“Sapienza” Università di Roma - Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale

# Euristiche per il Problema del Commesso Viaggiatore

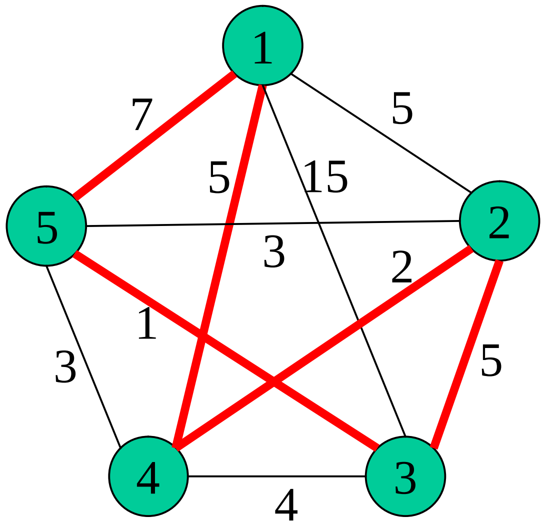
*Renato Bruni*
**bruni@dis.uniroma1.it**

Il materiale presentato è derivato da quello dei proff. A. Sassano e C. Mannino

# Il Problema del Commesso Viaggiatore

- Problema del **Commesso Viaggiatore** (Traveling Salesman Problem, **TSP**): bisogna visitare una serie di clienti e tornare al punto di partenza seguendo il percorso meno costoso
- Molti altri problemi pratici hanno questa struttura (es. spostare un macchinario che deve lavorare in tanti punti di un oggetto, passare un cavo che deve collegare vari punti, etc.)

- Abbiamo un **costo** per ogni possibile "collegamento"
- Il costo del percorso è la somma dei costi dei collegamenti percorsi (nell'esempio 7+5+2+5+1 = 20)



# Ciclo Hamiltoniano di peso minimo

- Per modellarlo, consideriamo un grafo $G(N,E)$ completo, con costi sugli archi $c \in R^E$
- Un ciclo **hamiltoniano** è un ciclo semplice, non orientato, che passa per ogni nodo di $G$. Il costo del ciclo è pari alla somma dei costi dei suoi archi
- Il problema del commesso viaggiatore (Travelling Salesman Problem, **TSP**) consiste nel trovare un **ciclo hamiltoniano di costo minimo**
- Se il grafo è non orientato, si parla di **TSP simmetrico** (quello che vedremo in dettaglio); se invece il grafo è orientato si parla di TSP asimmetrico
- Il problema appartiene alla classe di problemi combinatori con funzione obiettivo lineare ed alla casse dei problemi difficili (**NP-hard**)
- In questa lezione ci concentriamo su algoritmi euristici per il TSP simmetrico (l'estensione al caso asimmetrico è in molti casi ovvia)

# Problemi di OC con funz. obiettivo lineare

Un problema di ottimizzazione combinatoria ha questa struttura matematica:

- **Insieme base** $E = \{1,2,\ldots,n\}$ Eventi elementari *Es.* progetto *e* attivato, arco *e* scelto, connessione *e* stabilita, …

- **Costi** (o vantaggi) elementari $\{c_i\}$ associati agli elementi di $E$

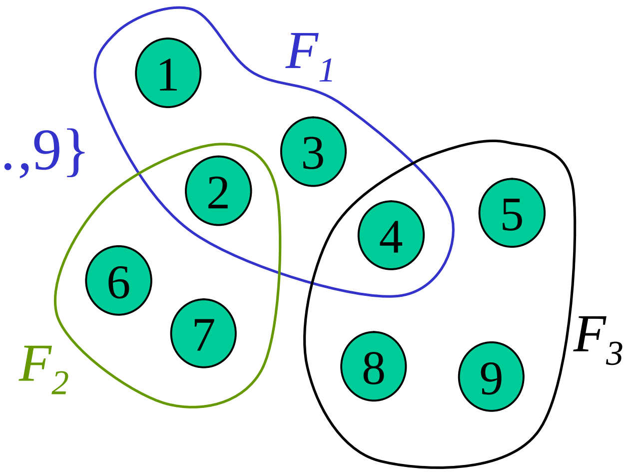
- **Soluzione Ammissibile**: sottoinsieme $F \subseteq E$ *Es.* sottoinsieme di progetti attivati che soddisfano un budget, …

- **Insieme delle soluzioni ammissibili** $S = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$

- **Costo di una soluzione** $F$ = *somma dei costi elementari* degli elementi di $F$

