)$, con $\rho > 0$ tale che

$$f(x^*) < f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F} \cap B(x^*; \rho), \quad x \neq x^*.$$

La natura del Problema (2.1) e, quindi, la sua difficoltà di risoluzione dipendono dalle caratteristiche della funzione obiettivo e dalla struttura dell'insieme ammissibile. Usualmente un problema di ottimizzazione viene caratterizzato dal fatto che si abbia completa libertà o meno nella scelta del vettore x , infatti:

- Il Problema (2.1) è detto *problema di minimizzazione non vincolata* se $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$, cioè se l'insieme ammissibile \mathcal{F} coincide con tutto lo spazio \mathbb{R}^n , cioè:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

- Il Problema (2.1) viene detto *problema di minimizzazione vincolata* se $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$.

Tuttavia, può essere considerato come un problema di minimizzazione non vincolato anche un qualsiasi problema in cui l'insieme ammissibile \mathcal{F} è un insieme aperto. Infatti, come nel caso in cui $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$, i punti di minimo del problema possono essere caratterizzati esclusivamente dall'andamento della funzione obiettivo in un intorno del punto e non dal fatto che ci siano dei vincoli sulle variabili del problema. Perciò, per i problemi in cui l'insieme ammissibile è un insieme aperto, si adattano facilmente tutti i risultati e metodi proposti per il caso in cui $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$.

Tra i problemi vincolati in cui \mathcal{F} è un insieme chiuso, la classe più comunemente considerata è quella in cui \mathcal{F} è descritto attraverso un *insieme finito di vincoli di uguaglianza e disuguaglianza*:

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0\},$$

in cui $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sono vettori di funzioni continue assegnate. Il problema di ottimizzazione si può indicare, in tal caso, ponendo:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

che equivale a scrivere

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g_1(x) \leq 0 \\ & \dots \\ & g_m(x) \leq 0 \\ & h_1(x) = 0 \\ & \dots \\ & h_p(x) = 0. \end{aligned}$$

Nella precedente descrizione dell'insieme \mathcal{F} si sono utilizzati vincoli di disuguaglianza nella forma di minore o uguale a zero, ma è chiaro che questa notazione include il caso in cui i vincoli sono espressi con vincoli di disuguaglianza nella forma di maggiore o uguale a zero: si può sempre trasformare un vincolo di maggiore o uguale del tipo

$$g_i(x) \geq 0$$

in un vincolo di minore o uguale semplicemente riscrivendolo nella forma

$$-g_i(x) \leq 0.$$

Inoltre un vincolo di uguaglianza

$$h_j(x) = 0$$

può essere riscritto nella forma equivalente delle due disequazioni

$$\begin{aligned} h_j(x) &\leq 0 \\ -h_j(x) &\leq 0. \end{aligned}$$

Riguardo i vincoli di disuguaglianza di un problema di ottimizzazione è importante introdurre le seguenti definizioni.

Definizione 2.1.5 *Si consideri un vincolo di disuguaglianza del tipo $g_i(x) \leq 0$;*

- *il vincolo si dice violato in un punto \bar{x} se $g_i(\bar{x}) > 0$;*
- *il vincolo si dice attivo in un punto \bar{x} se $g_i(\bar{x}) = 0$.*

In un problema di ottimizzazione un vincolo si dice ridondante se con la sua eliminazione l'insieme ammissibile rimane immutato.

Nel seguito si considererà una particolare classe di problemi, detti problemi di ottimizzazione *continuamente differenziabili*, che presentano le seguenti caratteristiche:

- la funzione obiettivo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è almeno *continuamente differenziabile*;
- nel caso di problemi vincolati, le funzioni $g_i, i = 1, \dots, m$, e $h_j, j = 1, \dots, p$, che descrivono l'insieme ammissibile, sono almeno *continuamente differenziabili*

2.1.2 Problemi di Ottimizzazione Discreta

In questa classe di problemi le variabili sono vincolate ad assumere valori interi. All'interno di questa classe di problemi si possono distinguere due sottoclassi:

- *problemi di programmazione a numeri interi* se $x \in \mathbb{Z}^n$;
- *problemi di ottimizzazione booleana* se $x \in \{0, 1\}^n$.

I Problemi di Ottimizzazione Discreta possono essere rappresentati attraverso la seguente notazione

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in \mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^n, \end{aligned} \tag{2.4}$$

in cui $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Per quanto riguarda la definizione dei minimi globali si può ripetere quella data nel caso dei problemi continui.

Definizione 2.1.6 *Un punto $x^* \in \mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^n$ si dice punto di minimo globale (minimo globale stretto) di f su $\mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^n$ se*

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (f(x^*) < f(x)), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^n.$$

Più delicata è invece la definizione dei minimi locali, infatti il concetto di intorno di un punto non può basarsi sull'esistenza di una sfera $B(x^*; \rho)$ di raggio ρ arbitrario come fatto nel caso dei problemi di Ottimizzazione Continua. Nei problemi di Ottimizzazione Discreta, si possono introdurre diverse definizioni di intorno discreto $B_z(\bar{x})$ di un punto $\bar{x} \in \mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^n$, alcuni esempi possono essere:

$$\begin{aligned} B_z(\bar{x}) &= \{x \in \mathbb{Z}^n : \|x - \bar{x}\|_2 = 1\}, \\ B_z(\bar{x}) &= \{x \in \mathbb{Z}^n : \|x - \bar{x}\|_\infty = 1\}. \end{aligned}$$

Utilizzando la prima scelta si considerano punti dell'intorno tutti i vettori a variabili discrete in cui una componente differisce dalla corrispondente del punto \bar{x} di uno. Con

la seconda scelta si considerano punti dell'intorno tutti i vettori a variabili discrete in cui una o più componenti differiscono dalle corrispondenti del punto \bar{x} di uno.

Per esempio se $\bar{x} = (0, 0)^T$ allora:

$$B_z(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{Z}^2 : \|x - \bar{x}\|_2 = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B_z(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{Z}^2 : \|x - \bar{x}\|_\infty = 1\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La scelta della definizione più appropriata dell'intorno $B_z(x)$ può dipendere dal particolare problema di Ottimizzazione Discreta considerato.

Definito un particolare intorno B_z si possono definire i minimi locali di un problema di Ottimizzazione Discreta.

Definizione 2.1.7 *Un punto $x^* \in \mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^n$ si dice punto di minimo locale (minimo locale stretto) di f su $\mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^n$ se esiste un intorno $B_z(x^*)$ tale che*

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (f(x^*) < f(x)), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F} \cap B_z(x^*).$$

Dopo aver evidenziato le diversità riguardanti la definizione dei minimi locali, tutte le altre considerazioni fatte nella sezione precedente per i Problemi di Ottimizzazione Continua possono essere ripetute con ovvi adattamenti al caso dei Problemi di Ottimizzazione Discreta.

2.1.3 Problemi di Ottimizzazione Mista

In questa classe di problemi il vettore delle variabili presenta alcune componenti che possono variare in maniera continua ed altre solamente in maniera discreta. Senza perdita di generalità questa situazione può essere rappresentata definendo il vettore delle variabili nella seguente maniera:

$$x = \begin{pmatrix} x_c \\ x_z \end{pmatrix}, \quad \text{con } x_c \in \mathbb{R}^{n_c}, \quad x_z \in \mathbb{Z}^{n_z}, \quad n_c + n_z = n.$$

Di conseguenza un problema di Ottimizzazione mista può essere definito come segue

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_c, x_z) \\ & x_c \in \mathcal{F}_c, \\ & x_z \in \mathcal{F}_z \cap \mathbb{Z}^{n_z}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

dove $\mathcal{F}_c \subseteq \mathbb{R}^{n_c}$ e $\mathcal{F}_z \subseteq \mathbb{R}^{n_z}$.

Le caratterizzazioni dei punti di minimo globale e locale di questa classe di problemi seguono direttamente unendo le definizioni date per i Problemi di Ottimizzazione Continua e per i Problemi di Ottimizzazione Discreta.

I problemi di Ottimizzazione Mista presentano contemporaneamente sia le difficoltà di quelli continui che di quelli discreti. Sono quindi problemi di ottimizzazione estremamente difficile da affrontare sia dal punto di vista teorico che da quello algoritmico e, per questo motivo, la loro trattazione è tuttora un argomento esclusivo dell'attività di ricerca nel campo della Programmazione Matematica.

2.2 Condizioni di esistenza

Come detto nella precedente sezione, nell'affrontare il Problema (1.1) la prima difficoltà è quella di capire se è ben posto, ovvero stabilire se esiste un punto in \mathcal{F} in cui la funzione $f(x)$ assuma valore più piccolo. Si potrebbe infatti presentare una delle seguenti situazioni:

- l'insieme ammissibile \mathcal{F} potrebbe essere vuoto;
- l'insieme ammissibile \mathcal{F} potrebbe essere non vuoto ma la funzione obiettivo potrebbe essere illimitata inferiormente su \mathcal{F} ossia $\inf_{x \in \mathcal{F}} f(x) = -\infty$;
- l'insieme ammissibile \mathcal{F} potrebbe essere non vuoto e la funzione obiettivo potrebbe essere limitata inferiormente su \mathcal{F} ma, anche in questo caso, *potrebbero non esistere punti di minimo globale* di f su \mathcal{F} ;

Fortunatamente si possono stabilire delle semplici condizioni *sufficienti* (ma non necessarie) per l'esistenza di un punto di minimo globale di un problema di ottimizzazione. L'analisi di queste condizioni si differenzia a seconda del tipo di problema di ottimizzazione considerato (continuo o discreto).

2.2.1 Condizioni di esistenza per Problemi di Ottimizzazione Discreta

Nel caso di Problemi di Ottimizzazione Discreta l'esistenza di un minimo globale si può garantire richiedendo l'intuitivo fatto che l'insieme ammissibile sia contenuto in un insieme limitato. In particolare per problemi con la struttura del tipo (2.4), si può stabilire il seguente risultato.

Proposizione 2.2.1 *Sia $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e sia $\mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^n$ non vuoto. Allora esiste un punto di minimo globale di f in $\mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^n$.*

Prova. Dalla ipotesi che l'insieme \mathcal{F} è limitato si ha che esiste una costante $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ tale che:

$$\|x\| \leq \eta \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F},$$

dove, come usuale, $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea $\|\cdot\|_2$.

Dai legami tra le varie norme in \mathbb{R}^n (si veda la (A.1) nella Appendice A) si ottiene:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \eta \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}.$$

Ricordando la definizione di $\|\cdot\|_\infty$ si ottiene che per ogni $x \in \mathcal{F}$ si ha che:

$$|x_i| \leq \eta \quad \text{per ogni indice } i = 1, \dots, n.$$

Se $\eta_z \in Z$ indica il più grande intero tale che $\eta_z \leq \eta$, il fatto che $\mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^n \subseteq \mathcal{F}$ implica che, per ogni $x \in \mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^n$, si ha:

$$|x_i| \leq \eta_z \quad \text{per ogni indice } i = 1, \dots, n.$$

Dalla precedente relazione si può dedurre che ogni $x \in \mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^n$ ha componenti che possono assumere al più i seguenti $2\eta_z + 1$ valori

$$x_i \in \{-\eta_z, -(\eta_z - 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, \eta_z - 1, \eta_z\}.$$

Quindi l'intero insieme ammissibile è costituito da un numero finito di punti, al più ci possono essere $(2\eta_z + 1)^n$ vettori di interi distinti. Tra questi vettori di interi quelli in cui i valori della funzione obiettivo sono più bassi costituiscono l'insieme delle soluzioni ottime del problema. \square

2.2.2 Condizioni di esistenza per Problemi di Ottimizzazione Continua

Un risultato fondamentale riguardo all'esistenza di una soluzione di un problema di Ottimizzazione Continua è quello espresso dalla proposizione seguente, che segue dal ben noto Teorema di Weierstrass.

Proposizione 2.2.2 *Sia $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto e compatto. Sia f una funzione continua definita su \mathcal{F} . Allora esiste un punto di minimo globale di f in \mathcal{F} .*

Prova. Sia

$$\ell = \inf_{x \in \mathcal{F}} f(x).$$

Dalla definizione di estremo inferiore si ha che:

$$\ell \leq f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}. \quad (2.6)$$

In particolare, se $\{\eta_k\}$ è una sequenza di scalari tale che:

$$\begin{aligned} \ell &< \eta_k, \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}_0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k &= \ell, \end{aligned}$$

allora si ha che, comunque scelto un indice $k \in \mathbb{N}_0$, esiste un punto $x_k \in \mathcal{F}$ tale che:

$$f(x_k) \leq \eta_k. \quad (2.7)$$

Dalla (2.6) e dalla (2.7) segue che esiste una sequenza di punti $\{x_k\}$, con $x_k \in \mathcal{F}$, per cui:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \ell.$$

Per assunzione l'insieme \mathcal{F} è compatto, quindi è chiuso e limitato. Poichè $x_k \in \mathcal{F}$ per ogni k , la sequenza $\{x_k\}$ è anche lei limitata e, quindi, esiste un suo punto di

accumulazione $x^* \in \mathbb{R}^n$ che, per la chiusura di \mathcal{F} , soddisfa anche $x^* \in \mathcal{F}$. Perciò esiste una sottosequenza $\{x_k\}_K$ che soddisfa:

$$\lim_{k \in K, k \rightarrow \infty} x_k = x^*, \quad (2.8)$$

$$\lim_{k \in K, k \rightarrow \infty} f(x_k) = \ell. \quad (2.9)$$

Dalla continuità della funzione f e dalla (2.8), segue che:

$$\lim_{k \in K, k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x^*),$$

da cui, ricondando la (2.9), si ottiene:

$$f(x^*) = \ell.$$

La precedente uguaglianza e la (2.6) implicano che

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}, \quad (2.10)$$

da cui segue che il punto $x^* \in \mathcal{F}$ è un minimo globale di f su \mathcal{F} . \square

Esempi. Alcuni esempi di problemi che hanno insiemi ammissibili compatti sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ l \leq x \leq u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \|x\|^2 \leq \eta, \end{aligned}$$

dove $l, u \in \mathbb{R}^n$ e $\eta \in \mathbb{R}_+$.

Il risultato stabilito nella precedente proposizione si applica solamente alla classe dei problemi *vincolati* in cui l'insieme ammissibile è compatto. Per poter stabilire risultati di esistenza per problemi con insiemi ammissibili non compatti (in particolare nel caso in cui $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$) è necessario cercare di caratterizzare un qualche sottoinsieme di \mathcal{F} contenente le soluzioni ottime del problema.

A questo fine si introduce la definizione seguente.

Definizione 2.2.3 (Insieme di livello) Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$; si definisce insieme di livello di f su \mathcal{F} ogni insieme non vuoto del tipo:

$$\mathcal{L}(\alpha) := \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\},$$

in cui $\alpha \in \mathbb{R}$.

In particolare, se $x_0 \in \mathcal{F}$, indichiamo con \mathcal{L}_0 l'insieme di livello $\mathcal{L}(f(x_0))$, ossia:

$$\mathcal{L}_0 := \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq f(x_0)\}. \quad (2.11)$$

A questo punto, si può enunciare il risultato seguente che stabilisce una condizione sufficiente per l'esistenza di soluzioni globali di un problema di ottimizzazione facendo riferimento alla struttura degli insiemi di livello della funzione.

Proposizione 2.2.4 *Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia f una funzione continua definita su \mathcal{F} . Supponiamo che esista un insieme di livello di f su \mathcal{F} che sia non vuoto e compatto. Allora esiste un punto di minimo globale di f in \mathcal{F} .*

Prova. Sia $\mathcal{L}(\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme di livello non vuoto e compatto. Dalla Proposizione 2.2.2 esiste un punto di minimo globale $x^* \in \mathcal{L}(\alpha)$ di f su $\mathcal{L}(\alpha)$. Questo implica che per ogni $x \in \mathcal{L}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$ si ha

$$\alpha \geq f(x) \geq f(x^*). \quad (2.12)$$

Dalla definizione di $\mathcal{L}(\alpha)$ segue che per ogni $x \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{L}(\alpha)$ si ha

$$f(x) > \alpha \geq f(x^*). \quad (2.13)$$

Quindi la (2.12) e la (2.13) dimostrano che $x^* \in \mathcal{F}$ è un minimo globale di f sul tutto l'insieme \mathcal{F} . \square

Nel caso generale, stabilire l'esistenza di un insieme di livello compatto può essere difficile. Tuttavia, in molti casi, si possono ottenere delle semplici condizioni per assicurare che *tutti* gli insiemi di livello siano compatti. In particolare la proposizione successiva fornisce come condizione di *coercività* perchè gli insiemi di livello di f su \mathcal{F} siano compatti.

Proposizione 2.2.5 . *Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia f una funzione continua definita su \mathcal{F} . Allora tutti gli insiemi di livello $\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\}$ di f su \mathcal{F} sono compatti se e solo se le due seguenti condizioni sono soddisfatte:*

- (i) *se $\{x_k\}$ è una sequenza di punti $x_k \in \mathcal{F}$ tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$ allora segue che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty;$$

- (ii) *se $\{x_k\}$ è una sequenza di punti $x_k \in \mathcal{F}$ tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x} \notin \mathcal{F}$, allora segue che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty.$$

Prova. *Necessità.* Supponiamo che tutti gli insiemi di livello siano compatti. Ragionando per assurdo, ammettiamo che una delle due condizioni (i) e (ii) non sia soddisfatta. Se la condizione (i) non è soddisfatta deve esistere una successione $\{x_k\}$ di punti

$x_k \in \mathcal{F}$ che soddisfa $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$ e che contiene una sottosequenza (ridefinita $\{x_k\}$) per cui esiste uno scalare $\alpha < \infty$ tale che:

$$f(x_k) \leq \alpha. \quad (2.14)$$

Dalla (2.14) segue che $x_k \in \mathcal{L}(\alpha)$ per ogni k . Ma $\mathcal{L}(\alpha)$ è compatto, quindi limitato, e ciò contraddice l'ipotesi che $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$.

Se, invece, la condizione (ii) non è soddisfatta deve esistere una sequenza di punti $x_k \in \mathcal{F}$ che soddisfa $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x} \notin \mathcal{F}$ e che contiene una sottosequenza (ridefinita $\{x_k\}$) per cui esiste uno scalare $\alpha < \infty$ tale che la (2.14) è soddisfatta. Di nuovo, questo implica che $x_k \in \mathcal{L}(\alpha)$ per ogni k , ma questo, poichè $\mathcal{L}(\alpha)$ è un sottoinsieme compatto di \mathcal{F} , contraddice l'assunzione che $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x} \notin \mathcal{F}$.

Sufficienza. Supponiamo ora che le condizioni (i) e (ii) siano soddisfatte. Ragionando di nuovo per contraddizione, supponiamo che esista un insieme di livello $\mathcal{L}(\alpha)$ in \mathcal{F} che non sia compatto. Se $\mathcal{L}(\alpha)$ non fosse limitato allora esisterebbe una sequenza di punti $x_k \in \mathcal{L}(\alpha)$ con $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$ e $f(x_k) \leq \alpha$, ma questo contraddirebbe la condizione (i). Se invece $\mathcal{L}(\alpha)$ fosse limitato ma non chiuso, poichè f è una funzione continua, questo implicherebbe l'esistenza di una sequenza di punti $x_k \in \mathcal{L}(\alpha)$ con $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x} \notin \mathcal{F}$ e $f(x_k) \leq \alpha$, che contraddirebbe la condizione (ii). \square

Esempio. I precedenti risultati permettono di assicurare che il seguente problema (dove $x \in R$) ha un minimo globale:

$$\begin{aligned} \min \quad & x + \frac{5}{x} \\ & x > 0. \end{aligned}$$

Infatti per ogni sequenza $\{x_k\}$ tale che $x_k \in \mathcal{F}$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \notin \mathcal{F}$, si ha che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \frac{5}{x_k} = \infty.$$

Mentre per ogni sequenza di punti $x_k \in \mathcal{F}$ tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty$, si ha che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \frac{5}{x_k} = \infty.$$

Perciò tutti gli insiemi di livello del precedente problema sono compatti e, quindi, esiste un minimo globale. \square

Le proposizioni 2.2.4 and 2.2.5 forniscono delle condizioni sufficienti per l'esistenza delle soluzioni di un problema di minimizzazione in cui l'insieme ammissibile \mathcal{F} è un insieme generico. In particolare si possono considerare due casi particolari che corrispondono alle situazioni di maggiore interesse.

Il primo dei due casi è quello in cui \mathcal{F} è un insieme chiuso.

Proposizione 2.2.6 Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e sia f una funzione continua su \mathcal{F} e si assuma che f sia coerciva su \mathcal{F} , ossia che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty,$$

per ogni successione $\{x_k\}$, con $x_k \in \mathcal{F}$, tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$. Allora si ha:

- (i) tutti gli insiemi di livello $\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\}$ sono compatti;
- (ii) esiste un minimo globale di f su \mathcal{F} ;
- (iii) l'insieme dei minimi globali di f su \mathcal{F} è un insieme compatto non vuoto.

Prova. I punti (i) and (ii) seguono dalle Proposizioni 2.2.4 and 2.2.5; il punto (iii) segue dai punti (i) e (ii), e notando che l'insieme dei minimi globali è l'insieme di livello $\mathcal{L}(f^*)$, dove $f^* = \min_{x \in \mathcal{F}} f(x)$. \square

Nel caso in cui $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$ il precedente risultato si può esprimere nella seguente maniera.

Proposizione 2.2.7 Sia f una funzione continua su \mathbb{R}^n e si assuma che f sia coerciva su \mathbb{R}^n , ossia che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty,$$

per ogni successione $\{x_k\}$, con $x_k \in \mathbb{R}^n$, tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$. Allora si ha:

- (i) tutti gli insiemi di livello $\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$ sono compatti;
- (ii) esiste un minimo globale di f su \mathbb{R}^n ;
- (iii) l'insieme dei minimi globali di f su \mathbb{R}^n è un insieme compatto non vuoto.