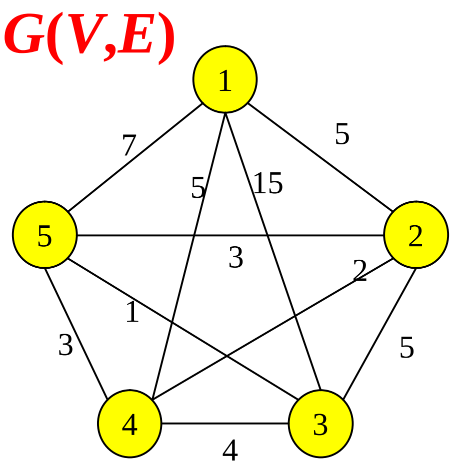
$$\boxed{c(F) = \sum_{e \in F} c(e)}$$

$E = \{1,2,\ldots,9\}$




Vogliamo: $\boxed{min\ \{c(F):\ F \in S\}}$

# TSP come problema di OC

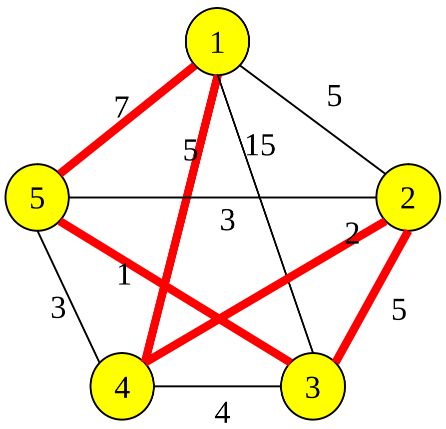



- Grafo $G(V,E)$ non orientato, completo
- $c_e$ costo arco $e \in E$

Insieme base = insieme archi $E$

Soluzione $T \subseteq E$

Costo $T$ = $\boxed{c(T) = \sum_{e \in T} c_e}$




$T$ = {(1,4), (4,2), (2,3), (3,5), (5,1)}

$c(T)$ = 5+2+5+1+7 = 20

# Algoritmo Greedy (= Avido)

- Conosciamo l'insieme base $E = \{1,2,\ldots,n\}$
- Sappiamo verificare se una soluzione appartiene all'insieme delle soluzioni ammissibili $S = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ $(F \subseteq E)$

Se $H \subseteq F$ → $H$ è soluzione parziale (può diventare ammissibile aggiungendo elementi)

- *Costo di una soluzione parziale* $H$ = $\boxed{c(H) = \sum_{e \in H} c(e)}$

Idea base

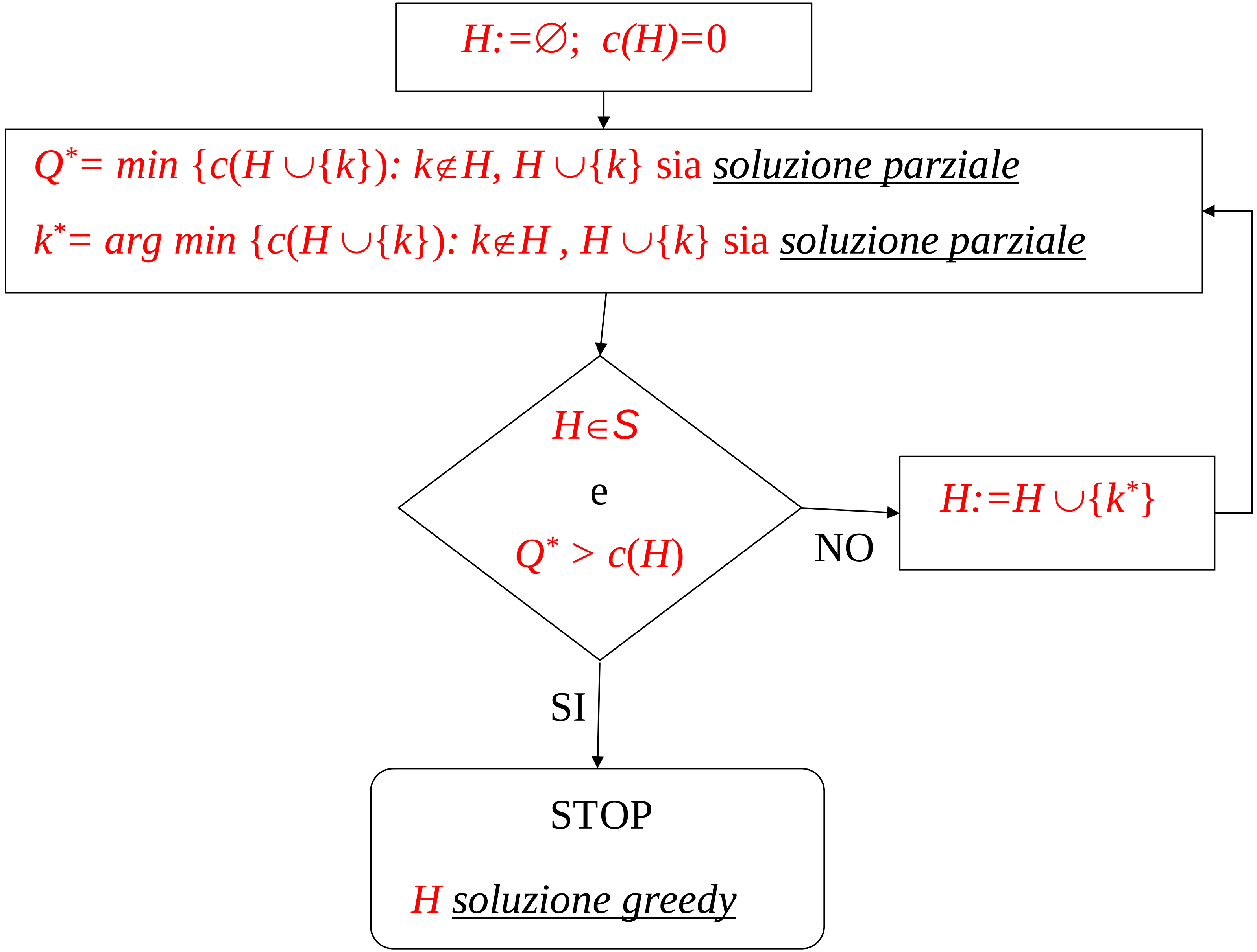
Costruire una sequenza di soluzioni parziali $H_0, H_1, H_2, H_3 \ldots$:

a. a partire dall'insieme vuoto (*soluzione parziale* $H_0$)

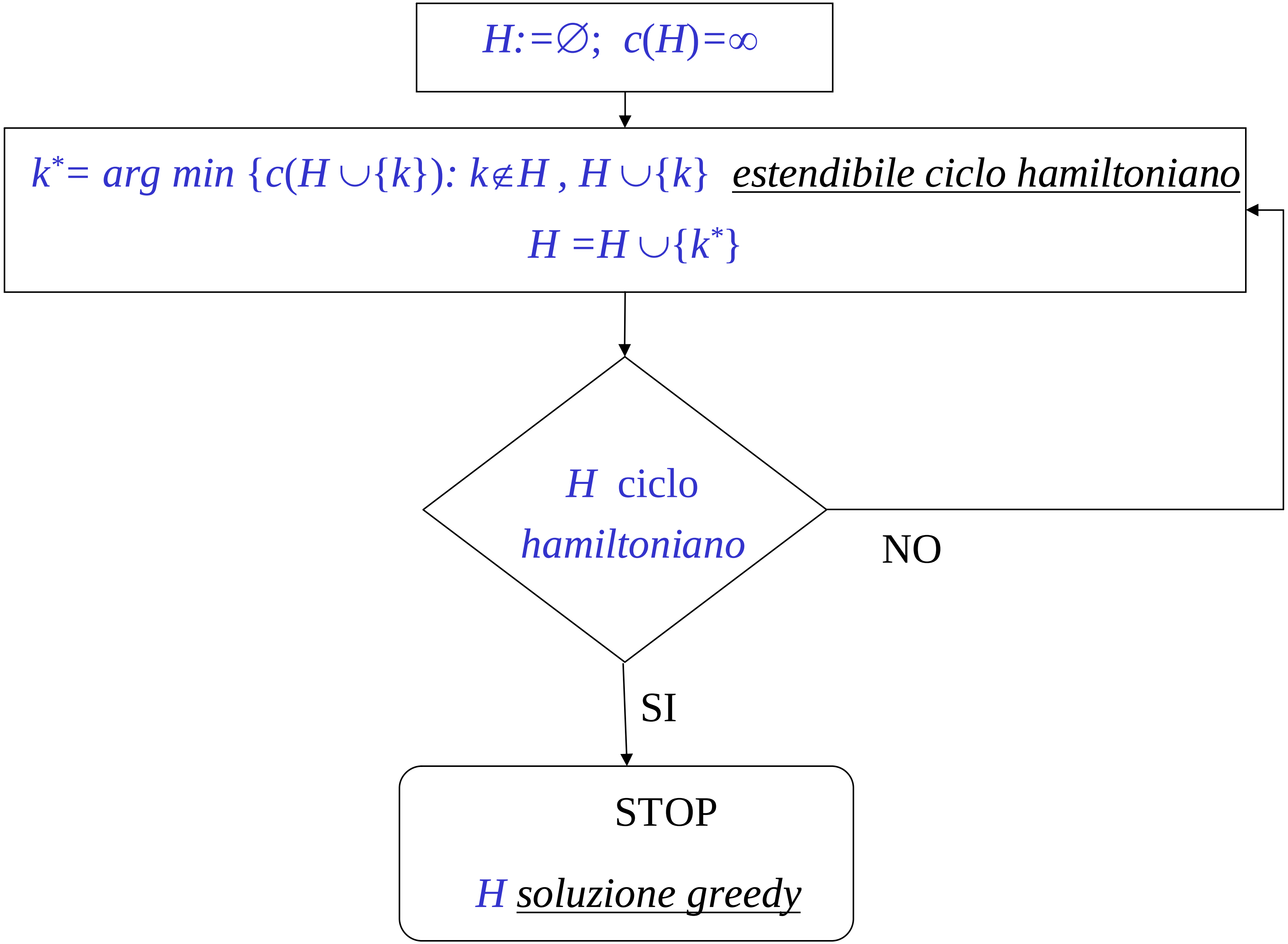
b. aggiungendo, ad ogni passo, l'elemento che produce la soluzione parziale con il minimo costo.