La seguente proposizione indentifica un classe importante di funzioni coercive.

Proposizione 2.2.8 Sia

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + d$$

con $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}$.

Se la matrice Q è definita positiva le funzione $f(x)$ è coerciva su \mathbb{R}^n .

Prova. Sia $\{x_k\}$ una successione tale che $x_k \in \mathbb{R}^n$ e che $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$. Per ogni k , ricordando la definizione $\lambda_{\min}(Q)$, (A.3) e la disuguaglianza di Schwarz (A.2), si può scrivere:

$$f(x_k) = \frac{1}{2}x_k^T Qx_k + c^T x_k + d \geq \frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x_k\|^2 - \|c\|\|x_k\| + d,$$

da cui segue che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty,$$

e che, quindi, la funzione f è coerciva. \square

Il secondo caso di struttura particolare dell'insieme ammissibile è quello in cui \mathcal{F} è un insieme limitato e aperto tale che f tende all'infinito al tendere della successione verso la frontiera di \mathcal{F} . Per esempio, questa situazione si presenta nelle minimizzazioni non vincolate di funzioni di barriera. Per questo caso è possibile stabilire la seguente condizione la cui prova è simile a quella della precedente proposizione.

Proposizione 2.2.9 *Sia \mathcal{F} un sottoinsieme limitato e aperto di \mathbb{R}^n e sia $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si supponga che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty,$$

per ogni successione $\{x_k\}$, con $x_k \in \mathcal{F}$, tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x} \in \partial\mathcal{F}$. Allora si ha:

- (i) *tutti gli insiemi di livello $\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\}$ sono compatti;*
- (ii) *esiste un minimo globale $x^* \in \mathcal{F}$ di f su \mathcal{F}*
- (iii) *l'insieme dei minimi globali di f su \mathcal{F} è un sottoinsieme compatto non vuoto di \mathcal{F} .*

Capitolo 3

Condizioni di Ottimalità

3.1 Introduzione

L'obiettivo di questo capitolo è quello di studiare delle caratterizzazioni matematiche delle soluzioni dei problemi di ottimizzazione che, oltre ad avere una validità teorica, abbiano un interesse applicativo nel senso che possano essere utilizzate nella definizione di metodi per la soluzione numerica dei problemi di ottimizzazione.

Purtroppo la localizzazione di un minimo globale dipende dal comportamento globale della funzione obiettivo e dei vincoli che descrivono il problema di ottimo. Ogni condizione matematica che identifica un minimo globale deve necessariamente riflettere questa complessità. Di conseguenza queste particolari condizioni sono scarsamente utilizzabili dal punto di vista computazionale.

Diversa è la situazione per quanto riguarda i minimi locali. Infatti quest'ultimi dipendono solamente da comportamento locale della funzione obiettivo e dei vincoli del problema. Questo fatto può essere sfruttato nel campo dei Problemi di Ottimizzazione Continua per dare delle importanti caratterizzazioni matematiche dei minimi locali attraverso i Teoremi della Media del primo e secondo ordine (si veda Appendice B) che permettono di approssimare la funzione obiettivo e i vincoli con funzioni semplici (lineari e quadratiche).

Lo stesso approccio non può essere seguito nel caso di Problemi di Ottimizzazione Discreta in quanto il vincolo di interezza sulle componenti del vettore delle variabili preclude la possibilità di considerare intorno qualsiasi di un dato punto e, quindi, di sfruttare le potenzialità dei Teoremi della media.

3.2 Condizione di ottimalità per problemi di ottimizzazione non vincolata

In questa sezione vengono riportati alcuni risultati che caratterizzano i punti di minimo di un problema di minimizzazione non vincolata, ovvero di un problema del tipo:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

dove $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continuamente differenziabile.

Per questa particolare classe di problemi di ottimizzazione si ha il seguente ben noto risultato.

Teorema 3.2.1 *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Se il punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ è un punto di minimo locale (globale) del Problema (3.1) allora*

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{3.2}$$

Prova. Si supponga che, per assurdo, che non valga la (3.2). Allora potremmo definire la seguente direzione

$$\bar{d} = -\nabla f(x^*). \tag{3.3}$$

Utilizzando il Teorema B.3.2, si avrebbe

$$f(x^* + \alpha\bar{d}) = f(x^*) + \alpha\nabla f(x^*)^T \bar{d} + r_1(\alpha\|\bar{d}\|), \quad \alpha > 0$$

con

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r_1(\alpha\|\bar{d}\|)}{\alpha} = 0.$$

Ricordando la definizione (3.3) di \bar{d} , si avrebbe:

$$f(x^* + \alpha\bar{d}) = f(x^*) - \alpha\|\nabla f(x^*)\|^2 + r_1(\alpha\|\bar{d}\|) = f(x^*) - \alpha \left(\|\nabla f(x^*)\|^2 - \frac{r_1(\alpha\|\bar{d}\|)}{\alpha} \right).$$

Da cui seguirebbe l'esistenza di uno scalare $\delta > 0$ tale

$$f(x^* + \alpha\bar{d}) < f(x^*), \quad \forall \alpha \in (0, \delta),$$

Quindi il punto x^* non sarebbe un minimo locale per il Problema (3.1). □

La maggior parte degli algoritmi che sono stati proposti in letteratura per affrontare problemi di ottimizzazione non vincolata sono in grado di determinare punti che soddisfano la condizione necessaria di ottimo (3.2). Per questo motivo è importante caratterizzarli attraverso la seguente definizione.

Definizione 3.2.2 *Un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ è detto punto stazionario del Problema (3.1) se è tale che*

$$\nabla f(x^*) = 0 \tag{3.4}$$

Ipotizzando che la funzione obiettivo sia due volte continuamente differenziabile si può migliorare la caratterizzazione dei minimi locali del Problema (3.1).

Teorema 3.2.3 Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Se il punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ è un punto di minimo locale (globale) del Problema (3.1) allora

$$\nabla f(x^*) = 0, \quad (3.5)$$

$$d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq 0, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n. \quad (3.6)$$

Prova. Nella dimostrazione del Teorema 3.2.1 si è già dimostrato che se non vale la (3.5) allora il punto x^* non è un minimo locale. Quindi per completare la dimostrazione del presente teorema basta far vedere che, oltre alla (3.5), deve anche necessariamente valere la condizione (3.6). Si supponga che, per assurdo, che valga la (3.5) e non valga la (3.6). In questo caso si potrebbe definire la direzione $\bar{d} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\bar{d}^T \nabla^2 f(x^*) \bar{d} < 0. \quad (3.7)$$

Dal Teorema B.3.4, seguirebbe:

$$f(x^* + \alpha \bar{d}) = f(x^*) + \alpha \nabla f(x^*)^T \bar{d} + \frac{1}{2} \alpha^2 \bar{d}^T \nabla^2 f(x^*) \bar{d} + r_2(\alpha \|\bar{d}\|),$$

con

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r_2(\alpha \|\bar{d}\|)}{\alpha^2} = 0, \quad \alpha > 0.$$

Ricordando la (3.5) e la (3.7), si avrebbe:

$$\begin{aligned} f(x^* + \alpha \bar{d}) &= f(x^*) + \frac{1}{2} \alpha^2 \bar{d}^T \nabla^2 f(x^*) \bar{d} + r_2(\alpha \|\bar{d}\|) \\ &= f(x^*) + \alpha^2 \left(\frac{1}{2} \bar{d}^T \nabla^2 f(x^*) \bar{d} + \frac{r_2(\alpha \|\bar{d}\|)}{\alpha^2} \right). \end{aligned}$$

Da cui seguirebbe l'esistenza di uno scalare $\delta > 0$ tale

$$f(x^* + \alpha \bar{d}) < f(x^*), \quad \forall \alpha \in (0, \delta).$$

Da cui seguirebbe che x^* non sarebbe un punto di minimo locale per il Problema (3.1).

□

I precedenti teoremi descrivono delle condizioni necessarie affinché un punto sia un minimo locale di un problema di ottimizzazione non vincolato. Il prossimo risultato invece descrive delle condizioni sufficienti affinché un punto sia un minimo locale del Problema (3.1).

Teorema 3.2.4 Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Se il punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ soddisfa le seguenti condizioni:

$$\nabla f(x^*) = 0, \quad (3.8)$$

$$d^T \nabla^2 f(x^*) d > 0, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n, \quad (3.9)$$

allora il punto x^* è un punto di minimo locale stretto per Problema (3.1).

Prova. Per assurdo, si supponga che x^* non sia un minimo locale. Questo implicherebbe che comunque scelto un indice k esisterebbe un punto $x_k \in B(x^*; 1/k)$ tale che

$$f(x_k) < f(x^*).$$

Ricordando il Teorema B.3.4, si avrebbe:

$$0 > f(x_k) - f(x^*) = \nabla f(x^*)^T(x_k - x^*) + \frac{1}{2}(x_k - x^*)^T \nabla^2 f(x^*)(x_k - x^*) + r_2(x_k, x^*),$$

con

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_2(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|^2} = 0.$$

Dalla (3.8) si avrebbe:

$$0 > \frac{(x_k - x^*)^T}{\|x_k - x^*\|} \nabla^2 f(x^*) \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} + 2 \frac{r_2(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|^2}. \quad (3.10)$$

Poichè le sequenza di vettori $\{(x_k - x^*)/\|x_k - x^*\|\}$ è limitata esiste un sottoinsieme di indici $K \subseteq \{1, 2, \dots\}$ tale che

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} &= \bar{d}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \left[\frac{(x_k - x^*)^T}{\|x_k - x^*\|} \nabla^2 f(x^*) \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} + \frac{2r_2(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|^2} \right] &= \bar{d}^T \nabla^2 f(x^*) \bar{d} \leq 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La precedente (3.11) contraddirebbe la (3.9). □

3.3 Utilizzazioni delle condizione di ottimalità - problemi non vincolati.

Le precedenti condizioni di ottimalità, oltre ad avere un notevole interesse dal punto di vista teorico, sono fondamentali anche dal punto di vista applicativo e metodologico.

3.3.1 Utilizzazione delle condizioni di ottimalità per calcolare direttamente i minimi locali

Nel caso di problemi semplici e particolarmente strutturati, le condizioni di ottimalità possono permettere di calcolare direttamente la soluzione del problema, ovvero il punto di ottimo del problema. Un esempio di tale applicazione è il seguente.

Esempio. Supponiamo che un bagnante abbia bisogno di aiuto mentre sta nuotando a 100 metri dalla riva e che il centro soccorso stia a 200 metri dalla proiezione sulla riva della posizione del bagnante.

Istintivamente un soccorritore, nel tentativo di sfruttare il più possibile il fatto di poter correre più velocemente sulla sabbia piuttosto che nuotare, potrebbe decidere di fare di corsa i 200 metri di costa per poi buttarsi e percorrere nuotando gli ultimi 100 metri. Nell'ipotesi che possa correre sulla sabbia alla velocità di 4 m/s e che possa nuotare alla velocità di 1.5 m/s, il soccorritore impiegherebbe:

$$\frac{200}{4} + \frac{100}{1.5} = 116.67 \text{ s.}$$

In alternativa si può determinare la distanza migliore x dalla proiezione sulla riva della posizione del bagnante in cui smettere di correre ed incominciare a nuotare. In particolare si può minimizzare il tempo necessario a raggiungere il nuotatore risolvendo il seguente problema:

$$\min \frac{200 - x}{4} + \frac{\sqrt{x^2 + 100^2}}{1.5}.$$

La derivata prima della funzione obiettivo è data da:

$$\nabla f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{1.5} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 100^2}}.$$

Il minimo globale x^* del problema deve soddisfare la seguente condizione di ottimalità:

$$\nabla f(x^*) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{1.5} \frac{x^*}{\sqrt{(x^*)^2 + 100^2}} = 0.$$

La precedente uguaglianza ha come unica soluzione il valore:

$$x^* = 40.45,$$

che, quindi, è l'unica soluzione ottima del problema.

Facendo questa scelta il soccorritore raggiunge il nuotatore in un tempo di:

$$\frac{200 - x^*}{4} + \frac{\sqrt{(x^*)^2 + 100^2}}{1.5} = 111,8 \text{ s.}$$

□

3.3.2 Utilizzazione delle condizioni di ottimalità per definire degli algoritmi per problemi di ottimizzazione non vincolata

L'uso diretto delle condizioni di ottimalità per determinare la soluzione di un problema di ottimizzazione è limitato a casi molto particolari. In generale un problema di ottimizzazione può essere affrontato utilizzando specifici metodi iterativi e le condizioni di ottimalità costituiscono la base per definire tali metodi.

Un ruolo particolarmente importante dal punto computazionale è giocato dal seguente insieme di direzioni.

Definizione 3.3.1 Si definisce insieme delle direzioni di discesa della funzione f nel punto \bar{x} il seguente insieme $D(\bar{x})$:

$$D(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n : \exists \delta > 0 \text{ per cui } f(\bar{x} + \alpha d) < f(\bar{x}), \forall \alpha \in (0, \delta)\}$$

In corrispondenza di un punto \bar{x} , il precedente insieme individua tutte le direzioni lungo le quali esistono degli spostamenti che producono una diminuzione della funzione obiettivo. In particolare è facile dimostrare il seguente risultato.

Teorema 3.3.2 Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Se il punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ non è un punto stazionario del Problema (3.1) allora il seguente insieme di direzioni $D_s(\bar{x})$ nel punto \bar{x}

$$D_s(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla f(\bar{x})^T d < 0\} \quad (3.12)$$

non è vuoto e si ha:

$$D_s(\bar{x}) \subseteq D(\bar{x}) \quad (3.13)$$

Prova. (La prova non fa parte del programma d'esame). La dimostrazione segue direttamente dalla dimostrazione del Teorema 3.2.1 che prova che, se $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ non è un punto stazionario, allora la direzione $\bar{d} = -\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ apparterebbe a $D_s(\bar{x})$ ed per ogni $d \in D_s(\bar{x})$ si avrebbe:

$$f(\bar{x} + \alpha d) < f(\bar{x})$$

comunque scelto lo scalare $\alpha \in (0, \delta)$, con $\delta > 0$. Quindi si otterrebbe che $d \in D(\bar{x})$. \square

Il precedente risultato costituisce la base per definire dei metodi di ottimizzazione non vincolata in quanto fornisce l'indicazione che, spostandosi da un punto non stazionario lungo una direzione che appartiene all'insieme $D_s(\bar{x})$, il valore della funzione obiettivo può essere diminuito.

Come esempio di una particolare scelta di una direzione di discesa, si può fare riferimento nuovamente alla prova del Teorema 3.2.1 che mostra che il vettore $\bar{d} = -\nabla f(\bar{x})$ una direzione di discesa per la funzione f in ogni punto \bar{x} che non è stazionario. Più formalmente, se il punto \bar{x} non è stazionario, allora lungo la semiretta

$$x(\alpha) = \bar{x} + \alpha \bar{d}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+$$

è possibile trovare un insieme di valori di α in cui il valore della funzione

$$\phi(\alpha) = f(x(\alpha)) = f(\bar{x} + \alpha \bar{d}) \quad (3.14)$$

è inferiore al valore di partenza

$$\phi(0) = f(x(0)) = f(\bar{x}).$$

Queste considerazioni hanno dato vita ad un noto metodo per risolvere problemi di ottimizzazione non vincolata, chiamato Metodo del Gradiente. Tale metodo può essere descritto dai seguenti passi.

Metodo del Gradiente.

Passo 0. Dati $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma \in (0, 1)$, si pone $k = 0$.

Passo 1. Se $\nabla f(x_k) = 0$ Stop.

Passo 2. Si pone $d_k = -\nabla f(x_k)$.

Passo 3. Si calcola lo scalare $\alpha_k > 0$ tale che

$$\begin{aligned} f(x_k + \alpha_k d_k) &\leq f(x_k) + \alpha_k \gamma \nabla f(x_k)^T d_k \\ f(x_k + 2\alpha_k d_k) &> f(x_k) + 2\alpha_k \gamma \nabla f(x_k)^T d_k. \end{aligned}$$

Passo 4. Si pone $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, $k = k + 1$ e si ritorna al Passo 1.

Ad ogni interazione k , il precedente algoritmo controlla al Passo 1 se il punto ottenuto x_k è un punto stazionario. In caso negativo produce un nuovo punto x_{k+1} in cui il valore della funzione obiettivo è diminuito. Questo viene ottenuto attraverso i Passi 2 e 3. Nel Passo 2 viene calcolata la direzione di discesa $d_k = -\nabla f(x_k)$. Nel Passo 3 si determina lo scalare α_k cercando di minimizzare (in maniera approssimata) la funzione $\phi(\alpha)$ definita dalla (3.14). Infatti, le condizioni che deve soddisfare lo scalare α_k al Passo 3 garantiscono che α_k è una sufficiente approssimazione del minimo α^* della funzione $\phi(\alpha)$. Questo fatto può essere reso più evidente analizzando graficamente le condizioni del Passo 3.

Nella Figura 3.1 viene riportato, prima di tutto, un possibile andamento della funzione

$$\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k).$$

A partire dal punto $(0, \phi(0)) = (0, f(x_k))$ viene tracciata una retta tangente alla curva $\phi(\alpha)$, la cui espressione è data da:

$$\hat{\phi}(\alpha) = \phi(0) + \alpha \dot{\phi}(0),$$

dove

$$\dot{\phi}(0) = \frac{d\phi}{d\alpha}(0) = \nabla f(x_k)^T d_k.$$

Quindi la funzione $\hat{\phi}$ può essere riscritta come segue:

$$\hat{\phi}(\alpha) = f(x_k) + \alpha \nabla f(x_k)^T d_k.$$

Nella Figura 3.1 viene riportata anche la funzione lineare

$$\bar{\phi}(\alpha) = f(x_k) + \alpha \gamma \nabla f(x_k)^T d_k,$$

che compare nei termini di destra delle condizioni del Passo 3.

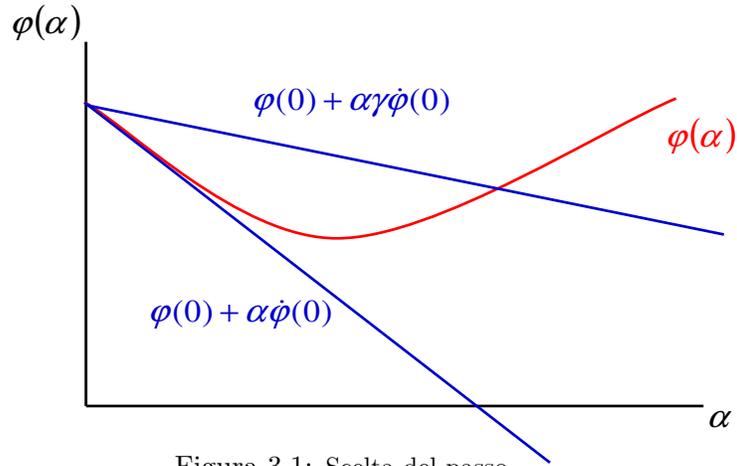


Figura 3.1: Scelta del passo.

La funzione $\bar{\phi}(\alpha)$ ha la stessa espressione della $\hat{\phi}(\alpha)$ a meno della costante γ che moltiplica il termine lineare della $\hat{\phi}(\alpha)$. Essendo $\gamma \in (0, 1)$ e $\nabla f(x_k)^T d_k = -\|\nabla f(x_k)\|^2$ ne segue che la retta $\bar{\phi}(\alpha)$ è meno inclinata della $\hat{\phi}(\alpha)$.

Un esempio di uno scalare α_k che soddisfa le condizioni del Passo 3 è riportato nella Figura 3.2.

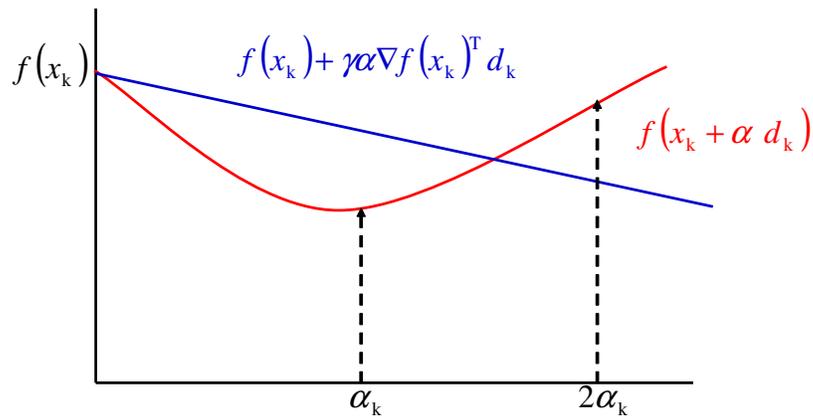


Figura 3.2: Esempio di un passo α_k .

Il fatto che le condizioni del Passo 3 garantiscono che lo scalare α_k sia una sufficiente approssimazione di un punto di minimo della funzione $\phi(\alpha) = f(x(\alpha))$ può essere osservato dalla Figura 3.3. Infatti si può notare che le due condizioni del Passo 3 impongono che lo scalare α_k sia nell'intervallo $[\alpha_L, \alpha_U]$. Infatti valori di α_k più grandi

di α_U non soddisfano la prima delle condizioni. Mentre valori di α_k più piccoli α_L non sono in grado di soddisfare la seconda delle condizioni. Dalla Figura 3.3 si nota che l'appartenere all'intervallo $[\alpha_L, \alpha_U]$ assicura di non essere troppo distanti da un minimo della funzione $\phi(\alpha) = f(x(\alpha))$.

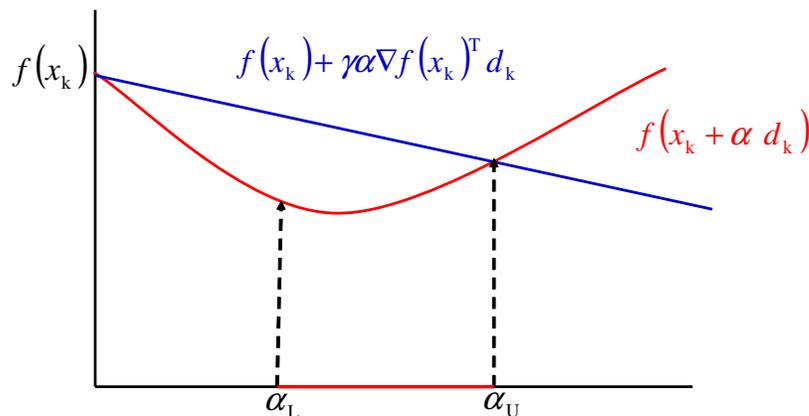


Figura 3.3: Intervallo di accettabilità per α_k .

Le proprietà asintotiche della sequenza di punti prodotta dal precedente metodo sono descritte da seguente teorema.

Teorema 3.3.3 *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e sia $\mathcal{L}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}$ un insieme compatto. Se $\{x_k\}$ è la sequenza di punti prodotta da Metodo del Gradiente allora:*

- o esiste un indice $\nu \geq 0$ tale che $x_\nu \in \mathcal{L}(x_0)$ e $\nabla f(x_\nu) = 0$;
- oppure viene prodotta una successione infinita tale che:
 - i) la sequenza $\{x_k\}$ ammette almeno un punto di accumulazione;
 - ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$;
 - iii) ogni punto di accumulazione \bar{x} della sequenza $\{x_k\}$ è un punto stazionario del Problema (3.1) ed, inoltre, $f(\bar{x}) \leq f(x_0)$.

Prova. (La prova non fa parte del programma dell'esame). Dalla prima delle condizioni su α_k del Passo 3 e dal fatto che $d_k = -\nabla f(x_k)$ si ha che:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \alpha_k \gamma \|\nabla f(x_k)\|^2, \quad (3.15)$$

da cui segue che

$$x_k \in \mathcal{L}(x_0), \quad \text{per ogni } k, \quad (3.16)$$

ricordando l'ipotesi di compattezza dell'insieme $\mathcal{L}(x_0)$, si ha che la sequenza $\{x_k\}$ è limitata e che ammette almeno un punto di accumulazione (punto i)).

Punto ii). Le precedenti (3.15), (3.16) e, di nuovo, l'ipotesi di compattezza di $\mathcal{L}(x_0)$ implicano che la sequenza di scalari $\{f(x_k)\}$ è non crescente e limitata inferiormente. Perciò la sequenza $\{f(x_k)\}$ ammette un limite \bar{f} , cioè:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \bar{f}. \quad (3.17)$$

Dal precedente limite e dalla (3.15) si ottiene:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \gamma \|\nabla f(x_k)\|^2 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(x_k) - f(x_{k+1}) \right) = 0,$$

da cui segue che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \|\nabla f(x_k)\| = 0. \quad (3.18)$$

Se, per assurdo, il punto ii) del teorema non fosse vero la (3.18) implicherebbe l'esistenza di un insieme infinito di indici K e di sottosequenze $\{x_k\}_K$ e $\{\alpha_k\}_K$ tali che:

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x_k)\| &\geq \varepsilon > 0, \quad \text{per ogni } k \in K, \\ \lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \alpha_k &= 0. \end{aligned}$$

Poichè $x_k \in \mathcal{L}(x_0)$, per ogni $k \in K$, e che $\mathcal{L}(x_0)$ è un insieme compatto esisterebbero un sottoinsieme infinito di indici $K' \subseteq K$ e due sottosequenze $\{x_k\}_{K'}$ e $\{\alpha_k\}_{K'}$ tali che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty, k \in K'} x_k = \bar{x}, \quad (3.19)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty, k \in K'} \alpha_k = 0, \quad (3.20)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty, k \in K'} \|\nabla f(x_k)\| = \|\nabla f(\bar{x})\| > 0. \quad (3.21)$$

Dalla seconda delle condizioni su α_k del Passo 3 e, ricordando nuovamente che $d_k = -\nabla f(x_k)$, si ha:

$$\frac{f(x_k + 2\alpha_k d_k) - f(x_k)}{2\alpha_k} \geq -\gamma \|\nabla f(x_k)\|^2,$$

da cui, utilizzando il Teorema B.3.2 si otterrebbe che:

$$-\|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{r_1(x_k, \alpha_k)}{2\alpha_k} \geq -\gamma \|\nabla f(x_k)\|^2. \quad (3.22)$$

Utilizzando (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22) si arriverebbe all'assurdo che:

$$0 \geq (1 - \gamma) \|\nabla f(\bar{x})\|^2 > 0.$$

La dimostrazione del punto iii) del teorema segue direttamente dal punto ii) e dalla (3.16). \square

Il calcolo di uno scalare α_k che soddisfa le condizioni del Passo 3 del precedente metodo può essere fatto attraverso dei semplici algoritmi (chiamati Algoritmi o Tecniche di Linesearch). Un esempio di un tale algoritmo è riportato qui di seguito.

Procedura di Linesearch (calcolo del passo α_k).

Passo 0. Dati $x_k, d_k, \nabla f(x_k) \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in (0, 1)$ e $\alpha_0 > 0$, si pone $i = 0$.

Passo 1. Si calcola $f(x_k + \alpha_i d_k)$.

Passo 2. Se $f(x_k + \alpha_i d_k) > f(x_k) + \alpha_i \gamma \nabla f(x_k)^T d_k$

si pone $\alpha_{i+1} = \alpha_i/2$, $i = i + 1$ e si va al Passo 1.

Passo 3. Si calcola $f(x_k + 2\alpha_i d_k)$.

Passo 4. Se $f(x_k + 2\alpha_i d_k) \leq f(x_k) + 2\alpha_i \gamma \nabla f(x_k)^T d_k$

si pone $\alpha_{i+1} = 2\alpha_i$, $i = i + 1$ e si va al Passo 3.

Passo 5. Si pone $\alpha_k = \alpha_i$ e Stop.

Il precedente algoritmo determina entro un numero finito di iterazioni un valore α_k che soddisfa le condizioni del Passo 3 del Metodo del Gradiente. Questa proprietà è assicurata dal seguente teorema.

Teorema 3.3.4 *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e sia $\mathcal{L}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}$ un insieme compatto. Se $d_k = -\nabla f(x_k)$ e $\nabla f(x_k) \neq 0$, la Procedura di Linesearch termina dopo un numero finito di iterazioni producendo un α_k che soddisfa le condizioni del Passo 3 del Metodo del Gradiente.*

Prova. (La prova non fa parte del programma dell'esame). La dimostrazione del teorema segue dal fatto che le procedura non può ciclare tra il Passo 1 ed il Passo 2 oppure tra il Passo 3 ed il Passo 4.

Se la procedura ciclasse tra il Passo 1 ed il Passo 2 esisterebbe una sequenza di scalari $\{\alpha_i\}$ tale che

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = 0,$$

$$\frac{f(x_k + \alpha_i d_k) - f(x_k)}{\alpha_i} \geq -\gamma \|\nabla f(x_k)\|^2,$$

da cui, utilizzando il Teorema B.3.2, si otterrebbe:

$$-\|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{r_1(x_k, \alpha_i)}{\alpha_i} \geq -\gamma \|\nabla f(x_k)\|^2.$$

che, facendo tendere $i \rightarrow \infty$, porterebbe all'assurdo:

$$0 \geq (1 - \gamma) \|\nabla f(x_k)\| \geq 0.$$

Se la procedura ciclasse tra il Passo 3 ed il Passo 4 esisterebbe una sequenza di scalari $\{\alpha_i\}$ tale che:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i &= \infty, \\ f(x_k + 2\alpha_i d_k) &\leq f(x_k) - 2\alpha_i \gamma \|\nabla f(x_k)\|^2. \end{aligned}$$

Facendo tendere $i \rightarrow \infty$ dalla precedente relazione si avrebbe

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_k + 2\alpha_i d_k) = -\infty$$

che sarebbe in contrasto con il fatto che $x_k + 2\alpha_i d_k \in \mathcal{L}(x_0)$, per ogni i , e con l'ipotesi che $\mathcal{L}(x_0)$ è un insieme compatto. □

3.4 Condizione di ottimalità per problemi di ottimizzazione vincolata.

L'obiettivo di questa sezione è quello di caratterizzare i punti di minimo di un problema di minimizzazione vincolata.

Senza perdita di generalità si considerano problemi di ottimizzazione vincolata con la seguente struttura.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0, \end{aligned} \tag{3.23}$$

dove $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $h_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $j = 1 \dots p$, $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $i = 1 \dots m$.

Quindi il corrispondente insieme ammissibile è descritto dalle precedenti m disequazioni e p equazioni, cioè

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0\}$$

In corrispondenza ad un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ si può definire l'insieme degli indici dei vincoli attivi $I(\bar{x})$:

$$I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \dots, m\} : g_i(\bar{x}) = 0\}, \tag{3.24}$$

In un problema non vincolato, un punto x^* è un minimo locale se, in un suo intorno, la funzione obiettivo ha un comportamento particolare. Invece, un minimo locale di un

problema vincolato, in particolare del Problema (3.23), può essere caratterizzato dai comportamenti locali sia della funzione obiettivo che di alcuni dei vincoli. Dalla precedente considerazione segue che le condizioni di ottimalità per problemi vincolati sono più complesse di quelle per problemi non vincolati in quanto devono necessariamente riflettere il fatto che un minimo locale vincolato può nascere dall'azione combinata della minimizzazione della funzione obiettivo e del rispetto dei vincoli.

Una importante caratterizzazione dei minimi locali vincolati è descritta dal seguente teorema noto come *Teorema di Fritz-John*.

Teorema 3.4.1 *Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, $h_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Se \bar{x} è un minimo locale di f in \mathcal{F} allora esistono degli scalari $\lambda_0, \lambda_i, i = 1, \dots, m$ e $\mu_j, j = 1, \dots, p$ non tutti nulli tali che:*

$$\begin{aligned} \lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \nabla g_i(\bar{x}) \lambda_i + \sum_{j=1}^p \nabla h_j(\bar{x}) \mu_j &= 0 \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) &= 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \lambda_0 &\geq 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Prova. (La prova non fa parte del programma dell'esame). Se il punto x^* è un minimo locale di f in \mathcal{F} esiste un $\epsilon > 0$ ed una sfera chiusa

$$\bar{B}(x^*; \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| \leq \epsilon\},$$

tali che

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \text{per ogni } x \in \bar{B}(x^*; \epsilon) \cap \mathcal{F}. \quad (3.26)$$

Inoltre, tenendo conto che i vincoli di disuguaglianza $g_i(x)$ sono in un numero finito e scegliendo ϵ sufficientemente piccolo, si ha anche:

$$g_i(x) < 0 \quad \text{per ogni } x \in \bar{B}(x^*; \epsilon) \quad \text{e per ogni } i \notin I(x^*). \quad (3.27)$$

Per ogni indice $k = 1, 2, \dots$, si può definire la seguente nuova funzione in cui, oltre alla funzione obiettivo, compaiono dei termini che penalizzano la violazione dei vincoli.

$$F_k(x) = f(x) + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\}^2 + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^p h_i(x)^2 + \frac{1}{2} \|x - x^*\|^2. \quad (3.28)$$

Per ogni k si può analizzare il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min F_k(x) \\ \text{s.t. } x \in \bar{B}(x^*; \epsilon). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Tenendo conto della continuità della funzione $F_k(x)$ e della compattezza dell'insieme $\bar{B}(x^*; \epsilon)$, è possibile applicare il teorema di Weierstrass per concludere che, per ogni k , esiste un punto $x_k \in \bar{B}(x^*; \epsilon)$ che è il minimo globale del problema (3.29).

Al crescere di k si ottiene una sequenza di punti $\{x_k\}$ che sono contenuti nell'insieme compatto $\bar{B}(x^*; \varepsilon)$. Quindi $\{x_k\}$ ha dei punti di accumulazione.

Sia \bar{x} uno di questi punti di accumulazione e si indichi, senza perdita di generalità, con $\{x_k\}$ la sottosuccessione convergente a \bar{x} .

Poichè $x^* \in \bar{B}(x^*; \varepsilon)$, $g(x^*) \leq 0$, $h(x^*) = 0$ e che x_k è il minimo globale del problema (3.29), si ha:

$$F_k(x_k) \leq F_k(x^*) = f(x^*) \quad (3.30)$$

Dalla precedente relazione segue

$$\sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\}^2 + \sum_{i=1}^p h_i(x_k)^2 \leq \frac{2}{k} \left(f(x^*) - f(x_k) - \frac{1}{2} \|x_k - x^*\|^2 \right), \quad (3.31)$$

Facendo i limiti per $k \rightarrow \infty$ di entrambi i termini della precedente disuguaglianza, si ottiene

$$\sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(\bar{x})\}^2 + \sum_{i=1}^p h_i(\bar{x})^2 = 0.$$

da cui segue che $g(\bar{x}) \leq 0$, $h(\bar{x}) = 0$ e che, quindi, \bar{x} è ammissibile.

Inoltre la relazione (3.30) implica

$$f(x_k) + \frac{1}{2} \|x_k - x^*\|^2 \leq f(x^*)$$

per ogni k . Facendo nuovamente i limiti per $k \rightarrow \infty$ si ottiene:

$$f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \|\bar{x} - x^*\|^2 \leq f(x^*).$$

Poichè \bar{x} è ammissibile, si ha $f(x^*) \leq f(\bar{x})$ che, combinato con la precedente relazione, implica $\|\bar{x} - x^*\| = 0$ da cui

$$\bar{x} = x^*.$$

Quindi si può concludere che la sequenza $\{x_k\}$ converge a x^* e che, per valori di k sufficientemente grandi, i punti x_k sono interni alla sfera chiusa $\bar{B}(x^*; \varepsilon)$. Da questa ultima osservazione segue che, per valori di k sufficientemente grandi, i punti x_k sono minimi globali non vincolati della funzione F_k e che, quindi, soddisfano la condizione necessaria di ottimo non vincolato $\nabla F_k(x_k) = 0$ che equivale a

$$\nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^m k \max\{0, g_i(x_k)\} \nabla g_i(x_k) + \sum_{i=1}^p k h_i(x_k) \nabla h_i(x_k) + (x_k - x^*) = 0. \quad (3.32)$$

Si definiscano la seguenti quantità:

$$\begin{aligned} N_k &= \left\{ 1 + \sum_{i=1}^m [k \max\{0, g_i(x_k)\}]^2 + \sum_{i=1}^p [k h_i(x_k)]^2 \right\}^{1/2}, \\ \lambda_0^k &= 1/N_k, \\ \lambda_i^k &= k \max\{0, g_i(x_k)\} / N_k, \\ \mu_i^k &= k h_i(x_k) / N_k. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dalle definizioni precedenti segue che, per ogni k , il vettore $(\lambda_0^k, \lambda_1^k, \dots, \lambda_m^k, \mu_1^k, \dots, \mu_p^k) = (\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)$ ha norma unitaria ed ha componenti $\lambda_0^k, \lambda_1^k, \dots, \lambda_m^k$ non negative. Di conseguenza esiste una sottosuccessione (che ridefiniamo $\{(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)\}$) che converge ad un vettore $\{(\lambda_0^*, \lambda^*, \mu^*)\}$ a norma unitaria, cioè per cui:

$$\|(\lambda_0^*, \lambda^*, \mu^*)\| = 1. \quad (3.34)$$

Dividendo entrambi i membri della (3.32) per $N_k > 0$ e utilizzando le definizioni (3.33), si ottiene:

$$\lambda_0^k \nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla g_i(x_k) + \sum_{i=1}^p \mu_i^k \nabla h_i(x_k) + \frac{1}{N_k} (x_k - x^*) = 0, \quad (3.35)$$

da cui, considerando il limite per $k \rightarrow \infty$, si arriva

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i^* \nabla h_i(x^*) = 0, \quad (3.36)$$

che prova la prima delle relazioni (3.25).

Per quanto riguarda le altre relazioni dal fatto che $\lambda_0^k \geq 0$ e $\lambda_i^k \geq 0$, per $i = 1, \dots, m$ segue che

$$\lambda_0^* \geq 0 \quad \lambda_i^* \geq 0 \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.37)$$

Inoltre, per ogni indice i tale che $g_i(x^*) < 0$, la (3.27) implica che $g_i(x_k) < 0$ da segue che

$$\lambda_i^k = \frac{k}{N_k} \max\{0, g_i(x_k)\} = 0, \quad \text{per ogni indice } i \text{ tale che } g_i(x^*) < 0. \quad (3.38)$$

facendo tendere $k \rightarrow \infty$ si ha:

$$\lambda_i^* = 0, \quad \text{per ogni indice } i \text{ tale che } g_i(x^*) < 0, \quad (3.39)$$

da cui segue:

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.40)$$

Le (3.37) e (3.40), insieme alla (3.36) completano la dimostrazione del teorema. \square

Se si introduce la funzione Lagrangiana $\tilde{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{L}(x, \lambda_0, \lambda, \mu) = \lambda_0 f(x) + g(x)^T \lambda + h(x)^T \mu \quad (3.41)$$

le condizioni del Teorema 3.4.1 si possono scrivere:

$$\begin{aligned} \nabla_x \tilde{L}(\bar{x}, \lambda_0, \lambda, \mu) &= \lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x}) \lambda + \nabla h(\bar{x}) \mu = 0 \\ \lambda^T g(\bar{x}) &= 0 \\ g(\bar{x}) &\leq 0, \quad h(\bar{x}) = 0 \\ \lambda_0 &\geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad (\lambda_0, \lambda, \mu) \neq 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Attraverso le precedenti relazioni viene introdotta la seguente definizione.

Definizione 3.4.2 Un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di Fritz-John del Problema (3.23) se esistono degli scalari λ_0, λ_i , con $i = 1, \dots, m$, μ_j , con $j = 1, \dots, p$ (chiamati moltiplicatori di Fritz-John) tali che le condizioni (3.42) sono verificate.

Il Teorema 3.4.1 può essere difficile da interpretare dal punto di vista intuitivo ma è sicuramente più facile da utilizzare in pratica. Si consideri il seguente esempio.

Esempio. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 \\ & x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Si consideri, come candidati ad essere dei minimi globali del precedente problema, i seguenti punti:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prima di tutto il problema di ottimizzazione viene riscritto nella forma (3.23).

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 \\ & x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

I gradienti della funzione obiettivo e dei vincoli sono:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \nabla g_1(x) &= \begin{pmatrix} 3(1 - x_1)^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \nabla g_2(x) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \nabla g_3(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le condizioni di Fritz-John diventano:

$$\frac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_1} = -\lambda_0 + 3\lambda_1(1 - x_1)^2 - \lambda_2 = 0 \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_2} = \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \tag{3.45}$$

$$\lambda_1(x_2 - (1 - x_1)^3) = 0 \tag{3.46}$$

$$\lambda_2 x_1 = 0 \tag{3.47}$$

$$\lambda_3 x_2 = 0 \tag{3.48}$$

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0 \tag{3.49}$$

$$x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0, \quad -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0. \tag{3.50}$$

Il punto \tilde{x} è ammissibile e soddisfa le condizioni (3.50). In particolare il primo vincolo non è attivo in \tilde{x} e, quindi, la (3.46) implica:

$$\lambda_1 = 0.$$

Dalle (3.44) e (3.45) si ha:

$$\begin{aligned} -\lambda_0 - \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Da cui segue che l'unico modo per soddisfare le condizioni (3.44)-(3.50) è ponendo;

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Da cui segue che il punto \tilde{x} non soddisfa le condizioni di Fritz-John e che, quindi, non è sicuramente un minimo locale.

Anche il punto \hat{x} è ammissibile e soddisfa le condizioni (3.50). In questo punto il secondo vincolo non è attivo in \hat{x} e la (3.47) implica:

$$\lambda_2 = 0.$$

Dalle (3.44) e (3.45) si ha:

$$\begin{aligned} -\lambda_0 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Da cui segue che ponendo, per esempio,

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_3 = 1.$$

tutte le condizioni (3.44)-(3.50) sono soddisfatte. Da cui si può concludere \hat{x} soddisfa le condizioni necessarie di ottimo di Fritz-John. \square

I punti di Fritz-John che presentano $\lambda_0 = 0$ sono caratterizzati da relazioni in cui la funzione obiettivo non compare. Perciò difficilmente questi particolari punti di Fritz-John possono caratterizzare dei minimi locali, piuttosto sono rappresentativi di punti in cui si ha un comportamento particolare dei vincoli.

Ogni punto ammissibile in cui è nullo il gradiente di un vincolo attivo, è un punto di Fritz-John (basta assegnare un valore positivo al corrispondente moltiplicatore e porre uguale a zero tutti gli altri). In particolare ogni punto ammissibile \tilde{x} di un problema vincolato può essere reso un punto di Fritz-John di un problema equivalente a quello dato. Infatti basta aggiungere al problema di partenza il vincolo (sempre soddisfatto) $\|x - \tilde{x}\|^2 \geq 0$.

Per caratterizzare i punti di Fritz-John in cui $\lambda_0 \neq 0$ viene introdotta la seguente definizione.