c. arrestandosi quando la soluzione parziale corrente è una soluzione ammissibile (o quando peggiora aggiungendo altri elementi, per problemi in cui la soluzione vuota è ammissibile)

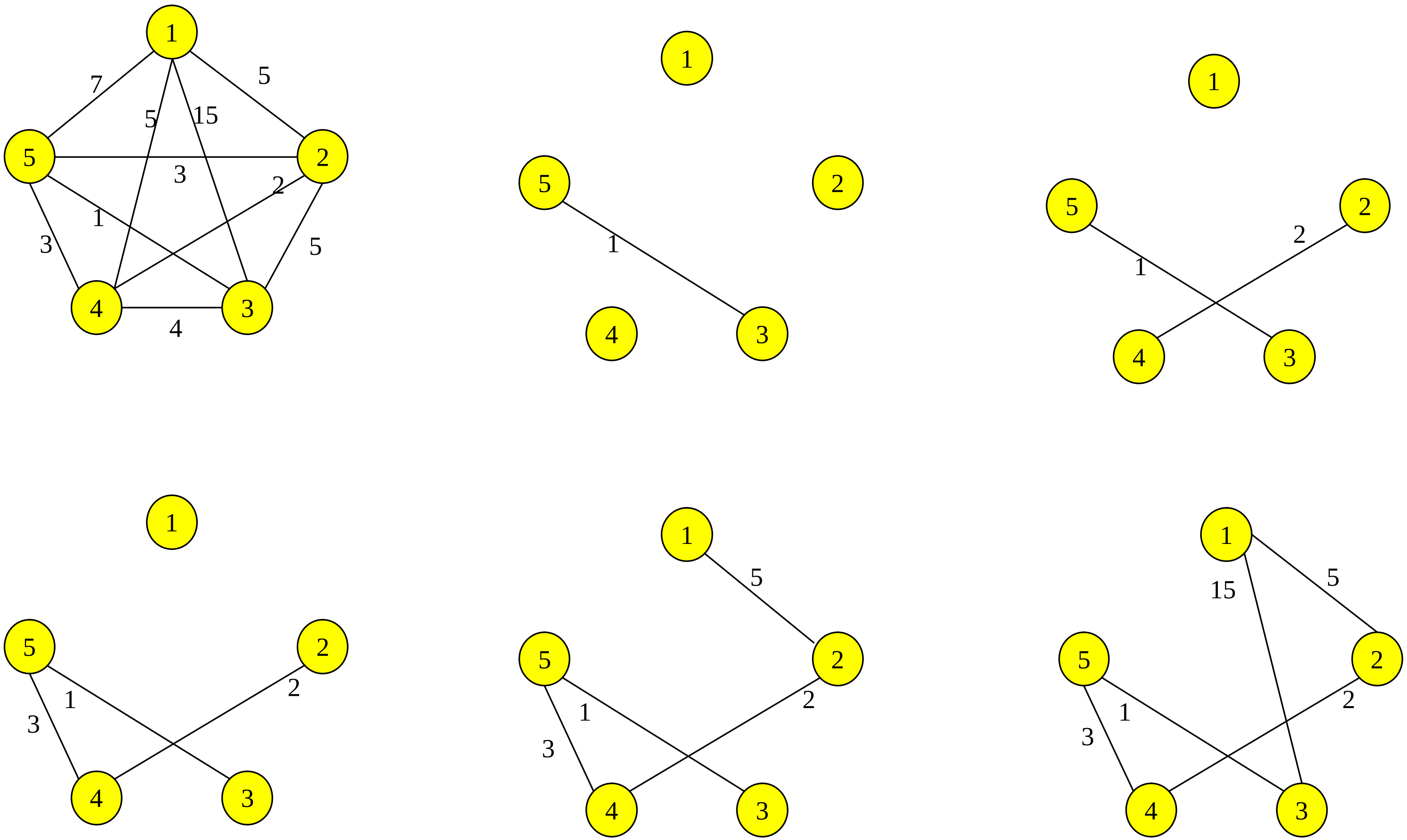
# Struttura Greedy Generica



# Struttura Greedy per il TSP



# Esempio Applicazione Greedy al TSP




$c(T) = 26$

# Osservazioni sul Greedy

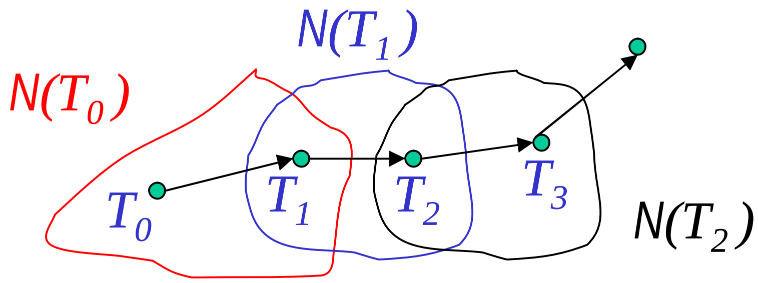
- È una euristica **costruttiva** (costruisce una soluzione)
- Quando un elemento è stato scelto non viene più **abbandonato**
- Ciò rende l'algoritmo **veloce**, ma la scelta degli elementi più **convenienti** sul momento può **obbligare** in seguito a dover prendere elementi **poco convenienti** (nell'esempio visto, alla fine si è obbligati a prendere l'arco che costa 15, cioè il più costoso del grafo)
- Pertanto, la soluzione trovata nel caso del problema del Commesso Viaggiatore può essere anche molto scadente

# Algoritmo di Ricerca Locale (Local Search)

• Le soluzioni ammissibili formano un insieme $S = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ $(F_i \subseteq E)$