Definizione 3.4.3 Un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di Karush-Kuhn-Tucker (KKT) del Problema (3.23) se esistono degli scalari λ_i , con $i = 1, \dots, m$, e μ_j , con $j = 1, \dots, p$, (chiamati moltiplicatori di Karush-Kuhn-Tucker) per cui sono verificate le seguenti le condizioni:

$$\begin{aligned}\nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})\lambda + \nabla h(\bar{x})\mu &= 0 \\ \lambda^T g(\bar{x}) &= 0 \\ g(\bar{x}) &\leq 0, \quad h(\bar{x}) = 0 \\ \lambda &\geq 0.\end{aligned}\tag{3.51}$$

È facile notare che ogni punto di Fritz-John con $\lambda_0 \neq 0$ è un punto di Karush-Kuhn-Tucker. Infatti se \bar{x} è un punto di Fritz-John con $\lambda_0 \neq 0$, basta dividere la prima, la seconda e la quarta relazione della (3.42) per λ_0 per soddisfare tutte relazioni (3.51) (ponendo $\lambda_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$, con $i = 1, \dots, m$ e $\mu_j = \frac{\mu_j}{\lambda_0}$, con $j = 1, \dots, p$).

In associazione ai punti di Karush-Kuhn-Tucker si introduce la funzione Lagrangiana $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + g(x)^T \lambda + h(x)^T \mu$$

Utilizzando la precedente funzione Lagrangiana L la prima delle condizioni (3.51) si può scrivere:

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0.$$

Per poter garantire che le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker sono condizioni necessarie di ottimo locale si deve richiedere che l'insieme ammissibile è "sufficientemente regolare". Nel seguente teorema vengono riportate alcune ipotesi di "regolarità" dei vincoli del problema in grado di garantire che un minimo locale vincolato è un punto di Karush-Kuhn-Tucker. In molti casi, tale ipotesi sono verificabili osservando la struttura dei vincoli del problema.

Teorema 3.4.4 Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, $h_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Se \bar{x} è un minimo locale di f in \mathcal{F} allora esistono due vettori $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ tali che:

$$\begin{aligned}\nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})\lambda + \nabla h(\bar{x})\mu &= 0 \\ \lambda^T g(\bar{x}) &= 0 \\ \lambda &\geq 0,\end{aligned}\tag{3.52}$$

se una delle seguenti condizioni è soddisfatta:

- a) (ipotesi di linearità) g_i , $i = 1, \dots, m$ e h_j , $j = 1, \dots, p$ sono funzioni lineari;

b) (ipotesi di Mangasarian-Fromowitz) non esistono degli scalari $\alpha_i \geq 0$, $i \in I(\bar{x})$, e β_j , $j = 1, \dots, p$, non tutti nulli per cui si ha:

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \alpha_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0;$$

c) (ipotesi di indipendenza lineare dei gradienti dei vincoli attivi) i vettori $\nabla g_i(\bar{x})$, $i \in I(\bar{x})$, $\nabla h_j(\bar{x})$, $j = 1, \dots, p$ sono linearmente indipendenti, sotto questa ipotesi, i due vettori $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ che, insieme a \bar{x} , soddisfano le condizioni (3.52) sono unici.

Prova. Dal Teorema 3.4.1 esistono $\tilde{\lambda}_0$, $\tilde{\lambda}_i$, $i = 1 \dots m$, e $\tilde{\mu}_j$, $j = 1 \dots p$ non tutti nulli tali che

$$\tilde{\lambda}_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \nabla g_i(\bar{x}) \tilde{\lambda}_i + \sum_{j=1}^p \nabla h_j(\bar{x}) \tilde{\mu}_j = 0 \quad (3.53)$$

$$\tilde{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad i = 1 \dots m \quad (3.54)$$

$$\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_i \geq 0 \quad i = 1 \dots m \quad (3.55)$$

da cui

$$\tilde{\lambda}_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \tilde{\lambda}_i + \sum_{i=1}^p \nabla h_j(\bar{x}) \tilde{\mu}_j = 0 \quad (3.56)$$

Se $\tilde{\lambda}_0 > 0$, come detto precedentemente, ponendo

$$\lambda_i = \frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\lambda}_0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \mu_j = \frac{\tilde{\mu}_j}{\tilde{\lambda}_0}, \quad j = 1, \dots, p,$$

dividendo la (3.53) per $\tilde{\lambda}_0$ ed utilizzando le (3.54) e (3.55) si ottiene che la tripla (\bar{x}, λ, μ) soddisfa il sistema (3.52) oppure il sistema (3.51).

La dimostrazione del teorema segue mostrando che le assunzioni (a)-(c) escludono il caso $\tilde{\lambda}_0 = 0$.

Se, per assurdo fosse $\tilde{\lambda}_0 = 0$, dalla (3.56) si avrebbe:

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \tilde{\lambda}_i + \sum_{i=1}^p \nabla h_j(\bar{x}) \tilde{\mu}_j = 0; \quad \tilde{\lambda}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.57)$$

Ipotesi a) (la dimostrazione del teorema sotto questa ipotesi non fa parte del programma dell'esame). Dalla linearità dei vincoli g_i , $i = 1, \dots, m$ e h_j , $j = 1, \dots, p$, si ha:

$$g_i(x) = g_i(\bar{x}) + \nabla g_i(\bar{x})^T (x - \bar{x}), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.58)$$

$$h_j(x) = h_j(\bar{x}) + \nabla h_j(\bar{x})^T (x - \bar{x}), \quad j = 1, \dots, p, \quad (3.59)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Moltiplicando ognuna delle (3.58) per $\tilde{\lambda}_i$, $i = 1, \dots, m$, moltiplicando ognuna delle (3.59) per $\tilde{\mu}_j$, $j = 1, \dots, p$, e sommandole tra di loro, si ottiene per ogni $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I(\bar{x})} g_i(x) \tilde{\lambda}_i + \sum_{i=1}^p h_j(x) \tilde{\mu}_j &= \sum_{i \in I(\bar{x})} g_i(\bar{x}) \tilde{\lambda}_i + \sum_{i=1}^p h_j(\bar{x}) \tilde{\mu}_j \\ &+ \left(\sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \tilde{\lambda}_i + \sum_{i=1}^p \nabla h_j(\bar{x}) \tilde{\mu}_j \right)^T (x - \bar{x}). \end{aligned}$$

Tendo conto dell'ammissibilità del punto \bar{x} e della (3.55), se fosse vera la (3.57) la precedente relazione implicherebbe:

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} g_i(x) \tilde{\lambda}_i + \sum_{i=1}^p h_j(x) \tilde{\mu}_j = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, ma questo contraddirebbe la tesi del Corollario ?? tenendo conto che, dalle condizioni di Frith-John, almeno un $\lambda_i > 0$ oppure un $\mu_j \neq 0$ deve esistere.

Ipotesi b). Supponendo per assurdo che $\tilde{\lambda}_0 = 0$, la (3.57) potrebbe essere riscritta ponendo $\alpha_i = \tilde{\lambda}_i$, per $i \in I(\bar{x})$ e $\beta_j = \tilde{\mu}_j$, per $j = 1, \dots, p$. In questa forma l'ipotesi b) (Mangasarian-Fromowitz) implicherebbe che $\alpha_i = \tilde{\lambda}_i = 0$ per ogni $i \in I(\bar{x})$ e $\beta_j = \tilde{\mu}_j = 0$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Ricordando che, per la (3.54), $\tilde{\lambda}_i = 0$ per ogni $i \notin I(\bar{x})$, si avrebbe la contraddizione che tutti i moltiplicatori $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_i, i = 1 \dots m$, e $\tilde{\mu}_j, j = 1 \dots p$, sarebbero nulli.

Ipotesi c). Poichè l'ipotesi c) implica l'ipotesi b) segue che il punto di minimo locale \bar{x} è necessariamente un punto di Karush-Kuhn-Tucker, quindi si deve dimostrare solamente l'unicità dei vettori $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e $\mu \in \mathbb{R}^p$.

Se ci fossero dei vettore $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ e $\hat{\mu} \in \mathbb{R}^p$, con $(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) \neq (\lambda, \mu)$ che soddisfacessero il sistema (3.51) si avrebbe che

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \lambda_i + \sum_{j=1}^p \nabla h_j(\bar{x}) \mu_j &= 0 \\ \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \hat{\lambda}_i + \sum_{j=1}^p \nabla h_j(\bar{x}) \hat{\mu}_j &= 0 \end{aligned}$$

da cui si avrebbe:

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) (\lambda_i - \hat{\lambda}_i) + \sum_{j=1}^p \nabla h_j(\bar{x}) (\mu_j - \hat{\mu}_j) = 0,$$

che contraddirebbe l'ipotesi di indipendenza lineare dei vettori $\nabla g_i(\bar{x})$, $i \in I(\bar{x})$ e $\nabla h_j(\bar{x})$, $j = 1, \dots, p$ \square

Esempio. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ & x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Si consideri, come nell'esempio precedente, i seguenti punti:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I gradienti della funzione obiettivo e dei vincoli sono:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \nabla g_1(x) &= \begin{pmatrix} 3(1 - x_1)^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \nabla g_2(x) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \nabla g_3(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker diventano:

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_1} = 1 + 3\lambda_1(1 - x_1)^2 - \lambda_2 = 0 \tag{3.61}$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_2} = 1 + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \tag{3.62}$$

$$\lambda_1(x_2 - (1 - x_1)^3) = 0 \tag{3.63}$$

$$\lambda_2 x_1 = 0 \tag{3.64}$$

$$\lambda_3 x_2 = 0 \tag{3.65}$$

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0 \tag{3.66}$$

$$x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0, \quad -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0. \tag{3.67}$$

Il punto \tilde{x} è ammissibile. In particolare il primo vincolo non è attivo in \tilde{x} e, quindi, la (3.63) implica:

$$\lambda_1 = 0.$$

Dalle (3.61) e (3.62) si ha:

$$1 - \lambda_2 = 0$$

$$1 - \lambda_3 = 0.$$

Ponendo:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1,$$

si ha che il punto \tilde{x} soddisfa le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker.

Anche il punto \hat{x} è ammissibile e il secondo vincolo non è attivo implicando che:

$$\lambda_2 = 0.$$

Dalle (3.61) e (3.62) si ha:

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Da cui segue che le condizioni necessarie di ottimo di Karush-Kuhn-Tucker non possono essere soddisfatte nel punto \hat{x} . \square

Esempio. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{3}{2}(x_1 - 3)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 2)^2 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ & x_1 + 2x_2 = 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Si consideri, il seguente punto:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I gradienti della funzione obiettivo e dei vincoli sono:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= \begin{pmatrix} 3(x_1 - 3) \\ (x_2 - 2) \end{pmatrix}, & \nabla g_1(x) &= \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \\ \nabla g_2(x) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \nabla g_3(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & \nabla h_1(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker diventano:

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu)}{\partial x_1} = 3(x_1 - 3) + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 + \mu = 0 \tag{3.69}$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu)}{\partial x_2} = x_2 - 2 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 + 2\mu = 0 \tag{3.70}$$

$$\lambda_1(x_1^2 + 2x_2^2 - 5) = 0 \tag{3.71}$$

$$\lambda_2 x_1 = 0 \tag{3.72}$$

$$\lambda_3 x_2 = 0 \tag{3.73}$$

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0 \tag{3.74}$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \quad -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0, \quad x_1 + 2x_2 = 4. \tag{3.75}$$

Il punto \tilde{x} è ammissibile. Il vincoli di non negatività delle variabili non sono attivi in \tilde{x} e, quindi, si ha:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Dalle (3.69) e (3.70) si ha:

$$\begin{aligned} -3 + 4\lambda_1 + \mu &= 0 \\ -1 + 2\lambda_1 + 2\mu &= 0. \end{aligned}$$

Da cui segue che, ponendo

$$\lambda_1 = \frac{5}{6}, \quad \mu = -\frac{1}{3},$$

il punto \tilde{x} soddisfa le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker. \square

3.4.1 Condizioni di ottimalità del secondo ordine

In questa sezione vengono brevemente riportate delle condizioni di ottimalità per problemi di ottimizzazione con vincoli di uguaglianza e disuguaglianza nel caso in cui le funzioni che descrivono il problema sono due volte continuamente differenziabili.

Per poter descrivere questi risultati è necessario introdurre degli ulteriori insiemi.

Dato un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ ed un vettore di moltiplicatori λ , ricordando l'insieme degli indici dei vincoli attivi $I(\bar{x})$ dato dalla (3.24), si introduce il seguente insieme che identifica gli indici dei vincoli detti strettamente attivi:

$$\bar{I}(\bar{x}, \lambda) = \{i \in \{1, \dots, m\} : g_i(\bar{x}) = 0, \quad \lambda_i > 0\}. \quad (3.76)$$

Dato il precedente insieme si può definire il seguente insieme di direzioni:

$$\begin{aligned} T(\bar{x}, \lambda) = \{d \in \mathbb{R}^n : & \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0 \quad \text{per ogni } i \in \bar{I}(\bar{x}, \lambda) \\ & \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0 \quad \text{per ogni } i \in I(\bar{x}) \setminus \bar{I}(\bar{x}, \lambda) \\ & \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0 \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, p\} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Il primo teorema descrive delle condizioni sufficienti di ottimalità per problemi vincolati.

Teorema 3.4.5 *Siano $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $g_i \in C^2(\mathbb{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, $h_j \in C^2(\mathbb{R}^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Se in corrispondenza del punto $x^* \in \mathcal{F}$ esistono uno scalare λ_0 e dei vettori $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ non tutti nulli per cui sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

$$\begin{aligned} \nabla_x \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) &= 0 \\ \lambda^T g(x^*) &= 0 \\ \lambda_0 \geq 0, \quad \lambda &\geq 0 \\ d^T \nabla_x^2 \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) d &> 0, \quad \text{per ogni } d \in T(x^*, \lambda), \quad d \neq 0, \end{aligned} \quad (3.78)$$

(dove $\tilde{L}(x, \lambda_0, \lambda, \mu) = \lambda_0 f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)$) allora il punto x^* è un punto di minimo locale stretto per Problema (3.23).

Prova. (La prova non fa parte del programma dell'esame). Per assurdo, si suppone che $x^* \in \mathcal{F}$ non è un minimo locale stretto. Questo implica che comunque scelto un indice k esiste un punto $x_k \in B(x^*; 1/k) \cap \mathcal{F}$ tale che

$$f(x_k) \leq f(x^*).$$

Ricordando il Teorema B.3.2, si ha:

$$0 \geq f(x_k) - f(x^*) = \nabla f(x^*)^T (x_k - x^*) + r_1(x_k, x^*), \quad (3.79)$$

$$0 \geq g_i(x_k) - g_i(x^*) = \nabla g_i(x^*)^T (x_k - x^*) + r_i(x_k, x^*), \quad i \in I(x^*), \quad (3.80)$$

$$0 = h_j(x_k) - h_j(x^*) = \nabla h_j(x^*)^T (x_k - x^*) + r_j(x_k, x^*), \quad j = 1, \dots, p, \quad (3.81)$$

con

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_1(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_i(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_j(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|} = 0.$$

Poichè le sequenza di vettori $\{(x_k - x^*)/\|x_k - x^*\|\}$ è limitata esiste un sottoinsieme di indici $K \subseteq \{1, 2, \dots\}$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} = \bar{d}. \quad (3.82)$$

Dal precedente limite e dalle (3.79),(3.80) e (3.81) si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \left[\nabla f(x^*)^T \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} + \frac{r_1(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|} \right], \\ 0 &\geq \lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \left[\nabla g_i(x^*)^T \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} + \frac{r_i(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|} \right], \quad i \in I(x^*), \\ 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \left[\nabla h_j(x^*)^T \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} + \frac{r_j(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|} \right], \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

da cui si ha:

$$0 \geq \nabla f(x^*)^T \bar{d}, \quad (3.83)$$

$$0 \geq \nabla g_i(x^*)^T \bar{d}, \quad i \in I(x^*), \quad (3.84)$$

$$0 = \nabla h_j(x^*)^T \bar{d}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (3.85)$$

Facendo il prodotto scalare $\nabla \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu)^T \bar{d}$, ricordando la prima della (3.78) e la definizione dell'insieme $\bar{I}(x^*, \lambda)$ si ottiene:

$$-\lambda_0 \nabla f(x^*)^T \bar{d} = \sum_{i \in \bar{I}(x^*, \lambda)} \lambda_i \nabla g_i(x^*)^T \bar{d} + \sum_{j=i, \dots, p} \mu_j \nabla h_j(x^*)^T \bar{d},$$

Dalla precedente uguaglianza, dalla (3.78) e dalle (3.83)-(3.85) si ha:

$$0 \leq \sum_{i \in \bar{I}(x^*, \lambda)} \lambda_i \nabla g_i(x^*)^T \bar{d} \leq 0,$$

che, insieme alla definizione dell'insieme $\bar{I}(x^*, \lambda)$ (3.76), prova che

$$0 = \nabla g_i(x^*)^T \bar{d}, \quad i \in \bar{I}(x^*, \lambda). \quad (3.86)$$

Le (3.83), (3.84), (3.86), (3.85) mostrano che

$$\bar{d} \in T(x^*, \lambda). \quad (3.87)$$

Applicando il Teorema B.3.4 al Lagrangiano $\tilde{L}(x_k, \lambda_0, \lambda, \mu)$ e ricordando nuovamente la prima delle (3.78), si ottiene:

$$\tilde{L}(x_k, \lambda_0, \lambda, \mu) - \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) = \frac{1}{2}(x_k - x^*)^T \nabla^2 \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu)(x_k - x^*) + r_2(x_k, x^*),$$

con

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_2(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|^2} = 0.$$

Poichè i punti x_k e x^* sono ammissibili e le condizioni (3.78) sono verificate si ha:

$$\tilde{L}(x_k, \lambda_0, \lambda, \mu) - \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) = \lambda_0 (f(x_k) - f(x^*)) + \lambda^T g(x_k) \leq 0,$$

da cui segue:

$$0 \geq \frac{1}{2}(x_k - x^*)^T \nabla^2 \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu)(x_k - x^*) + r_2(x_k, x^*).$$

Dividendo entrambi la precedente disuguaglianza per $\|x_k - x^*\|^2$ ed utilizzando il limite (3.82)

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \left[\frac{(x_k - x^*)^T}{\|x_k - x^*\|} \nabla^2 \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} + \frac{r_2(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|^2} \right] \\ 0 &\geq \bar{d}^T \nabla^2 \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) \bar{d} \end{aligned} \quad (3.88)$$

La precedente (3.88) e la (3.87) contraddicono l'ultima delle (3.78). \square

Dal precedente teorema si può derivare il seguente corollario.

Corollario 3.4.6 *Siano $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $g_i \in C^2(\mathbb{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, $h_j \in C^2(\mathbb{R}^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Se in corrispondenza del punto $x^* \in \mathcal{F}$ esistono uno scalare λ_0 e dei vettori $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ non tutti nulli per cui sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

$$\begin{aligned} \nabla_x \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) &= 0 \\ \lambda^T g(x^*) &= 0 \\ \lambda_0 &\geq 0, \quad \lambda \geq 0, \end{aligned} \quad (3.89)$$

e se l'insieme dei vettori $\nabla g_i(x^)$, $i \in \bar{I}(x^*, \lambda)$, $\nabla h_j(x^*)$, $j = 1, \dots, p$ contiene n vettori linearmente indipendenti allora il punto x^* è un punto di minimo locale stretto per Problema (3.23).*

Prova. La dimostrazione segue da Teorema 3.4.5 notando che l'ultima condizione delle (3.78) è banalmente soddisfatta per il fatto che $T(x^*, \lambda) = \{0_n\}$. \square

Varie condizioni necessarie di ottimalità del secondo ordine sono state proposte in letteratura. Una dei risultati più rappresentativi è il seguente teorema che descrive una versione delle condizioni di Karush-Kuhn-Tucker del secondo ordine.

Teorema 3.4.7 *Siano $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $g_i \in C^2(\mathbb{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, $h_j \in C^2(\mathbb{R}^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Siano i vettori $\nabla g_i(\bar{x})$, $i \in I(\bar{x})$, $\nabla h_j(\bar{x})$, $j = 1, \dots, p$, linearmente indipendenti. Se \bar{x} è un minimo locale di f in \mathcal{F} allora esistono e sono unici due vettori $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ tali che:*

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^*, \lambda, \mu) &= 0 \\ \lambda^T g(x^*) &= 0 \\ \lambda &\geq 0 \\ d^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda, \mu) d &\geq 0, \quad \text{per ogni } d \in T(x^*, \lambda), \end{aligned} \tag{3.90}$$

dove $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)$.

3.5 Utilizzazione delle condizione di ottimalità - problemi vincolati.

Analogamente al caso dell'ottimizzazione non vincolata, le condizioni di ottimalità per problemi vincolati possono essere utilizzate per determinare direttamente le soluzioni di problemi vincolati con strutture particolarmente semplici oppure possono essere la base per definire dei metodi iterativi in grado di cercare di risolvere problemi vincolati generali.

3.5.1 Utilizzazione delle condizioni di ottimalità per calcolare direttamente i minimi locali vincolati

Un esempio di applicazione diretta delle condizioni di ottimalità è il seguente.

Esempio. Si supponga di dover risolvere il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1 x_2 \geq 25 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Osservando i vincoli si può notare che l'ultimo vincolo è inutile in quanto è implicato dai primi due. Quindi il precedente problema può essere riscritto togliendo l'ultimo vincolo e cambiando il segno degli altri (in modo che il problema abbia la stessa struttura di quella utilizzata nella teoria).

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ & 25 - x_1 x_2 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0. \end{aligned}$$

I gradienti dei vincoli sono:

$$\nabla g_1(x) = - \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(x) = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè nell'insieme ammissibile si ha necessariamente che $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$ segue che i gradienti dei vincoli sono linearmente indipendenti in tutti i punti ammissibili. Utilizzando questa proprietà e il Teorema 3.4.4 si ottiene che ogni soluzione ottima del precedente problema è un punto di Karush-Kuhn-Tucker.