• Per ogni soluzione ammissibile $F$ posso allora definire un <u>*intorno*</u> $N(F) \subseteq S$ (l'insieme delle sol. ammiss. simili a $F$ )

Idea base




Costruire una sequenza di soluzioni ammissibili $T_0, T_1, T_2, T_3 \ldots$:

a. a partire da una soluzione ammissibile $T_0$

b. <u>individuando</u>, al passo $k$, la <u>soluzione di minimo</u> <u>costo</u> $T_k$ appartenente all'intorno $N(T_{k-1})$ della soluzione corrente $T_{k-1}$ .

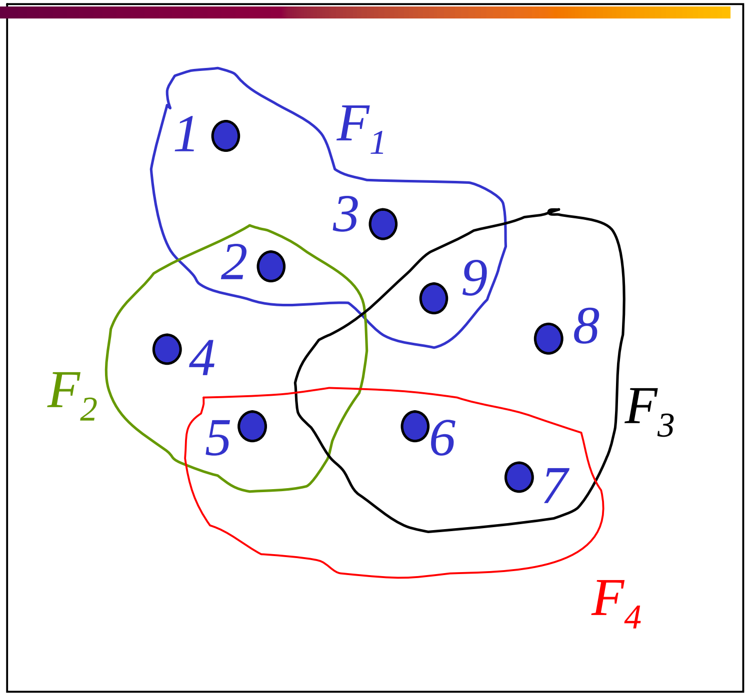
c. <u>arrestandosi</u> quando ogni soluzione appartenente all'intorno $N(T_{k-1})$ ha un valore della funzione obiettivo <u>maggiore di</u> $c(T_{k-1})$ ovvero $c(T_{k-1}) < c(T_k)$

# Sistemi di Intorni

Esempi di intorni

$N(F_1)=\{F_2,F_4\}$ $N(F_2)=\{F_1,F_4\}$

$N(F_4)=\{F_1,F_2,F_3\}$ $N(F_3)=\{F_2\}$




- Serve un sistema di intorni, cioè un criterio per avere ogni volta l'intorno della soluzione. Ne esistono vari:

$I=\{N(F_i): F_i \in S\}$ *Sistema di Intorni in* $S$

$F \in N_+(F_i) \Leftrightarrow F = F_i \cup k : k \notin F_i, F \in S$ *Intorno "greedy"*

$F \in N_-(F_i) \Leftrightarrow F = F_i - k : k \in F_i, F \in S$ *Intorno "reverse greedy"*

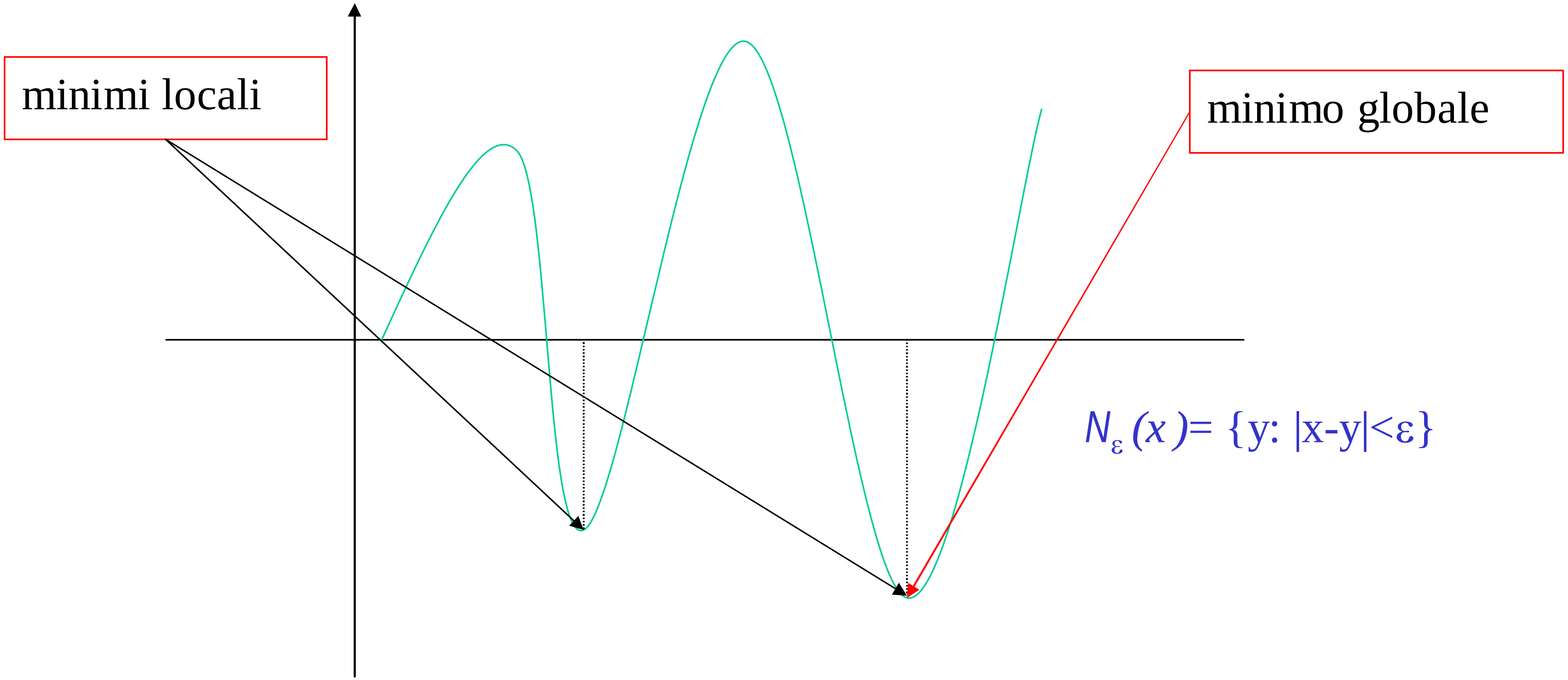
$F \in N_s(F_i) \Leftrightarrow F_i - \{k\} \cup \{j\} : k \in F_i,\ j \notin F_i, F \in S$ *Intorno di "scambio"*

$F \in N_s(F_i) \Leftrightarrow F_i - \{h,k\} \cup \{j,i\} : h,k \in F_i,\ j,i \notin F_i, F \in S$ *Intorno "2-scambio"*