Il Lagrangiano del problema è dato da:

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1(25 - x_1x_2) - \lambda_2x_1.$$

Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker sono date da:

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1x_2 - \lambda_2 = 0 \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1x_1 = 0 \quad (3.92)$$

$$\lambda_1(25 - x_1x_2) = 0 \quad (3.93)$$

$$\lambda_2x_1 = 0 \quad (3.94)$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

$$25 - x_1x_2 \leq 0 \quad (3.95)$$

$$-x_1 \leq 0. \quad (3.96)$$

Dalle (3.95) e (3.96) si ha che

$$x_1 > 0 \quad x_2 > 0.$$

Dalle (3.94) e (3.92) segue che

$$\lambda_2 = 0 \quad \lambda_1 > 0.$$

La condizione (3.93) implica

$$x_1x_2 = 25,$$

mentre le (3.91) e (3.92) implicano

$$x_1^2 = x_2^2,$$

$$\lambda_1 = 2.$$

Dalle ultime due uguaglianze si ottiene che la soluzione ottima del problema è l'unico punto di Karush-Kuhn-Tucker del problema, cioè:

$$x_1^* = 5, \quad x_2^* = 5.$$

□

3.5.2 Utilizzazione delle condizioni di ottimalità per definire degli algoritmi per problemi di ottimizzazione vincolata

Riguardo la definizione di metodi iterativi per problemi generali di ottimizzazione vincolata, un possibile approccio è quello di cercare di utilizzare, anche per questa classe di problemi, i metodi e gli algoritmi proposti per i problemi di ottimizzazione non vincolata. L'ispirazione a caso non vincolato può seguire le seguenti due strade distinte:

- a) cercare di determinare delle direzioni che tengano conto della necessità sia di diminuire la funzione obiettivo e sia di rispettare i vincoli;
- b) minimizzare una nuova funzione che oltre a presentare l'originale funzione obiettivo contenga anche dei termini che penalizzano la violazione dei vincoli.

Determinazione di direzioni efficienti per problemi di ottimizzazione vincolata (questa sezione non fa parte del programma dell'esame)

Analogamente al caso dei metodi di ottimizzazione non vincolata, la base di questo approccio è la possibilità di dimostrare che in ogni punto, che non soddisfa le condizioni di ottimalità per problemi di ottimizzazione vincolata, si possono determinare delle direzioni lungo le quali esistono degli spostamenti che producono una diminuzione della funzione obiettivo senza perturbare eccessivamente l'ammissibilità. L'esistenza di queste particolari direzioni segue dalla negazione delle condizioni di ottimalità e dall'applicazione di determinati teoremi, che descrivono importanti proprietà riguardanti i sistemi di disequazioni lineari.

Tali risultati sono alcuni esempi di quelli che vengono detti *Teoremi dell'alternativa* in quanto evidenziano delle alternative che si incontrano nel considerare sistemi lineari.

Il primo risultato riportato è sicuramente uno dei più importanti e noti teoremi dell'alternativa (noto in letteratura come il *Teorema di Farkas*).

Teorema 3.5.1 *Comunque scelta una matrice $A \in R^{m \times n}$ ed un vettore $b \in \mathbb{R}^n$, esattamente una delle seguenti affermazioni è vera:*

i) esiste un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ che è soluzione del seguente sistema:

$$Ax \leq 0, \quad b^T x > 0; \quad (3.97)$$

ii) esiste un vettore $y \in \mathbb{R}^m$ che è soluzione del seguente sistema:

$$A^T y = b, \quad \text{con} \quad y \geq 0. \quad (3.98)$$

Alcune immediate conseguenze del precedente Teorema di Farkas sono i seguenti risultati.

Teorema 3.5.2 *Comunque scelte due matrici $A \in R^{m \times n}$ e $B \in R^{p \times n}$, esattamente una delle seguenti affermazioni è vera:*

i) *esiste un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ che è soluzione del seguente sistema:*

$$\begin{aligned} Ax &< 0 \\ Bx &= 0; \end{aligned} \quad (3.99)$$

ii) *esistono due vettori $y \in \mathbb{R}^m$ e $z \in \mathbb{R}^p$, con $y \neq 0$, che sono soluzioni del seguente sistema:*

$$A^T y + B^T z = 0, \quad \text{con} \quad y \geq 0. \quad (3.100)$$

Teorema 3.5.3 *Comunque scelte due matrici, $A \in R^{m \times n}$ e $B \in R^{p \times n}$, ed un vettore $b \in \mathbb{R}^n$, esattamente una delle seguenti affermazioni è vera:*

i) *esiste un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ che è soluzione del seguente sistema:*

$$\begin{aligned} Ax &\leq 0 \\ Bx &= 0 \\ b^T x &> 0; \end{aligned} \quad (3.101)$$

ii) *esistono due vettori $y \in \mathbb{R}^m$ e $z \in \mathbb{R}^p$, che sono soluzioni del seguente sistema:*

$$A^T y + B^T z = b, \quad \text{con} \quad y \geq 0. \quad (3.102)$$

Richiamati i necessari teoremi dell'alternativa è possibile ritornare al problema della determinazioni di direzioni di ricerca utilizzabili dal punto di vista metodologico.

Teorema 3.5.4 *Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, $h_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Se un punto ammissibile \bar{x} non è un punto di Fritz-John allora i seguenti insiemi:*

$$\begin{aligned} D_s(\bar{x}) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla f(\bar{x})^T d < 0\} \\ F_s(\bar{x}) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(\bar{x})^T d < 0 \quad i \in I(\bar{x})\} \\ H(\bar{x}) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, \quad j = 1, \dots, p\}, \end{aligned}$$

hanno intersezione non vuota.

Risultati simili possono essere dimostrati anche per punti ammissibili che non soddisfano le condizioni di Kuhn-Tucker. Un esempio è il seguente teorema:

Teorema 3.5.5 Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, $h_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Sia \bar{x} un punto ammissibile che non è un punto di Kuhn-Tucker ed in cui sia verificata l'ipotesi di Mangasarian-Fromowitz, cioè non esistono degli scalari $\alpha_i \geq 0$, $i \in I(\bar{x})$, e β_j , $j = 1, \dots, p$, non tutti nulli per cui ha:

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \alpha_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0.$$

Allora si ha che i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} D_s(\bar{x}) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla f(\bar{x})^T d < 0\} \\ F_s(\bar{x}) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(\bar{x})^T d < 0 \quad i \in I(\bar{x})\} \\ H(\bar{x}) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, \quad j = 1, \dots, p\}, \end{aligned}$$

hanno intersezione non vuota.

L'importanza algoritmica dei precedenti teoremi è chiarita dal seguente risultato.

Teorema 3.5.6 Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, $h_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Sia \bar{x} un punto ammissibile in cui si ha:

$$D_s(\bar{x}) \cap F_s(\bar{x}) \cap H(\bar{x}) \neq \emptyset,$$

dove gli insiemi $D_s(\bar{x})$, $F_s(\bar{x})$ e $H(\bar{x})$ sono stati definiti nei precedenti teoremi.

Allora per ogni $d \in D_s(\bar{x}) \cap F_s(\bar{x}) \cap H(\bar{x})$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $\alpha \in (0, \delta)$ si ha:

$$f(\bar{x} + \alpha d) < f(\bar{x}), \quad (3.103)$$

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.104)$$

$$h_j(\bar{x} + \alpha d) = r_j(\bar{x}, \alpha d) \quad j = 1, \dots, p, \quad (3.105)$$

con $r_j(\bar{x}, \alpha d) = 0$ se $h_j(x)$ è una funzione lineare oppure $\lim_{\alpha \rightarrow 0} r_j(\bar{x}, \alpha d)/\alpha = 0$.

□

I risultati precedenti mostrano che, in corrispondenza di un punto ammissibile che non soddisfa le condizioni di ottimalità, esistono delle direzioni lungo le quali ci sono degli spostamenti che

- producono una diminuzione della funzione obiettivo,
- non violano i vincoli di disuguaglianza ed i vincoli di uguaglianza lineari,
- producono violazioni "contenute" dei vincoli di uguaglianza non lineari.

Molte classi di metodi per problemi vincolati si basano su un uso efficiente di tali direzioni. La descrizione di tali metodi è relativamente articolata ed è rinviata a corsi successivi.

Utilizzazione di funzioni che penalizzano la violazione dei vincoli.

Questo secondo approccio per definire dei metodi di ottimizzazione vincolata trae ispirazione dalla dimostrazione del Teorema di Fritz-John in cui, per provare la tesi, ci riconduce alle proprietà dei minimi non vincolati di particolari funzioni che include, oltre alla funzione obiettivo del problema, anche dei termini che penalizzano la violazione dei vincoli.

In questa sezione viene riportato uno dei primi metodi proposti in letteratura in questo ambito (chiamato Metodo delle Penalità Sequenziali).

Tale metodo consiste trasformare il problema di partenza in una sequenza di minimizzazioni (approssimate) non vincolate della seguente funzione di penalità:

$$P(x; \varepsilon) = f(x) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^p h_j(x)^2, \quad (3.106)$$

La precedente funzione viene chiamata funzione di penalità (o funzione di merito). La sua espressione è ottenuta aggiungendo alla funzione obiettivo del problema originale dei termini che penalizzano la violazione dei vincoli. Il peso di questi termini aumenta al diminuire del parametro ε , tale parametro viene denominato parametro di penalità.

L'idea di fondo del Metodo delle Penalità Sequenziali è quella di produrre una sequenza di punti $\{x_k\}$ attraverso delle minimizzazioni approssimate della funzione $P(x, \varepsilon_k)$. In particolare, al crescere del numero di iterazioni, ciascun punto x_k della sequenza approssima sempre meglio un punto stazionario della funzione $P(x, \varepsilon_k)$.

Nelle iterazioni iniziali, al parametro di penalità ε_k che compare nella funzione $P(x, \varepsilon_k)$ vengono assegnati valori relativamente grandi. L'idea è che, in queste iterazioni, la funzione obiettivo del problema vincolato abbia nella espressione della funzione $P(x, \varepsilon_k)$ un peso relativamente grande.

All'aumentare delle iterazioni i punti x_k vengono ottenuti minimizzando in maniera sempre più precisa la funzione $P(x, \varepsilon_k)$ in cui si scelgono valori del parametro di penalità ε_k sempre più piccoli in modo da aumentare, sempre di più, il peso della violazione dei vincoli. In questo modo si cerca di ottenere, al limite, punti che soddisfano tutti i vincoli e che stiano in zone in cui la funzione obiettivo assume valori relativamente piccoli.

Il Metodo delle Penalità Sequenziali può essere descritto dai seguenti passi.

Metodo delle Penalità Sequenziali.

Passo 0. Dati $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0, 1)$, $\varepsilon_{-1} = \varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$, si pone $k = 0$.

Passo 1. Si pone

$$\begin{aligned}(\lambda_k)_i &= \frac{2}{\varepsilon_{k-1}} \max\{0, g_i(x_k)\}, \quad i = 1, \dots, m, \\(\mu_k)_j &= \frac{2}{\varepsilon_{k-1}} h_j(x_k), \quad j = 1, \dots, p,\end{aligned}$$

se (x_k, λ_k, μ_k) soddisfa le condizioni di KKT Stop.

Passo 2. A partire da punto x_k , si calcola il punto $x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\|\nabla P(x_{k+1}; \varepsilon_k)\| \leq \delta_k.$$

Passo 3. Se

$$\sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_{k+1})\}^2 + \sum_{j=1}^p h_j(x_{k+1})^2 \leq \theta_1 \left(\sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\}^2 + \sum_{j=1}^p h_j(x_k)^2 \right),$$

si pone $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$ altrimenti si pone $\varepsilon_{k+1} = \theta_2 \varepsilon_k$.

Passo 4. Si pone $\delta_{k+1} = \theta_3 \delta_k$, $k = k + 1$ e si ritorna al Passo 1.

Nel Passo 1 si determinano della stime dei moltiplicatori di KKT e si controlla se x_k ottenuto soddisfa le condizioni di KKT.

Nel passo 2 si effettua una minimizzazione non vincolata di $P(x, \varepsilon_k)$. Tale minimizzazione viene effettuata in maniera approssimata, infatti viene arrestata appena si ottiene un punto x_{k+1} in cui la norma del gradiente di P è inferiore o uguale al parametro δ_k . Un tale punto può essere determinato, in un numero finito di iterazioni, da un qualsiasi metodo di ottimizzazione non vincolata, tra cui il Metodo del Gradiente descritto precedentemente.

Il Passo 3 è dedicato all'aggiornamento del parametro di penalità ε_k . Se nel nuovo punto determinato x_{k+1} la violazione dei vincoli non è migliorata in maniera significativa rispetto al punto ottenuto all'iterazione precedente, il parametro di penalità viene diminuito nella iterazione successiva. Altrimenti rimane invariato.

Nell'ultimo passo viene diminuito il parametro δ_k che determina errore accettato nell'approssimare un punto stazionario della funzione $P(x, \varepsilon_k)$ attraverso una sua minimizzazione non vincolata.

Il seguente teorema descrive le proprietà asintotiche dei punti prodotti dal precedente metodo. Le ipotesi di questo teorema necessitano della definizione dell'insieme degli

indici dei vincoli attivi o violati, cioè dell'insieme:

$$\tilde{I}(\bar{x}) = \{i = 1, \dots, m : g_i(x) \geq 0\}. \quad (3.107)$$

Teorema 3.5.7 *Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, e $h_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Sia $\{x_k\}$ la sequenza di punti prodotta dal Metodo delle Penalità Sequenziali. Sia \bar{x} un punto di accumulazione della sequenza $\{x_k\}$ che soddisfa la seguente ipotesi:*

- *non esistono degli scalari $\alpha_i \geq 0$, $i \in \tilde{I}(\bar{x})$, e β_j , $j = 1, \dots, p$, non tutti nulli per cui si ha:*

$$\sum_{i \in \tilde{I}(\bar{x})} \alpha_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0.$$

Allora \bar{x} è un punto di Karush-Kuhn-Tucker.

Capitolo 4

Condizioni di Ottimalità per Particolari Problemi di Ottimizzazione

4.1 Introduzione

In questo capitolo vengono descritti alcuni esempi di classi di problemi di ottimizzazione le cui strutture particolari permettono di caratterizzare meglio, dal punto di vista matematico, i loro punti di minimo rispetto alle condizioni di ottimalità descritte nell'ultima sezione del capitolo precedente.

4.2 Problemi di programmazione convessa

Una classe importante dal punto di vista applicativo è quella dei problemi di programmazione convessa. Prima di descrivere questa particolare classe di problemi di minimizzazione, è necessario richiamare le seguenti defizioni.

Definizione 4.2.1 *Dato un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice che C è un insieme convesso se comunque scelti due punti $x, y \in C$ e comunque scelto un scalare $\alpha \in [0, 1]$ si ha che*

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C.$$

Definizione 4.2.2 *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è convessa su C se comunque scelti due punti $x, y \in C$ e comunque scelto un scalare $\alpha \in [0, 1]$ si ha che*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y);$$

si dice che f è strettamente convessa su C se comunque scelti due punti $x, y \in C$, con $x \neq y$, e comunque scelto un scalare $\alpha \in (0, 1)$ si ha che

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Definizione 4.2.3 Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è concava su C se comunque scelti due punti $x, y \in C$ e comunque scelto un scalare $\alpha \in [0, 1]$ si ha che

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y);$$

si dice che f è strettamente concava su C se comunque scelti due punti $x, y \in C$, con $x \neq y$, e comunque scelto un scalare $\alpha \in (0, 1)$ si ha che

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

La seguente proposizione richiama alcune delle proprietà delle funzioni convesse.

Proposizione 4.2.4 Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso aperto. Se f è continuamente differenziabile su C allora:

(i) f è convessa su C se e solamente se per ogni $x, y \in C$ si ha:

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T(y - x);$$

(ii) f è strettamente convessa su C se e solamente se per ogni $x, y \in C$, con $x \neq y$, si ha:

$$f(y) - f(x) > \nabla f(x)^T(y - x).$$

Se f è due volte continuamente differenziabile su C allora:

(iii) f è convessa su C se e solamente se per ogni $x \in C$ si ha:

$$d^T \nabla^2 f(x) d \geq 0 \quad \text{per ogni } d \in \mathbb{R}^n;$$

(iv) f è strettamente convessa su C se per ogni $x \in C$ si ha:

$$d^T \nabla^2 f(x) d > 0 \quad \text{per ogni } d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0.$$

Le Proprietà (i) e (ii) sono particolarmente significative, come si vedrà in seguito, per lo studio dei punti di minimo di questa classe particolare di funzioni. Le Proprietà (iii) e (iv) sono delle utili condizioni per identificare la convessità di una funzione.

Analogamente al caso di funzioni convesse si può stabilire la seguente proposizione che fornisce un aiuto a riconoscere le funzioni concave.

Proposizione 4.2.5 Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso aperto. Se f continuamente differenziabile su C allora:

(i) f è concava su C se e solamente se per ogni $x, y \in C$ si ha:

$$f(y) - f(x) \leq \nabla f(x)^T(y - x);$$

(ii) f è strettamente concava su C se e solamente se per ogni $x, y \in C$, con $x \neq y$, si ha:

$$f(y) - f(x) < \nabla f(x)^T (y - x).$$

Se f è due volte continuamente differenziabile su C allora:

(iii) f è concava su C se e solamente se per ogni $x \in C$ si ha:

$$d^T \nabla^2 f(x) d \leq 0 \quad \text{per ogni } d \in \mathbb{R}^n;$$

(iv) f è strettamente concava su C se per ogni $x \in C$ si ha:

$$d^T \nabla^2 f(x) d < 0 \quad \text{per ogni } d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0.$$

A questo punto si può introdurre la classe dei problema di programmazione convessa.

Definizione 4.2.6 Si definisce problema di programmazione convessa un problema di minimizzazione del tipo:

$$\min_{x \in \mathcal{F}} f(x)$$

in cui \mathcal{F} è un insieme convesso e f è una funzione convessa su \mathcal{F} o, equivalentemente, un problema di massimizzazione del tipo:

$$\max_{x \in \mathcal{F}} f(x)$$

in cui \mathcal{F} è un insieme convesso e f è una funzione concava su \mathcal{F} .

I problemi di programmazione convessa godono di importanti proprietà descritte nei teoremi seguenti.

Proposizione 4.2.7 (Coincidenza tra minimi locali e minimi globali) Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e f una funzione convessa (strettamente convessa) su \mathcal{F} . Allora ogni punto (un punto) di minimo locale di f su \mathcal{F} è anche (l'unico) punto di minimo globale.

Prova. Sia x^* un punto di minimo locale di f su \mathcal{F} . Dalla definizione (Definizione 2.1.3) di minimo locale deve esistere una sfera aperta $B(x^*; \rho)$ con $\rho > 0$ tale che

$$f(x^*) \leq f(y), \quad \text{per ogni } y \in B(x^*; \rho) \cap \mathcal{F}. \quad (4.1)$$

Sia x un qualsiasi altro punto di \mathcal{F} . Dalla convessità di \mathcal{F} si ha che

$$z(\alpha) = (1 - \alpha)x^* + \alpha x \in \mathcal{F}, \quad \text{per ogni } \alpha \in [0, 1].$$

Poichè per $\alpha = 0$ si ha $z(0) = x^*$, è possibile trovare un valore $\bar{\alpha} \in (0, 1]$ tale che

$$z(\bar{\alpha}) = (1 - \bar{\alpha})x^* + \bar{\alpha}x \in B(x^*; \rho) \cap \mathcal{F}.$$

Da cui, sfruttando la relazione (4.1), si ottiene:

$$f(x^*) \leq f(z(\bar{\alpha})).$$

Utilizzando la convessità della funzione obiettivo si ha:

$$f(x^*) \leq f(z(\bar{\alpha})) = f((1 - \bar{\alpha})x^* + \bar{\alpha}x) \leq (1 - \bar{\alpha})f(x^*) + \bar{\alpha}f(x),$$

che, ricordando che $\bar{\alpha} > 0$, implica:

$$f(x^*) \leq f(x). \quad (4.2)$$

Poichè il punto x è stato scelto arbitrariamente in \mathcal{F} , la relazione (4.2) dimostra che il punto x^* è un minimo globale.

Se la funzione è strettamente convessa si ha, invece:

$$f(x^*) \leq f(z(\bar{\alpha})) = f((1 - \bar{\alpha})x^* + \bar{\alpha}x) < (1 - \bar{\alpha})f(x^*) + \bar{\alpha}f(x),$$

da cui:

$$f(x^*) < f(x),$$

che implica che x^* è l'unico minimo globale. \square

Proposizione 4.2.8 (Coincidenza tra punti stazionari e minimi globali) *Sia f una funzione (strettamente) convessa e continuamente differenziabile su \mathbb{R}^n . Allora un punto stazionario di f su \mathbb{R}^n è un minimo globale (l'unico minimo globale) di f su \mathbb{R}^n .*

Prova. Sia x^* un punto stazionario di f su \mathbb{R}^n , cioè un punto tale che:

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Comunque scelto $x \in \mathbb{R}^n$, se la funzione f è convessa, il punto (i) della Proposizione 4.2.4 assicura che:

$$f(x) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*)^T(x - x^*) = 0,$$

mentre se la funzione f è strettamente convessa il punto (ii) della stessa proposizione implica che:

$$f(x) - f(x^*) > \nabla f(x^*)^T(x - x^*) = 0 \quad \text{con} \quad x \neq x^*.$$

Le due precedenti relazioni dimostrano l'enunciato del teorema. \square

Proposizione 4.2.9 (Coincidenza tra punti di Karush-Kuhn-Tucker e minimi globali) *Sia dato il seguente problema vincolato*

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ a_j^T x - b_j = 0 \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (4.3)$$

e sia f una funzione (strettamente) convessa e continuamente differenziabile su \mathbb{R}^n , siano g_i , $i = 1, \dots, m$, delle funzioni convesse e continuamente differenziabili su \mathbb{R}^n . Allora un punto di Karush-Kuhn-Tucker del Problema 4.3 è un minimo globale (l'unico minimo globale) del Problema 4.3.

Prova. Prima di tutto si può dimostrare che l'insieme ammissibile del Problema 4.3 è un insieme convesso. Infatti comunque presi due punti \hat{x} e \tilde{x} tali che:

$$\begin{aligned} g_i(\hat{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad a_j^T \hat{x} - b_j = 0, \quad j = 1, \dots, q, \\ g_i(\tilde{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad a_j^T \tilde{x} - b_j = 0, \quad j = 1, \dots, q, \end{aligned}$$

si ha che il punto $\bar{x} = \alpha \hat{x} + (1 - \alpha)\tilde{x}$, per ogni $\alpha \in [0, 1]$, soddisfa:

$$\begin{aligned} g_i(\bar{x}) = g_i(\alpha \hat{x} + (1 - \alpha)\tilde{x}) \leq \alpha g_i(\hat{x}) + (1 - \alpha)g_i(\tilde{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ a_j^T \bar{x} - b_j = a_j^T (\alpha \hat{x} + (1 - \alpha)\tilde{x}) - b_j = \alpha b_j + (1 - \alpha)b_j - b_j = 0, \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Sia x^* un punto di Karush-Kuhn-Tucker del Problema 4.3 e siano λ^* e μ^* i corrispondenti moltiplicatori. Sia, ora, $x \in \mathbb{R}^n$ un qualsiasi punto ammissibile per il Problema 4.3, cioè un punto che soddisfa

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad a_j^T x - b_j = 0, \quad j = 1, \dots, q. \quad (4.4)$$

Si ha che $\lambda^* \geq 0$ ed utilizzando la (4.4) si ha

$$\lambda_i^* g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.5)$$

da cui, utilizzando di nuovo la (4.4), si ha:

$$f(x) \geq f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* (a_j^T x - b_j). \quad (4.6)$$

Dal fatto che f e g_i , $i = 1, \dots, m$ sono convesse e continuamente differenziabili e dalla linearità dei vincoli di uguaglianza si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*), \\ g_i(x) &\geq g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*), \quad i = 1, \dots, m \\ a_j^T x - b_j &= a_j^T (x - x^*), \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Utilizzando le relazioni (4.7) nella (4.6) si ottiene:

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* (g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*)) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* (a_j^T (x - x^*)). \quad (4.8)$$

che può essere riscritta mettendo in evidenza il vettore $(x - x^*)$:

$$f(x) \geq f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) + \left(\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* a_j \right)^T (x - x^*). \quad (4.9)$$

da cui, tenendo conto che $\nabla h_j = a_j$, $j = 1, \dots, q$, si ottiene:

$$f(x) \geq f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) + \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*)^T (x - x^*). \quad (4.10)$$

Poichè, x^* è un punto di Kuhn-Tucker si ha che:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0, \quad \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.11)$$

In conclusione la (4.10) e la (4.11) implicano che, comunque scelto un punto ammissibile x per il Problema 4.3, si ha

$$f(x) \geq f(x^*).$$

Che dimostra che il punto di Kuhn-Tucker x^* è un minimo globale del Problema 4.3. Se la funzione f fosse strettamente convessa allora la prima delle relazioni (4.7) potrebbe essere sostituita da

$$f(x) > f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*)$$

Ripetendo gli stessi passaggi fatti in precedenza, si arriverebbe alla conclusione che, comunque scelto un punto ammissibile x per il Problema 4.3, si avrebbe

$$f(x) > f(x^*),$$

dimostrando che il punto x^* è l'unico minimo globale del Problema 4.3. \square

4.3 Problemi di programmazione concava

Un'altra classe di problemi di minimizzazione particolarmente importante è quella dei problemi di programmazione concava. Infatti questi particolari problemi di ottimizzazione sono in grado di modellizzare numerosi problemi che nascono nel campo dell'economia. Inoltre è possibile dimostrare che, sotto opportune ipotesi, molti problemi di ottimizzazione combinatoria possono essere trasformati in problemi (continui) di programmazione concava.

Si definisce *problema di programmazione concava* un problema di *minimizzazione* del tipo:

$$\min_{x \in \mathcal{F}} f(x)$$

in cui \mathcal{F} è un *insieme convesso* e f è una *funzione concava* su \mathcal{F} o, equivalentemente, un problema di *massimizzazione* del tipo:

$$\max_{x \in \mathcal{F}} f(x)$$

in cui \mathcal{F} è un *insieme convesso* e f è una *funzione convessa* su \mathcal{F} .

I problemi di programmazione concava sono molto più “difficili” di quelli convessi. La difficoltà principale risiede nel fatto che i problemi concavi presentano normalmente molti punti di minimo locale che non sono punti di minimo globale.

Tuttavia, la particolare struttura della funzione obiettivo di questi problemi fornisce comunque informazioni importanti circa i suoi punti di minimo globale. Infatti la seguente proposizione dimostra che le soluzioni ottime dei problemi di programmazione concava, ove esistano, appartengono alla frontiera dell'insieme ammissibile.

Teorema 4.3.1 (Assenza di soluzioni ottime interne) *Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e sia f una funzione concava e non costante su \mathcal{F} . Allora, se esiste un punto di minimo globale di f su \mathcal{F} , questo appartiene alla frontiera di \mathcal{F} .*

Prova. Supponiamo che il problema ammetta soluzione e che x^* sia una soluzione ottima. Poichè, per ipotesi, f non è costante su \mathcal{F} deve esistere un punto $\hat{x} \in \mathcal{F}$ tale che

$$f(\hat{x}) > f(x^*).$$

Supponiamo ora che $x \in \mathcal{F}$ sia un punto interno all'insieme ammissibile. Deve allora esistere una sfera aperta $B(x; \rho)$ con centro in x e raggio $\rho > 0$ tutta contenuta in \mathcal{F} . Sulla retta passante per \hat{x} e x possiamo allora determinare un $y \in B(x; \rho) \subset \mathcal{F}$ tale che x appartenga al segmento di estremi \hat{x} e y e risulti $y \neq x$, ossia possiamo trovare un α con $0 \leq \alpha < 1$ tale che

$$x = (1 - \alpha)\hat{x} + \alpha y.$$

Per la concavità di f e l'ipotesi che sia $f(\hat{x}) > f(x^*)$, tenendo conto del fatto che $f(y) \geq f(x^*)$ e che $1 - \alpha > 0$ (perchè $y \neq x$), si ottiene:

$$f(x) \geq (1 - \alpha)f(\hat{x}) + \alpha f(y) > (1 - \alpha)f(x^*) + \alpha f(x^*) = f(x^*).$$

Ciò dimostra che $f(x) > f(x^*)$ e quindi che non può esistere una soluzione ottima in un punto interno. \square

Capitolo 5

Dualità per i Problemi di Programmazione Non Lineare

5.1 Introduzione

In questo capitolo viene introdotta la teoria della dualità nel campo della programmazione matematica. Tale teoria fornisce risultati particolarmente importanti sia dal punto di vista teorico che da quello algoritmico.

In particolare la teoria della dualità permette di associare ad un dato problema di ottimizzazione un suo *Problema Duale*. Sotto determinate ipotesi il Problema Duale può presentare stretti legami con il problema di partenza (detto *Problema Primale*) e, allo stesso tempo, avere una struttura più favorevole per eventuali analisi teoriche oppure più adatta ad essere sfruttata dal punto di vista computazionale.

5.2 Problema Primale Generale e Punti di Sella

Come punto di partenza della trattazione fatta in questo capitolo si considera il seguente problema di minimizzazione:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \\ & x \in X, \end{aligned} \tag{5.1}$$

dove $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Quindi, in questo caso, l'insieme ammissibile è dato da:

$$\mathcal{F} = \{x \in X : g(x) \leq 0, h(x) = 0\}. \tag{5.2}$$

In connessione al precedente problema di minimo (5.1) si può richiamare la funzione Lagrangiana $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ data da:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x), \tag{5.3}$$

e si può introdurre la seguente definizione di punto di sella della funzione Lagrangiana (5.3).

Definizione 5.2.1 Una tripla $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ con $\bar{x} \in X$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda} \geq 0$ e $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ è detta punto di sella della funzione Lagrangiana (5.3) se per ogni $x \in X$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \geq 0$ e per ogni $\mu \in \mathbb{R}^p$

$$L(\bar{x}, \lambda, \mu) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}). \quad (5.4)$$

Nel seguito, dato un punto di sella $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$, i corrispondenti vettori $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ vengono indicati come *moltiplicatori di Lagrange* per distinguerli da quelli di Fritz-John o quelli di Karush-Kuhn-Tucker precedentemente introdotti.

Attraverso l'esistenza di punti di sella è possibile dare una importante condizione sufficiente di ottimalità per il Problema 5.1.

Teorema 5.2.2 Siano $f \in C(\mathbb{R}^n)$ e $g_i \in C(\mathbb{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, e $h_j \in C(\mathbb{R}^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Se (x^*, λ^*, μ^*) è un punto di sella della funzione Lagrangiana (5.3) allora valgono le seguenti relazioni:

$$x^* \in X, \quad g(x^*) \leq 0, \quad h(x^*) = 0 \quad \text{ammissibilità primale} \quad (5.5)$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{ammissibilità duale} \quad (5.6)$$

$$L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \min_{x \in X} L(x, \lambda^*, \mu^*), \quad \text{ottimalità Lagrangiana} \quad (5.7)$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{complementarità.} \quad (5.8)$$

Inoltre il punto x^* è un minimo globale del Problema 5.1

Prova. Sia (x^*, λ^*, μ^*) un punto di sella della funzione Lagrangiana (5.3).

Dalla disuguaglianza di sinistra della (5.4) segue che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \geq 0$ e per ogni $\mu \in \mathbb{R}^p$, si ha:

$$f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x^*) \leq f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h_j(x^*),$$

da cui segue:

$$\sum_{i=1}^m (\lambda_i - \lambda_i^*) g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p (\mu_j - \mu_j^*) h_j(x^*) \leq 0. \quad (5.9)$$

Se, per ogni $l = 1, \dots, m$, si pone $\lambda_l = \lambda_l^* + 1$, $\lambda_i = \lambda_i^*$, per $i = 1, \dots, m$ e $i \neq l$, e si pone $\mu_j = \mu_j^*$, per $j = 1, \dots, p$, la (5.9) implica:

$$g_l(x^*) \leq 0, \quad l = 1, \dots, m. \quad (5.10)$$

Se, per ogni $\hat{l} = 1, \dots, p$, si pone $\mu_{\hat{l}} = \mu_{\hat{l}}^* + 1$, $\mu_j = \mu_j^*$, per $j = 1, \dots, p$ e $j \neq \hat{l}$, e si pone $\lambda_i = \lambda_i^*$, per $i = 1, \dots, m$, la (5.9) implica:

$$h_{\hat{l}}(x^*) \leq 0, \quad \hat{l} = 1, \dots, p. \quad (5.11)$$

Se, per ogni $\hat{l} = 1, \dots, p$, si pone $\mu_{\hat{l}} = \mu_{\hat{l}}^* - 1$, $\mu_j = \mu_j^*$, per $j = 1, \dots, p$ e $j \neq \hat{l}$, e si pone $\lambda_i = \lambda_i^*$, per $i = 1, \dots, m$, la (5.9) implica:

$$-h_{\hat{l}}(x^*) \leq 0, \quad \hat{l} = 1, \dots, p. \quad (5.12)$$

Ricordando che, per la definizione (5.2.1) di punto di sella, si ha che $x^* \in X$, le relazioni (5.10), (5.11), (5.12) dimostrano che il punto x^* è ammissibile per il Problema 5.1 e che le relazioni (5.5) sono verificate.

La relazione (5.6) segue nuovamente dalla definizione (5.2.1) di punto di sella.

La relazione (5.7) deriva invece dalla disuguaglianza di destra della (5.4).

Utilizzando di nuovo la disuguaglianza di sinistra della (5.4), ponendo $\lambda = 0$ e $\mu = 0$, e ricordando che $h(x^*) = 0$ si ottiene che:

$$(\lambda^*)^T g(x^*) \geq 0. \quad (5.13)$$

Poichè $\lambda^* \geq 0$ e $g(x^*) \leq 0$ si ha che:

$$(\lambda^*)^T g(x^*) \leq 0. \quad (5.14)$$

Le (5.13) e (5.14) dimostrano la relazione (5.8).

Per finire, la disuguaglianza destra della (5.4) e le relazioni (5.5) e (5.8) danno luogo a:

$$f(x^*) \leq f(x) + (\lambda^*)^T g(x) + (\mu^*)^T h(x), \quad (5.15)$$

da cui, ricordando che $\lambda^* \geq 0$, segue che

$$f(x^*) \leq f(x) + (\lambda^*)^T g(x) + (\mu^*)^T h(x) \leq f(x), \quad (5.16)$$

per ogni x ammissibile (cioè ogni $x \in X$, tale che $g(x) \leq 0$ e $h(x) = 0$). Quindi, la (5.16) dimostra che x^* è un minimo globale del Problema 5.1. \square

Il precedente risultato stabilisce una condizione sufficiente di ottimalità in termini di esistenza di moltiplicatori di Lagrange. Infatti il teorema afferma che se in un punto $x^* \in X$ esistono dei moltiplicatori di Lagrange (λ^*, μ^*) (cioè tali che (x^*, λ^*, μ^*) è un punto di sella) allora x^* è un minimo globale del Problema 5.1.

In generale non si può stabilire una condizione necessaria analoga. Infatti se x^* è un minimo globale del Problema 5.1 non esistono necessariamente dei moltiplicatori di Lagrange (λ^*, μ^*) cioè dei moltiplicatori tali che (x^*, λ^*, μ^*) è un punto di sella. Per poter garantire l'esistenza di tali moltiplicatori è necessario richiedere delle ipotesi sulla funzione obiettivo e sui vincoli.

Nel caso di problemi di problemi convessi e differenziabili si può stabilire l'equivalenza tra i punti di sella e i punti di Karush-Kuhn-Tucker e, quindi, l'equivalenza tra i moltiplicatori di Lagrange e quelli di Karush-Kuhn-Tucker. Tale equivalenza è mostrata dal seguente teorema in cui, per semplicità, si pone $X = \mathbb{R}^n$.

Teorema 5.2.3 Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, e $h_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Si assuma che le funzione f e g_i , per ogni $i = 1, \dots, m$, siano convessa su \mathbb{R}^n e che le funzioni h_j , $j = 1, \dots, p$ siano lineari.

Sia, inoltre, $X = \mathbb{R}^n$ nel Problema 5.1.

Allora (x^*, λ^*, μ^*) è un punto di sella della funzione Lagrangiana (5.3) se e solamente se x^* è un punto di Karush-Kuhn-Tucker del Problema 5.1 e due vettori $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ sono i corrispondenti moltiplicatori.

Prova. Sia x^* un punto di Karush-Kuhn-Tucker del Problema 5.1 e siano i due vettori $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ i corrispondenti moltiplicatori. Quindi la tripla (x^*, λ^*, μ^*) soddisfa le condizioni (3.52). Dalla convessità di f e di g_i , $i = 1, \dots, m$ e dalla linearità dei vincoli di uguaglianza h_j , $j = 1, \dots, p$, si ha:

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x - x^*), \quad (5.17)$$

$$g_i(x) \geq g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T(x - x^*), \quad i = 1, \dots, m \quad (5.18)$$

$$h_j(x) = h_j(x^*) + \nabla h_j(x^*)^T(x - x^*), \quad j = 1, \dots, p, \quad (5.19)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Ora, moltiplicare ognuna delle (5.18) per λ_i^* , $i = 1, \dots, m$, e sommarle per $i = 1, \dots, m$; moltiplicare ognuna delle (5.19) per μ_j^* , $j = 1, \dots, p$, e sommarle per $j = 1, \dots, p$. Sommando poi entrambi le disuguaglianze così ottenute, con la (5.17) si ottiene per ogni $x \in \mathbb{R}^n$:

$$L(x, \lambda^*, \mu^*) \geq L(x^*, \lambda^*, \mu^*) + \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*)^T(x - x^*). \quad (5.20)$$

Ricordando che in un punto di KKT si ha $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$, dalla (5.20) segue che:

$$L(x, \lambda^*, \mu^*) \geq L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.21)$$

Dalla definizione di punto di KKT si ha anche che $g(x^*) \leq 0$, $h(x^*) = 0$ e $(\lambda^*)^T g(x^*) = 0$ da cui segue

$$L(x^*, \lambda, \mu) \leq L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \quad \text{per ogni } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \quad \lambda \geq 0. \quad (5.22)$$

Le (5.21) e (5.22) dimostrano che (x^*, λ^*, μ^*) è un punto di sella della funzione Lagrangiana (5.3).

Sia ora (x^*, λ^*, μ^*) un punto di sella della funzione Lagrangiana (5.3) dalle (5.5)-(5.8) del Teorema 5.2.2 si ha:

$$g(x^*) \leq 0, \quad h(x^*) = 0, \quad \lambda^* \geq 0, \quad (\lambda^*)^T g(x^*) = 0, \quad (5.23)$$

$$L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda^*, \mu^*). \quad (5.24)$$

Dalla (5.24) segue che il punto x^* è il minimo globale non vincolato della funzione $L(x, \lambda^*, \mu^*)$ quindi dal Teorema 3.2.1 segue che:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0. \quad (5.25)$$

La (5.23) e la (5.25) garantiscono che x^* è un punto di Karush Kuhn Tucker del Problema 5.1 e due vettori λ^* , μ^* sono i corrispondenti moltiplicatori. \square

Perciò il precedente teorema implica che, per i problemi convessi, le ipotesi di regolarità dei vincoli che garantiscono l'esistenza dei moltiplicatori di Karush-Kuhn-Tucker garantiscono anche l'esistenza dei moltiplicatori di Lagrange.

Osservazione. Si assuma che, per ogni coppia (λ, μ) con $\lambda \geq 0$, il seguente problema abbia soluzione

$$\min_{x \in X} \{f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)\} = \min_{x \in X} L(x, \lambda, \mu). \quad (5.26)$$

Un caso, in cui la precedente ipotesi è soddisfatta, è quando l'insieme X è compatto (Teorema di Weierstrass).

Se il problema (5.26) è ben definito, un punto di sella (x^*, λ^*, μ^*) può essere ottenuto risolvendo il seguente problema

$$\max_{\substack{\lambda, \mu \\ \lambda \geq 0}} \left\{ \min_{x \in X} L(x, \lambda, \mu) \right\} \quad (5.27)$$

Infatti, per ogni (λ, μ) con $\lambda \geq 0$, si ha dalla (5.5)

$$\min_{x \in X} L(x, \lambda, \mu) \leq L(x^*, \lambda, \mu) \leq f(x^*). \quad (5.28)$$

La (5.7), la (5.6) e la (5.8) assicurano che per ogni (λ, μ) con $\lambda \geq 0$ si ha:

$$\min_{x \in X} L(x, \lambda, \mu) \leq L(x^*, \lambda, \mu) \leq f(x^*) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \min_{x \in X} L(x, \lambda^*, \mu^*). \quad (5.29)$$

5.3 Problema Duale Lagrangiano

La teoria della dualità ha come obiettivo quello di associare ad un dato problema, un problema alternativo la cui soluzione dia informazioni importanti sul problema di partenza. I risultati visti nella sezione precedente indicano che il Problema 5.1 può essere risolto determinando i punti di sella. La teoria della dualità di Lagrange (considerata in questa sezione) e quella di Wolfe (descritta nella sezione successiva) traggono ispirazione dal fatto che, sotto certe ipotesi, un punto di sella può essere determinato risolvendo il Problema 5.27.

Il Problema 5.1 viene definito *Problema Primale* a cui può essere associato il seguente *Problema Duale Lagrangiano*:

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi(\lambda, \mu) \\ \text{s.t.} \quad & \lambda \geq 0, \end{aligned} \quad (5.30)$$

dove la funzione $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ è data da:

$$\varphi(\lambda, \mu) = \inf_{x \in X} \{f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)\} = \inf_{x \in X} L(x, \lambda, \mu). \quad (5.31)$$

Si può osservare che la funzione $\varphi(\lambda, \mu)$ non è altro che il Problema 5.26 in cui il min è sostituito dal inf per tenere conto che, in generale, il Problema 5.26 potrebbe non avere soluzione.

Riguardo i legami tra il Problema Primale 5.1 e il Problema Duale 5.30 un risultato importante è il seguente.

Teorema 5.3.1 (Dualità Debole) *Siano $f \in C(\mathbb{R}^n)$ e $g_i \in C(\mathbb{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, e $h_j \in C(\mathbb{R}^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Comunque preso un punto ammissibile per il Problema Primale 5.1, cioè $x \in \mathcal{F}$ (dove \mathcal{F} è l'insieme ammissibile del Problema Primale 5.1 dato dalla (5.2)) e comunque preso un punto ammissibile per il Problema Duale 5.30, cioè $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ e $\lambda \geq 0$ si ha:*

$$\varphi(\lambda, \mu) \leq f(x). \quad (5.32)$$

Prova. Dalla definizione di φ e poichè $x \in X$, $g(x) \leq 0$ e $h(x) = 0$, $\lambda \geq 0$, si ha che

$$\varphi(\lambda, \mu) = \inf_{\tilde{x} \in X} \{f(\tilde{x}) + \lambda^T g(\tilde{x}) + \mu^T h(\tilde{x})\} \leq f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x) \leq f(x),$$

che dimostra il teorema. □

Dal precedente teorema seguono immediatamente alcune proprietà descritte nel prossimo corollario.