# Minimi Locali e Minimi Globali

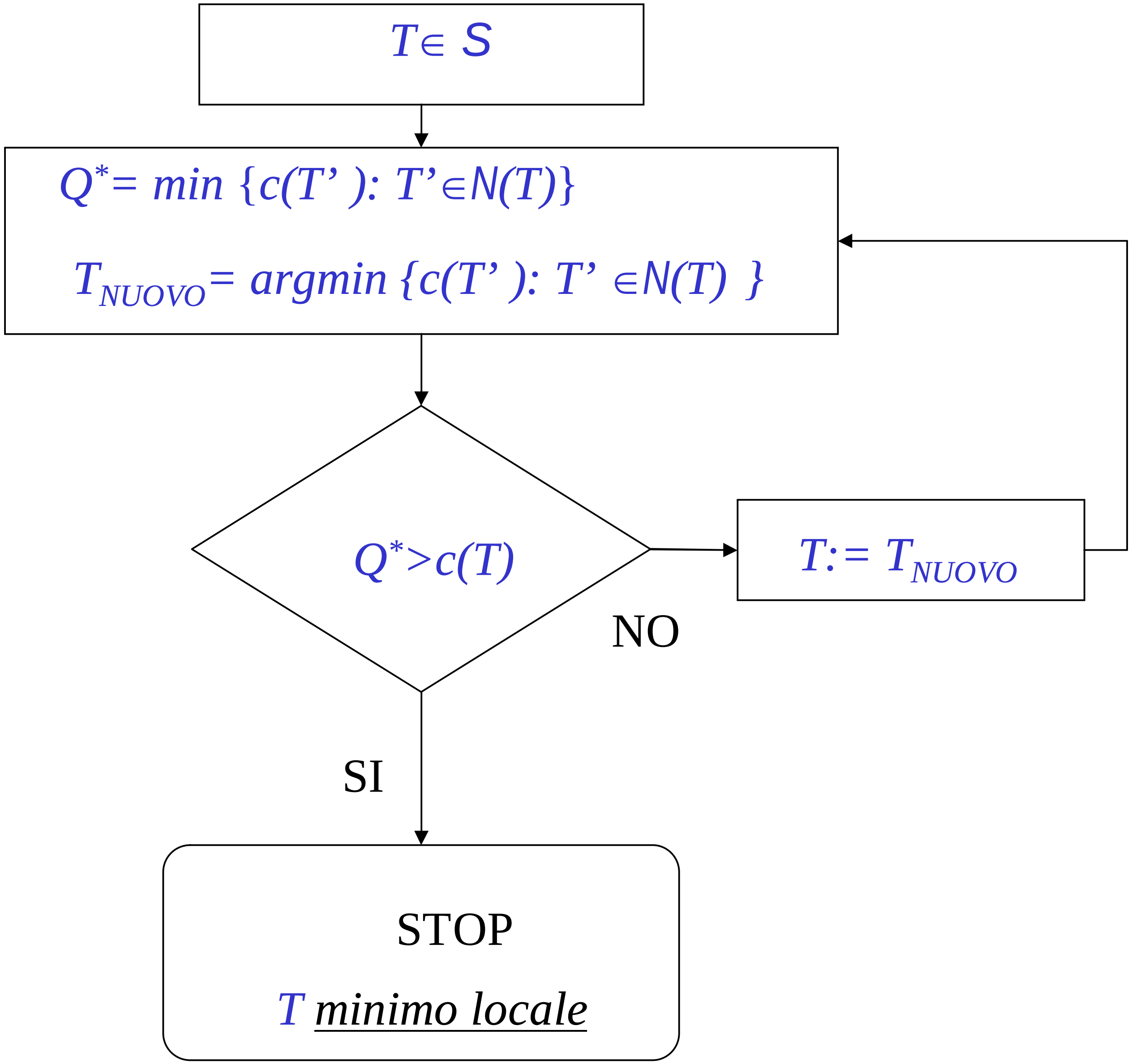
$F^*$ <u>minimo globale</u> $\Leftrightarrow$ $c(F^*) \leq c(F)$ *per ogni* $F \in S$

$F^*$ <u>minimo locale</u> $\Leftrightarrow$ $c(F^*) \leq c(F)$ *per ogni* $F \in N\,(F^*)\}$