Corollario 5.3.2 *Siano $f \in C(\mathbb{R}^n)$ e $g_i \in C(\mathbb{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, e $h_j \in C(\mathbb{R}^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Le seguenti proprietà valgono:*

i)

$$\sup_{\lambda \geq 0} \varphi(\lambda, \mu) \leq \inf_{x \in \mathcal{F}} f(x).$$

ii) *Se un punto $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ con $\bar{\lambda} \geq 0$ ed un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ sono tali che*

$$\varphi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(\bar{x}).$$

Allora $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ è soluzione del Problema Duale 5.30 e \bar{x} è soluzione del Problema Primale 5.1.

iii) *Se*

$$\inf_{x \in \mathcal{F}} f(x) = -\infty,$$

allora

$$\varphi(\lambda, \mu) = -\infty,$$

per ogni $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ con $\lambda \geq 0$.

iv) Se

$$\sup_{\lambda \geq 0} \varphi(\lambda, \mu) = \infty,$$

allora

$$\mathcal{F} = \emptyset.$$

Prova. Il punto *i*) discende immediatamente dal Teorema 5.3.1. Sempre dal Teorema 5.3.1, per ogni (λ, μ) ammissibile per il problema duale si ha

$$\varphi(\lambda, \mu) \leq f(\bar{x}) = \varphi(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$$

e quindi $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ è una soluzione ottima del problema duale. Analogamente, per il Teorema 5.3.1, per ogni x ammissibile per il problema primale vale

$$f(x) \geq \varphi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(\bar{x})$$

e quindi \bar{x} è soluzione ottima del problema primale. Il punto *iii*) discende immediatamente dal Teorema 5.3.1. Il punto *iv*) discende dalla semplice osservazione che se esistesse un punto ammissibile per il problema primale (ovvero $\mathcal{F} \neq \emptyset$) allora, per la (5.32), il problema duale sarebbe limitato. \square

In base ai risultati precedenti (Teorema della dualità debole) si ha che, se x^* è una soluzione ammissibile del Problema Primale 5.1 e (λ^*, μ^*) è una soluzione ammissibile del Problema Duale 5.30, in generale è vera la seguente disuguaglianza:

$$\varphi(\lambda^*, \mu^*) \leq f(x^*).$$

Quando è vera la disuguaglianza stretta, cioè:

$$\varphi(\lambda^*, \mu^*) < f(x^*)$$

si dice che c'è un *gap di dualità*.

Quando si ha l'uguaglianza, cioè:

$$\varphi(\lambda^*, \mu^*) = f(x^*)$$

si dice che non c'è un gap di dualità oppure che *gap di dualità è zero*.

Il prossimo teorema mostra una condizione sufficiente ad assicurare che non c'è un gap di dualità.

Teorema 5.3.3 (Dualità Forte) *Siano $f \in C(\mathbb{R}^n)$ e $g_i \in C(\mathbb{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, e $h_j \in C(\mathbb{R}^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Se in corrispondenza ad un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ esistono dei moltiplicatori di Lagrange $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, cioè tali che la tripla (x^*, λ^*, μ^*) è un punto di sella della funzione Lagrangiana (5.3). Allora (λ^*, μ^*) è soluzione del Problema Duale 5.30 e x^* è soluzione del Problema Primale 5.1 ed inoltre si ha:*

$$\varphi(\lambda^*, \mu^*) = f(x^*).$$

Prova. Dalla definizione di φ si ha:

$$\varphi(\lambda^*, \mu^*) = \inf_{x \in X} \{f(x) + (\lambda^*)^T g(x) + (\mu^*)^T h(x)\}. \quad (5.33)$$

Ricordando le (5.5)-(5.8) del Teorema 5.2.2 si ottiene:

$$\varphi(\lambda^*, \mu^*) = \inf_{x \in X} L(x, \lambda^*, \mu^*) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*). \quad (5.34)$$

Questa uguaglianza e il punto ii) del Corollario 5.3.2 dimostrano il teorema. \square

Una conseguenza del precedente teorema è il fatto che, se in una coppia primale-duale c'è un gap di dualità, allora l'insieme dei moltiplicatori di Lagrange è vuoto.

Il precedente teorema descrive una condizione solamente sufficiente. Infatti ci possono essere coppie di problemi primali-duali che non presentano un gap di dualità ma che possono non avere moltiplicatori di Lagrange.

Il Teorema 5.2.3 descrive delle condizioni sufficienti ad assicurare l'esistenza dei moltiplicatori di Lagrange e, quindi per il Teorema 5.3.3, queste condizioni garantiscono l'assenza del gap di dualità.

Esempio. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \\ & 2x_1 + x_2 \leq -4. \end{aligned} \quad (5.35)$$

La Proposizione 2.2.6 assicura che il problema precedente ha una soluzione ottima. Utilizzando la convessità della funzione obiettivo e la linearità del vincolo, il Teorema 3.4.4 assicura l'esistenza di un punto di Karush-Kuhn-Tucker ed il Teorema 5.2.3 l'esistenza dei moltiplicatori di Lagrange. Il Teorema 5.3.3 garantisce, infine, l'assenza del gap di dualità.

La funzione lagrangiana è data da:

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \lambda(2x_1 + x_2 + 4).$$

Il minimo non vincolato $x(\lambda)$ della funzione convessa $L(\cdot, \lambda)$ è dato dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x(\lambda), \lambda)}{\partial x_1} &= x(\lambda)_1 + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L(x(\lambda), \lambda)}{\partial x_2} &= x(\lambda)_2 + \lambda = 0, \end{aligned}$$

che implicano:

$$x(\lambda)_1 = -2\lambda \quad (5.36)$$

$$x(\lambda)_2 = -\lambda. \quad (5.37)$$

Dalla definizione di $\varphi(\lambda)$ (5.31), dalle (5.36) e (5.37) si ottiene:

$$\varphi(\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) = L(x(\lambda), \lambda) = -\frac{5}{2}\lambda^2 + 4\lambda.$$

Dalla concavità della $\varphi(\lambda)$ si ha che la soluzione del problema duale può essere ottenuto dalla condizione

$$\frac{\partial \varphi(\lambda^*)}{\partial \lambda} = -5\lambda^* + 4 = 0,$$

che implica:

$$\lambda^* = \frac{4}{5}. \quad (5.38)$$

Dalla (5.38) si ottiene:

$$\begin{aligned} x_1^* &= -\frac{8}{5} \\ x_2^* &= -\frac{4}{5} \\ f(x^*) &= \varphi(\lambda^*) = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

□

5.4 Problema Duale di Wolfe

In questa sezione viene considerata una classe più ristretta di problemi primale rispetto a quella di Sezione 5.2. In particolare, si fa riferimento alla classe considerata nel Teorema 5.2.3 dove $X = \mathbb{R}^n$ ed il problema è descritto da

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ g_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ a_j^T x - b_j &= 0 \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (5.39)$$

dove f è una funzione convessa e continuamente differenziabile su \mathbb{R}^n e $g_i, i = 1, \dots, m$, sono funzioni convesse e continuamente differenziabili su \mathbb{R}^n .

Sotto le precedenti ipotesi, per ogni coppia (λ, μ) , con $\lambda \geq 0$, la funzione Lagrangiana $L(\cdot, \lambda, \mu)$ è una funzione convessa nella variabile x . Perciò, la Proposizione (4.2.8), assicura tutti i minimi globali non vincolati del Problema (5.26) sono dati dall'insieme:

$$x \in \mathbb{R}^n : \quad \nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0.$$

In base alle seguenti considerazioni, al Problema Primale (5.39) si può associare il seguente *Problema Duale di Wolfe*:

$$\begin{aligned} \max L(x, \lambda, \mu) \\ \nabla_x L(x, \lambda, \mu) &= 0 \\ \lambda &\geq 0, \end{aligned} \quad (5.40)$$

in cui il vincolo di uguaglianza serve ad imporre che i punti x considerati siano punti di ottimo del Problema (5.26).

Per la precedente coppia di problemi primale-duale si può stabilire un primo risultato analogo alla dualità debole del Problema Duale Lagrangiano.

Teorema 5.4.1 (Dualità di Wolfe Debole) *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e convessa su \mathbb{R}^n , siano $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e convesse su \mathbb{R}^n per ogni $i = 1, \dots, m$ e siano i vincoli di uguaglianza lineari. Comunque scelto un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ammissibile per il Problema Primale (5.39) e comunque scelto un punto $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ ammissibile per il Problema Duale (5.40) si ha:*

$$L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \leq f(\bar{x}). \quad (5.41)$$

Prova. Dalla convessità e differenziabilità di f si ha:

$$f(\bar{x}) \geq f(\tilde{x}) + \nabla f(\tilde{x})^T(\bar{x} - \tilde{x}). \quad (5.42)$$

Poichè il punto $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ è ammissibile per il Problema Duale (5.40) si ha:

$$\nabla f(\tilde{x}) = - \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla g_i(\tilde{x}) - \sum_{j=1}^p \tilde{\mu}_j a_j. \quad (5.43)$$

Sostituendo la ((5.43)) nella ((5.42)) si ottiene:

$$f(\bar{x}) \geq f(\tilde{x}) - \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla g_i(\tilde{x})^T(\bar{x} - \tilde{x}) - \sum_{j=1}^p \tilde{\mu}_j a_j^T(\bar{x} - \tilde{x}). \quad (5.44)$$

Utilizzando la convessità delle g_i , $i = 1, \dots, m$, il fatto che $\tilde{\lambda}_i \geq 0$ e che $a_j^T \tilde{x} = b_j$ si ha dalla ((5.44))

$$f(\bar{x}) \geq f(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i (g_i(\tilde{x}) - g_i(\bar{x})) + \sum_{j=1}^p \tilde{\mu}_j (a_j^T \tilde{x} - b_j). \quad (5.45)$$

da cui, ricordando che $g_i(\bar{x}) \leq 0$ e $\tilde{\lambda}_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, m$, si ottiene:

$$f(\bar{x}) \geq f(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i g_i(\tilde{x}) + \sum_{j=1}^p \tilde{\mu}_j (a_j^T \tilde{x} - b_j) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}). \quad (5.46)$$

che dimostra il teorema. □

Dal precedente teorema e dalla struttura dei Problemi (5.39) e (5.40) segue il seguente corollario.

Corollario 5.4.2 *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e convessa su \mathbb{R}^n , siano $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e convesse su \mathbb{R}^n per ogni $i = 1, \dots, m$ e siano i vincoli di uguaglianza lineari. Le seguenti proprietà valgono*

i) Se esistono un punto \bar{x} ammissibile per il Problema Primale (5.39) ed un punto $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ ammissibile per il Problema Duale (5.40) tali che:

$$L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = f(\bar{x}), \quad (5.47)$$

allora \bar{x} è una soluzione ottima per il Problema Primale (5.39) e $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ è una soluzione ottima per il Problema Duale (5.40).

ii) Se il Problema Primale (5.39) è illimitato inferiormente allora il Problema Duale (5.40) è non ammissibile.

iii) Se il Problema Duale (5.40) è illimitato superiormente allora il Problema Primale (5.39) è non ammissibile.

Prova. Punto i). Dalla ((5.47)) e dalla ((5.41)) segue che, per ogni punto (x, λ, μ) ammissibile per il Problema Duale (5.40) si ha:

$$L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = f(\bar{x}) \geq L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}), \quad (5.48)$$

mentre per ogni punto ammissibile x per il Problema Primale (5.39) si ha:

$$f(\bar{x}) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \leq f(x). \quad (5.49)$$

Le due precedenti relazioni provano che \bar{x} è una soluzione ottima per il Problema Primale (5.39) e $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ è una soluzione ottima per il Problema Duale (5.40).

Punti ii) e iii). Se esistesse un punto ammissibile per il Problema Duale (5.40), la ((5.41)) implicherebbe che il Problema Primale (5.39) sarebbe limitato inferiormente. Analogamente se esistesse un punto ammissibile per il Problema Primale (5.39), la ((5.41)) implicherebbe che il Problema Duale (5.40) sarebbe limitato superiormente. \square

Nella precedente sezione si è dimostrato che, per i problemi di programmazione convessa del tipo (5.39), i punti di sella della funzione Lagrangiana L coincidono con i punti di Karush-Kuhn-Tucker. Inoltre il Teorema (4.2.9) o il Teorema (5.2.2) mostrano che questi punti identificano dei minimi globali del Problema (5.39).

Il prossimo teorema mostra che ogni tripla di Karush-Kuhn-Tucker (punto di sella) è una soluzione ottima del Problema Duale di Wolfe (5.40).

Teorema 5.4.3 (Dualità di Wolfe Forte) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e convessa su \mathbb{R}^n , siano $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e convesse su \mathbb{R}^n per ogni $i = 1, \dots, m$ e siano i vincoli di uguaglianza lineari. Sia x^* un punto di Karush-Kuhn-Tucker del Problema Primale (5.39) e siano (λ^*, μ^*) i relativi moltiplicatori. Allora il punto (x^*, λ^*, μ^*) è una soluzione ottima del Problema Duale (5.40) e si ha:

$$L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*). \quad (5.50)$$

Prova. Se (x^*, λ^*, μ^*) è una tripla di Karush-Kuhn-Tucker soddisfa le condizioni ((3.52)) e, in particolare, soddisfa tutti i vincoli del Problema Duale (5.40). Inoltre dalla complementarità $(\lambda^*)^T g(x^*) = 0$ e dall'ammissibilità si ha:

$$L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*) + (\lambda^*)^T g(x^*) + (\mu^*)^T h(x^*) = f(x^*). \quad (5.51)$$

La prova del teorema segue dalla ((5.51)) e dal punto i) del Corollario (5.4.2) \square

Il precedente risultato ed il punto i) del Corollario (5.4.2) assicurano che, risolvendo il Problema Duale, si può ottenere il valore ottimo della funzione obiettivo del Problema Primale. Purtroppo, anche se le sue ipotesi sono verificate, il Teorema (5.4.3) non garantisce che, risolvendo il Problema Duale, si ottiene sicuramente una soluzione del Problema Primale. Infatti il teorema assicura che il punto (x^*, λ^*, μ^*) (dove x^* è una soluzione ottima del Problema Primale) è una soluzione ottima del Problema Duale, ma quest'ultimo potrebbe avere più di una soluzione. Quindi, risolvendo il Problema Duale, potremmo trovare un punto $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ (distinto da (x^*, λ^*, μ^*)) che soddisfa

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(x^*),$$

ma che contiene un sottovettore \bar{x} che non ha nessuna relazione con il Problema Primale. Richiedendo ulteriori ipotesi sul problema di partenza (5.39) è possibile assicurare che la soluzione ottima del Problema Duale fornisce anche la soluzione ottima del Problema Primale. Un esempio di un tale risultato è il seguente teorema.

Teorema 5.4.4 *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e convessa su \mathbb{R}^n e siano $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e convesse su \mathbb{R}^n per ogni $i = 1, \dots, m$. Si assuma che il Problema Primale (5.39) abbia un punto di Karush-Kuhn-Tucker x^* . Se il punto $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ è una soluzione ottima del Problema Duale (5.40) e la funzione Lagrangiana $L(x, \lambda, \mu)$ è strettamente convessa in \hat{x} allora $\hat{x} = x^*$ è una soluzione del Problema Primale (5.39) e si ha:*

$$f(x^*) = L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}). \quad (5.52)$$

Prova. (La prova non fa parte del programma dell'esame). Si assuma per assurdo che $\hat{x} \neq x^*$.

Siano (λ^*, μ^*) i relativi moltiplicatori di Karush-Kuhn-Tucker del punto x^* . Dal Teorema (5.4.3) si ha che la tripla (x^*, λ^*, μ^*) è una soluzione ottima del Problema Duale (5.40) e, quindi si ha:

$$L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}). \quad (5.53)$$

Dalla ipotesi che la funzione Lagrangiana $L(x, \lambda, \mu)$ è strettamente convessa in \hat{x} e dal punto ii) della Proposizione (4.2.4) si ottiene

$$L(x^*, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) > L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) + \nabla_x L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})^T (x^* - \hat{x}). \quad (5.54)$$

poichè il punto $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ è ammissibile per il Problema Duale (5.40) si ha che $\nabla_x L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = 0$ quindi la ((5.54)) diventa:

$$L(x^*, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) > L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*), \quad (5.55)$$

da cui segue che:

$$\hat{\lambda}^T g(x^*) > (\lambda^*)^T g(x^*). \quad (5.56)$$

Ricordando che (x^*, λ^*, μ^*) è una tripla di Karush-Kuhn-Tucker e, perciò, soddisfa la complementarità $(\lambda^*)^T g(x^*) = 0$, si ha:

$$\hat{\lambda}^T g(x^*) > 0, \quad (5.57)$$

che contraddice il fatto che il punto $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ è ammissibile per il Problema Duale ed il punto x^* è ammissibile per il Problema Primale, quindi, $\hat{\lambda} \geq 0$ e $g(x^*) \leq 0$.

Tenendo conto che (x^*, λ^*, μ^*) è una tripla di Karush-Kuhn-Tucker si ha anche

$$L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*). \quad (5.58)$$

□

Riguardo l'assunzione che la funzione Lagrangiana $L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ sia strettamente convessa in \hat{x} è da notare che è soddisfatta se la funzione obiettivo è strettamente convessa oppure se è strettamente convesso un vincolo di disuguaglianza $g_i(\hat{x})$ a cui corrisponde un moltiplicatore $\hat{\lambda}_i > 0$.

5.5 Problemi Quadratici

In questa sezione vengono descritti alcuni risultati riguardanti la teoria della Dualità di Wolfe applicata alla seguente classe di problemi di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ & A x \leq b, \end{aligned} \quad (5.59)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è simmetrica e semidefinita positiva, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

Il primo risultato descrive la particolare forma che assume il Problema Duale di Wolfe quando il Problema Primale è della forma ((5.59)).

Proposizione 5.5.1 *Considerato il Problema Primale ((5.59)), il suo Problema Duale di Wolfe è dato da:*

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T Q x + b^T \lambda \\ & Q x + A^T \lambda + c = 0 \\ & \lambda \geq 0, \end{aligned} \quad (5.60)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}^m$.

Prova. Applicando la definizione di Duale di Wolfe (5.40) si ottiene:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + \lambda^T (Ax - b) \\ & Qx + A^T \lambda + c = 0 \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Riscrivendo la funzione obiettivo si ottiene:

$$\begin{aligned} \max \quad & -\frac{1}{2}x^T Qx + x^T (Qx + c + A^T \lambda) - \lambda^T b \\ & Qx + A^T \lambda + c = 0 \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Tenendo conto del vincolo di uguaglianza nella funzione obiettivo dell'ultima formulazione si ottiene la prova della proposizione. \square

Dal Teorema (5.4.4) si ha invece il seguente risultato.

Proposizione 5.5.2 *Si consideri il Problema (5.59), si assuma che il suo insieme ammissibile non sia vuoto e che la matrice $Q \in R^{n \times n}$ sia definita positiva. La soluzione ottima del Problema ((5.59)) è data da:*

$$x^* = -Q^{-1}(A^T \lambda^* + c),$$

dove λ^* è una soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\lambda^T A Q^{-1} A^T \lambda + (A Q^{-1} c + b)^T \lambda \\ & \lambda \geq 0, \end{aligned} \tag{5.61}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}^m$.

Prova. Dalla Proposizione (2.2.8) e dal punto iv) della Proposizione (4.2.4) si ha che la funzione obiettivo del Problema (5.59) è coerciva e strettamente convessa.

Il Teorema (2.2.6), il Teorema (3.4.4) ed il Teorema (4.2.9) assicurano che il Problema (5.59) ha una unica soluzione x^* .

Il Teorema (5.4.4) indica che il punto ottimo x^* può essere ottenuto risolvendo il Problema Duale di Wolfe (5.60), nel senso che una soluzione ottima del Problema (5.60) è data da (x^*, λ^*) .

Tuttavia il fatto che la matrice Q , essendo definita positiva, è invertibile può essere sfruttato utilizzando il vincolo di uguaglianza del Problema (5.60) per calcolare la variabile x in funzione della variabile λ , cioè:

$$x = -Q^{-1}(A^T \lambda + c),$$

questa relazione può essere utilizzata nella funzione obiettivo del Problema (5.60) per eliminare la variabile x e far diventare il problema solamente dipendente dalla variabile λ . In questa maniera si arriva al Problema (5.61) e si dimostra la proposizione. \square

5.6 Problemi di Programmazione Lineare

In questa sezione si analizza la teoria della dualità sviluppata in questo capitolo si particolarizza per problemi di Programmazione Lineare.

In particolare viene considerato il seguente Problema di Programmazione Lineare considerato nel Capitolo 1:

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ Ax \geq b, \end{aligned} \tag{5.62}$$

dove $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

Il precedente problema può essere ricondotto alla struttura dei problemi di ottimizzazione considerati nei paragrafi precedenti, cioè

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ -Ax \leq -b. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Se per questo problema si costruisce il suo Problema Duale di Wolfe ((5.40)) si ottiene:

$$\begin{aligned} \max c^T x - u^T(Ax - b) \\ -A^T u + c = 0 \\ u \geq 0, \end{aligned}$$

tenendo conto del vincolo di uguaglianza nella funzione obiettivo, si ottiene:

$$\begin{aligned} \max b^T u \\ A^T u = c \\ u \geq 0. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Ciò si ottiene il Problema Duale (1.10) considerato nel Capitolo 1.

Volendo determinare il Problema Duale Lagrangiano (5.30) del Problema (5.62), la funzione φ è data da

$$\varphi(u) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{c^T x - u^T(Ax - b)\} = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{b^T u + (c - A^T u)^T x\} = \begin{cases} b^T u & \text{if } A^T u = c \\ -\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Perciò il Problema Duale Lagrangiano del Problema (5.62) coincide con quello di Wolfe (5.64) che, a sua volta, coincide di nuovo con il Problema Duale (1.10) del Capitolo 1.

Osservazione. Se si costruisce il Problema Duale di Wolfe del Problema (5.64) si ritrova il Problema (5.62). Si può quindi concludere nuovamente che il Problema Duale del Duale è il Problema Primale.

Utilizzando le proprietà descritte in questo capitolo, nel caso di problemi di Programmazione Lineare si può provare il Teorema della *dualità forte* per problemi di Programmazione Lineare enunciato nel Capitolo 1.

Teorema 5.6.1 – Teorema della Dualità Forte

Se il Problema Primale (1.9) ammette una soluzione ottima $x^ \in \mathbb{R}^n$ allora anche il Problema Duale (1.10) ammette una soluzione ottima $u^* \in \mathbb{R}^m$. Simmetricamente, se il Problema Duale (1.10) ammette una soluzione ottima $u^* \in \mathbb{R}^m$ allora anche il Problema Primale (1.9) ammette una soluzione ottima $x^* \in \mathbb{R}^n$. Inoltre i valori delle funzioni obiettivo dei due problemi all'ottimo sono uguali cioè risulta*

$$c^T x^* = b^T u^*. \quad (5.65)$$

Prova. Se il Problema Primale (1.9) ha soluzione, il Teorema (3.4.4) assicura che esistono dei moltiplicatori u^* di Karush-Kuhn-Tucker ed il Teorema (5.4.3) mostra che il vettore dei moltiplicatori u^* di Karush-Kuhn-Tucker è una soluzione ottima del Problema Duale (1.10) e che vale ((5.65)).

Se, invece, il Problema Duale (1.10) ha soluzione u^* , nuovamente il Teorema (3.4.4) ed il Teorema (5.4.3) assicurano che esiste un vettore di moltiplicatori x^* di Karush-Kuhn-Tucker che è soluzione del suo Problema Duale. La dimostrazione del teorema segue ricordando che, per i problemi di Programmazione Lineare, il duale del Problema Duale è il Problema Primale. \square

Appendice A

Richiami di Algebra Lineare

A.1 Vettori

Rappresentazione di un vettore

Ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è pensato come un vettore colonna, cioè

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza il suo trasposto x^T è il seguente vettore riga:

$$x^T = (x_1 \quad x_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad x_n).$$

Operazioni su vettori

Il prodotto tra uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ ed un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dato da:

$$\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

La somma tra due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dato da:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Il prodotto scalare tra due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ è lo scalare dato da:

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Dalla sua definizione segue la seguente proprietà:

$$x^T y = y^T x.$$

Norma di un vettore

La norma di un vettore è uno scalare definito dalle seguenti proprietà:

- 1) $\|x\| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,
 $\|x\| = 0$ se e solamente se $x = 0$
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$

Alcuni esempi di norma sono:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

La norma $\|\cdot\|_2$ è detta norma Euclidea e può essere scritta anche come $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$. Una importante proprietà (detta equivalenza delle norme) assicura che comunque scelte due norme $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_q$ esistono due scalari $c_1, c_2 > 0$ tali che si ha

$$c_1 \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq c_2 \|x\|_q \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

In particolare valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1, \\ \|x\|_1 &\leq \sqrt{n} \|x\|_2, \\ \|x\|_2 &\leq \sqrt{n} \|x\|_\infty. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Disuguaglianza di Schwarz, angolo tra vettori, vettori ortogonali

Comunque scelti due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, per la norma Euclidea vale la seguente disuguaglianza di Schwarz:

$$|x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2, \tag{A.2}$$

dove l'uguaglianza vale se e solamente se i due vettori sono collineari (cioè $x = \alpha y$ con $\alpha \in \mathbb{R}$).

Utilizzando la precedente disuguaglianza si può definire il coseno dell'angolo compreso tra due vettori:

$$\cos \theta = \frac{x^T y}{\|x\|_2 \|y\|_2}.$$

Due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ sono detti ortogonali se:

$$x^T y = 0.$$

Indipendenza lineare e rango di insieme di vettori

Dei vettori $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se non esistono degli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0.$$

Il rango di un insieme di vettori è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti contenuti nel insieme.

A.2 Matrici

Rappresentazione di una matrice

Ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è pensata come

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix},$$

che può essere rappresentata in forma più compatta

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$$

Di conseguenza la matrice trasposta $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ è data da:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e

$$A^T = [a_{ji}]_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$$

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, le sue colonne sono rappresentate vettori $a_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, n$

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mi} \end{pmatrix},$$

per cui si ha:

$$A = (a_{.1} \ a_{.2} \ \cdot \ \cdot \ a_{.n}).$$

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, le sue righe sono rappresentate vettori $a_{i.} \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$

$$a_{i.} = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{in} \end{pmatrix},$$

da cui:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1.}^T \\ a_{2.}^T \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m.}^T \end{pmatrix}.$$

Matrici quadrate

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è detta quadrata se $m = n$

Matrici simmetriche

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è detta simmetrica se è quadrata e se soddisfa la proprietà $a_{ij} = a_{ji}$ per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$.

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica coincide con la sua trasposta cioè $A = A^T$.

Operazioni su matrici

Il prodotto tra uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ ed una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è la matrice data da:

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$$

La somma tra due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è la matrice data da:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$$

Date due matrici $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ e $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ (in cui il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda) si può definire la matrice prodotto $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ data da:

$$D = AB = [d_{ij}]_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}} \quad \text{con} \quad d_{ij} = \sum_{h=1}^p a_{ih} b_{hj}.$$

Come caso particolare, si può definire il vettore $y \in \mathbb{R}^m$ che dato dal prodotto di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ed un vettore $x \in \mathbb{R}^n$:

$$y = Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{pmatrix},$$

che può anche essere riscritto nelle seguenti maniere:

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad y = \begin{pmatrix} a_1^T \cdot x \\ a_2^T \cdot x \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m^T \cdot x \end{pmatrix}$$

Dati due vettori $y \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$ ed una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si definisce il seguente scalare:

$$y^T Ax = x^T A^T y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} y_i x_j.$$

Rango di una matrice

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si definisce rango di A , $\text{rango}(A)$, il massimo numero di colonne e/o righe linearmente indipendenti.

Matrici invertibili

Una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta invertibile o non singolare se il suo determinante è diverso da zero.

Data una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- i) la matrice A è invertibile;
- ii) la matrice A^T è invertibile;
- iii) per ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $x \neq 0$ si ha che $Ax \neq 0$;
- iv) per ogni vettore $y \in \mathbb{R}^n$ esiste un unico vettore $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $y = Ax$;

v) esiste una unica matrice $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (detta matrice inversa di A) tale che

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I;$$

- vi) le colonne di A sono linearmente indipendenti;
vii) le righe di A sono linearmente indipendenti;

Norma di matrici quadrate

La norma di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ può essere definita sia interpretando la matrice come un insieme di n^2 elementi a_{ij} , con $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$, e sia pensandola come un operatore lineare da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n .

Nel primo caso si può definire come norma di A una norma vettoriale dei suoi elementi. Una norma di questo tipo è la seguente norma di Frobenius:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Nel caso che la matrice è considerata un operatore lineare si può definire una norma indotta dalla norma associata allo spazio vettoriale \mathbb{R}^n :

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

In particolare si ha:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max_{1 \leq j \leq n} \|a_{.j}\|_1 \\ \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} \|a_{i.}\|_1 \\ \|A\|_2 &= \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \end{aligned}$$

dove $\lambda_{\max}(A^T A)$ indica il massimo autovalore della matrice $A^T A$. Se A è una matrice simmetrica si ha:

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|,$$

dove $\lambda_i(A)$, con $i = 1, \dots, n$, sono gli autovalori di A .

Tra le precedenti norme valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F &\leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F, \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1, \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty. \end{aligned}$$

Date due matrici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sia la norma $\|\cdot\|_F$ che le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ vale la relazione:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Matrici simmetriche definite positive e semidefinite positive

Una matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta essere definita positiva se per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$x^T A x > 0.$$

Una matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta essere semidefinita positiva se per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$x^T A x \geq 0.$$

Una matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è definita positiva se e solamente i suoi autovalori sono positivi, cioè $\lambda_{\min}(A) > 0$.

Una matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è definita positiva se e solamente i determinanti dei suoi minori principali sono positivi.

Una matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è semidefinita positiva se e solamente i suoi autovalori sono non negativi, cioè $\lambda_{\min}(A) \geq 0$.

Data matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita semidefinita positiva esiste una matrice simmetrica $A^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

- i) $A = A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}$;
- ii) la matrice simmetrica $A^{\frac{1}{2}}$ è invertibile se e solamente se A è invertibile;
- iii) se A è invertibile si ha $A^{-1} = A^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}}$.

Data matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ allora

- i) la matrice $A^T A$ è simmetrica e semidefinita positiva;
- ii) la matrice simmetrica $A^T A$ è definita positiva se e solamente se A ha rango n ;
- iii) se $n = m$ la matrice simmetrica $A^T A$ è definita positiva se e solamente se A è invertibile.

Minimo e massimo autovalore di una matrice simmetrica

Data una matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ il suo minimo autovalore ed il suo massimo possono essere definiti come:

$$\lambda_{\min}(A) = \min \frac{x^T A x}{x^T x}, \quad \lambda_{\max}(A) = \max \frac{x^T A x}{x^T x}. \quad (\text{A.3})$$

Appendice B

Richiami di Analisi Matematica

B.1 Successioni

Limiti di successioni

Data una successione $\{x_k\}$, con $x_k \in \mathbb{R}^n$, un vettore $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è un limite della successione se per ogni ε esiste un indice k_ε tale che:

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad k \geq k_\varepsilon.$$

Quando una sequenza ha un limite si usa la notazione:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$$

e la successione è detta convergere al punto \bar{x} .

Ogni successione ha al piú un solo limite.

Per esempio la successione

$$\{x_k\} = \left\{ \frac{1}{1+k} \right\}$$

ha come limite il punto 0.

Limiti di successioni di scalari

Ogni successione di scalari non crescente (non decrescente) e limitata inferiormente (superiormente) ha un limite.

Punti di accumulazione di successioni

Data una successione $\{x_k\}$, con $x_k \in \mathbb{R}^n$, un vettore $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è un punto di accumulazione della successione se per ogni ε e per ogni \bar{k} esiste un indice $k \geq \bar{k}$ tale che:

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \varepsilon.$$

Se \bar{x} è un punto di accumulazione della successione $\{x_k\}$ allora esiste una sotto successione $\{x_k\}_{K_1}$ contenuta in $\{x_k\}$ che converge a \bar{x} (cioè ha limite in \bar{x}). Sintenticamente si scrive:

$$\lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} x_k = \bar{x}$$

Come esempio si può osservare la successione

$$\{x_k\} = \left\{ \frac{1}{1+k} + (-1)^k \right\}$$

che ha due punti di accumulazione

- il punto -1 a cui converge la sottosequenza $\{x_k\}_{K_1}$ con K_1 l'insieme degli interi dispari;
- il punto 1 a cui converge la sottosequenza $\{x_k\}_{K_2}$ con K_2 l'insieme degli interi pari.

Ogni successione limitata (cioè esiste uno scalare γ tale che $\|x_k\| \leq \gamma$) ammette un punto di accumulazione.

Se la successione $\{x_k\}$ converge a un limite \bar{x} allora tutti i punti di accumulazione coincidono con il limite \bar{x} .

Punti di accumulazione di successioni di scalari

Data una successione $\{\alpha_k\}$, con $\alpha_k \in \mathbb{R}$, il più piccolo dei suoi punti di accumulazione è caratterizzato dal seguente limite:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{l \geq k} \alpha_l,$$

e il più grande dal seguente limite:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{l \geq k} \alpha_l.$$

Se la successione $\{\alpha_k\}$ non ha punti di accumulazione si ha $\{\alpha_k\}$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \infty.$$

Insiemi chiusi

Un insieme $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso se ogni punto di accumulazione di una successione $\{x_k\}$, con $x_k \in \mathcal{A}$ per ogni k , continua ad appartenere all'insieme \mathcal{A} .

Insiemi compatti

Un insieme $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^n$ è compatto se è chiuso e limitato.

Se un insieme $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ è compatto allora ogni successione $\{x_k\}$ tale che $x_k \in \mathcal{A}$ per ogni k ha almeno un punto di accumulazione e tutti i suoi punti di accumulazione appartengono all'insieme \mathcal{A} .

B.2 Funzioni continue, vettore gradiente, matrice Hessiana

Funzioni continue

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in \bar{x} se per ogni successione $\{x_k\}$, con $x_k \in \mathbb{R}^n$ e tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$ si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(\bar{x})$$

o, equivalentemente, se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq \epsilon, \quad \text{per ogni } x \in B(\bar{x}, \delta_\epsilon).$$

L'insieme delle funzioni continue su \mathbb{R}^n viene indicato con $C(\mathbb{R}^n)$.

Funzioni continuamente differenziabili

Data una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se nel punto $x \in \mathbb{R}^n$ il seguente limite esiste

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \epsilon, \dots, x_n) - f(x)}{\epsilon}$$

e viene detto derivata parziale di f in x rispetto alla variabile x_i ed è indicato con

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \epsilon, \dots, x_n) - f(x)}{\epsilon}.$$

Se in un punto $x \in \mathbb{R}^n$ esistono tutte le derivate parziali $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, con $i = 1, \dots, n$, si può definire il vettore gradiente di f in x :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

oppure il suo vettore trasposto

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$$

Se per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ tutte le derivate parziali $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, esistono e sono continue, la funzione viene detta continuamente differenziabile.

L'insieme delle funzioni continuamente differenziabili su \mathbb{R}^n viene indicato con $C^1(\mathbb{R}^n)$.

Funzioni due volte continuamente differenziabili

Se per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ tutte le derivate parziali $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, sono continuamente differenziabili, esistono e sono continui i seguenti limiti

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(x_1, \dots, x_j + \epsilon, \dots, x_n)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\epsilon}, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tali limiti vengono detti derivate parziali seconde di f in x rispetto alla variabile x_i ed alla variabile x_j .

Si definisce Hessiano di f , la matrice definita nella seguente maniera:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Se per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ tutte le derivate parziali $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, sono continuamente differenziabili la funzione viene detta due volte continuamente differenziabile.

L'insieme delle funzioni due volte continuamente differenziabili su \mathbb{R}^n viene indicato con $C^2(\mathbb{R}^n)$.

Esempio

Data la funzione $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ si ha:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -400(x_2 - x_1^2)x_1 - 2(1 - x_1) \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -1200x_1^2 - 400x_2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix}$$

Matrice Jacobiana

Dato una funzione vettoriale $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, cioè un vettore di funzioni:

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ g_m(x) \end{pmatrix}$$

In ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ in cui il seguente limite esiste

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g_j(x_1, \dots, x_i + \epsilon, \dots, x_n) - g_j(x)}{\epsilon} = \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i},$$

viene detta derivata parziale della funzione g_j in x rispetto alla variabile x_i .

In un punto $x \in \mathbb{R}^n$ in cui esistono tutte le derivate parziali $\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}$, con $j = 1, \dots, m$ e $i = 1, \dots, n$, si può definire la matrice Jacobiana di g in x :

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} \\ \dots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x} \end{pmatrix},$$

oppure la sua matrice trasposta

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (\nabla g_1(x) \quad \nabla g_2(x) \quad \dots \quad \nabla g_m(x)).$$

Funzione lineare

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è detta lineare se ha la seguente espressione:

$$f(x) = c^T x,$$

con $c \in \mathbb{R}^n$.

Funzione affine

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è detta affine se ha la seguente espressione:

$$f(x) = c^T x + \alpha,$$

con $c \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Funzione quadratica

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è detta quadratica se ha la seguente espressione:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + q,$$

con $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $q \in \mathbb{R}$.

B.3 Teoremi della media

Teoremi della media del primo ordine

Teorema B.3.1 Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ allora per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ esiste un $\lambda \in [0, 1]$ per cui si ha:

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x + \lambda(y - x))^T (y - x).$$

Teorema B.3.2 Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni sequenza di vettori $\{y_k\}$, con $y_k \in \mathbb{R}^n$, tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x,$$

si ha:

$$f(y_k) = f(x) + \nabla f(x)^T (y_k - x) + r_1(x, y_k),$$

con

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_1(x, y_k)}{\|y_k - x\|} = 0.$$

Teoremi della media del secondo ordine

Teorema B.3.3 Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ allora per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ esiste un $\tilde{\lambda} \in [0, 1]$ per cui si ha:

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{1}{2} (y - x)^T \nabla^2 f(x + \tilde{\lambda}(y - x)) (y - x).$$

Teorema B.3.4 Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni sequenza di vettori $\{y_k\}$, con $y_k \in \mathbb{R}^n$, tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x,$$

si ha:

$$f(y_k) = f(x) + \nabla f(x)^T (y_k - x) + \frac{1}{2} (y_k - x)^T \nabla^2 f(x) (y_k - x) + r_2(x, y_k)$$

con

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_2(x, y_k)}{\|y_k - x\|^2} = 0.$$

Teoremi della media del primo ordine per funzioni vettoriali

Teorema B.3.5 Sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ per $i = 1, \dots, m$, allora per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ esistono m scalari $\lambda_i \in [0, 1]$, con $i = 1, \dots, m$, per cui si ha:

$$g(y) = g(x) + \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x + \lambda_1(y - x))}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2(x + \lambda_2(y - x))}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m(x + \lambda_m(y - x))}{\partial x} \end{pmatrix} (y - x)$$

Teorema B.3.6 Sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ per $i = 1, \dots, m$, allora per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$g(y) = g(x) + \int_0^1 \frac{\partial g(x + t(y-x))}{\partial x} (y-x) dt$$

oppure

$$\|g(y) - g(x)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \frac{\partial g(x + t(y-x))}{\partial x} \right\| \|y-x\|$$

Indice

1	Programmazione Lineare	2
1.1	Introduzione	2
1.2	Problemi di Programmazione Lineare	3
1.3	Interpretazione geometrica di un Problema di Programmazione Lineare	5
1.4	Elementi di geometria in \mathbb{R}^n	14
1.4.1	Poliedri	14
1.4.2	Vertici	16
1.5	Caratterizzazione dei Problemi di Programmazione Lineare	23
1.5.1	Il Teorema fondamentale della Programmazione Lineare	23
1.6	Dualità nella Programmazione Lineare	26
1.6.1	Problema Duale di un Problema di Programmazione Lineare	27
1.6.2	Condizioni di complementarità	32
1.7	Conseguenze del Teorema Fondamentale e Problemi di Programmazione Lineare in Forma Standard	36
1.7.1	Conseguenze del Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare	36
1.7.2	Problemi di Programmazione Lineare in Forma Standard	37
1.7.3	Vertici e Soluzioni di Base Ammissibile	40
1.8	Introduzione al metodo del simplesso	51
1.8.1	Introduzione	51
1.8.2	Criterio di ottimalità	52
1.8.3	Criterio di illimitatezza	56
1.8.4	Determinazione di una nuova base ammissibile	58
1.8.5	Calcolo della nuova forma canonica	65
1.8.6	Convergenza del metodo del simplesso	79
1.8.7	Eliminazione delle ipotesi e calcolo delle prima forma canonica	81
2	Classificazione dei problemi di ottimizzazione e Condizioni di Esisten- za	88
2.1	Introduzione	88
2.1.1	Problemi di Ottimizzazione Continua	88

2.1.2	Problemi di Ottimizzazione Discreta	91
2.1.3	Problemi di Ottimizzazione Mista	92
2.2	Condizioni di esistenza	93
2.2.1	Condizioni di esistenza per Problemi di Ottimizzazione Discreta	93
2.2.2	Condizioni di esistenza per Problemi di Ottimizzazione Continua	94
3	Condizioni di Ottimalità	100
3.1	Introduzione	100
3.2	Condizione di ottimalità per problemi di ottimizzazione non vincolata	100
3.3	Utilizzazioni delle condizione di ottimalità - problemi non vincolati.	103
3.3.1	Utilizzazione delle condizioni di ottimalità per calcolare direttamente i minimi locali	103
3.3.2	Utilizzazione delle condizioni di ottimalità per definire degli algoritmi per problemi di ottimizzazione non vincolata	104
3.4	Condizione di ottimalità per problemi di ottimizzazione vincolata.	111
3.4.1	Condizioni di ottimalità del secondo ordine	122
3.5	Utilizzazione delle condizione di ottimalità - problemi vincolati.	125
3.5.1	Utilizzazione delle condizioni di ottimalità per calcolare direttamente i minimi locali vincolati	125
3.5.2	Utilizzazione delle condizioni di ottimalità per definire degli algoritmi per problemi di ottimizzazione vincolata	127
4	Condizioni di Ottimalità per Particolari Problemi di Ottimizzazione	133
4.1	Introduzione	133
4.2	Problemi di programmazione convessa	133
4.3	Problemi di programmazione concava	138
5	Dualità per i Problemi di Programmazione Non Lineare	140
5.1	Introduzione	140
5.2	Problema Primale Generale e Punti di Sella	140
5.3	Problema Duale Lagrangiano	144
5.4	Problema Duale di Wolfe	148
5.5	Problemi Quadratici	152
5.6	Problemi di Programmazione Lineare	154
A	Richiami di Algebra Lineare	156
A.1	Vettori	156
A.2	Matrici	158
B	Richiami di Analisi Matematica	163
B.1	Successioni	163
B.2	Funzioni continue, vettore gradiente, matrice Hessiana	165
B.3	Teoremi della media	168