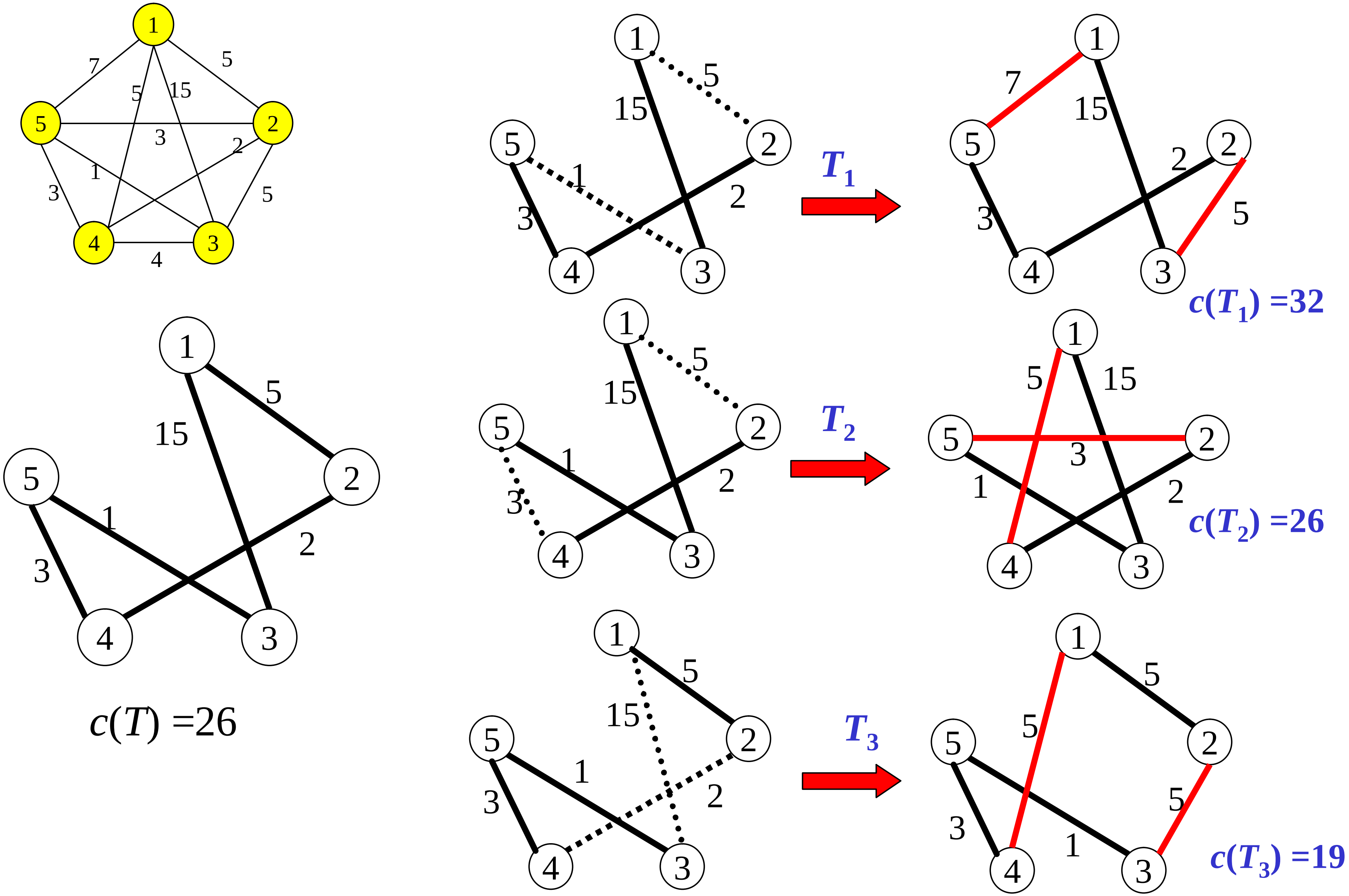



<u>L'algoritmo di **ricerca locale** individua un **minimo locale**</u>

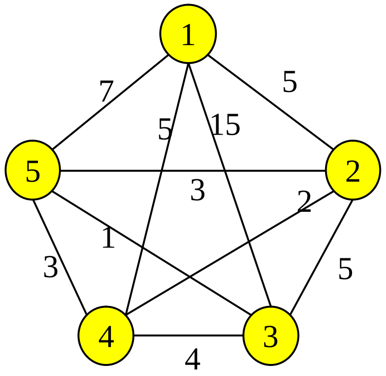
# Struttura Ricerca Locale

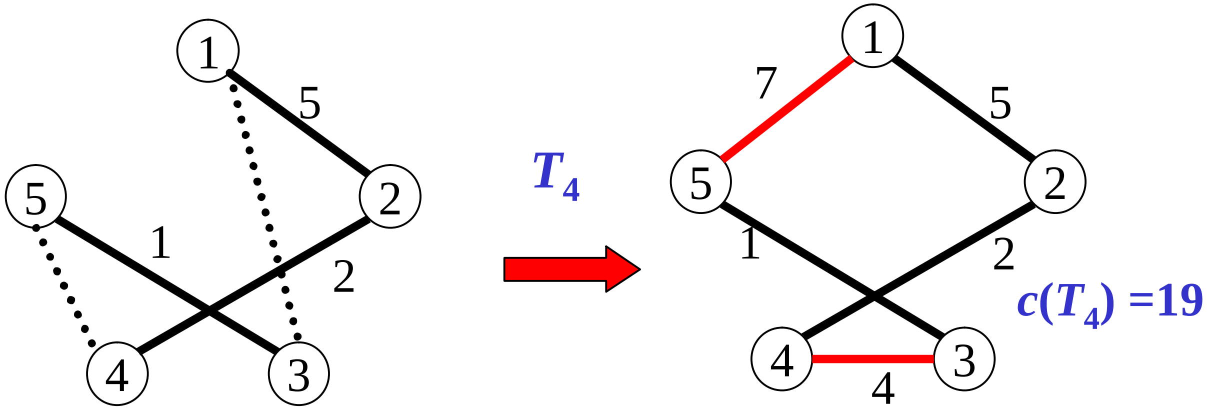


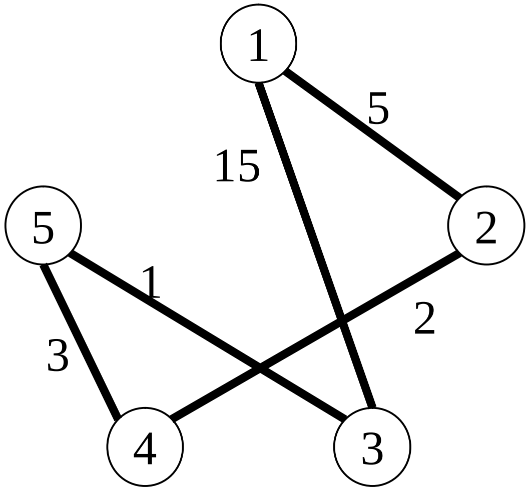
# Intorno 2-scambio (1/2)



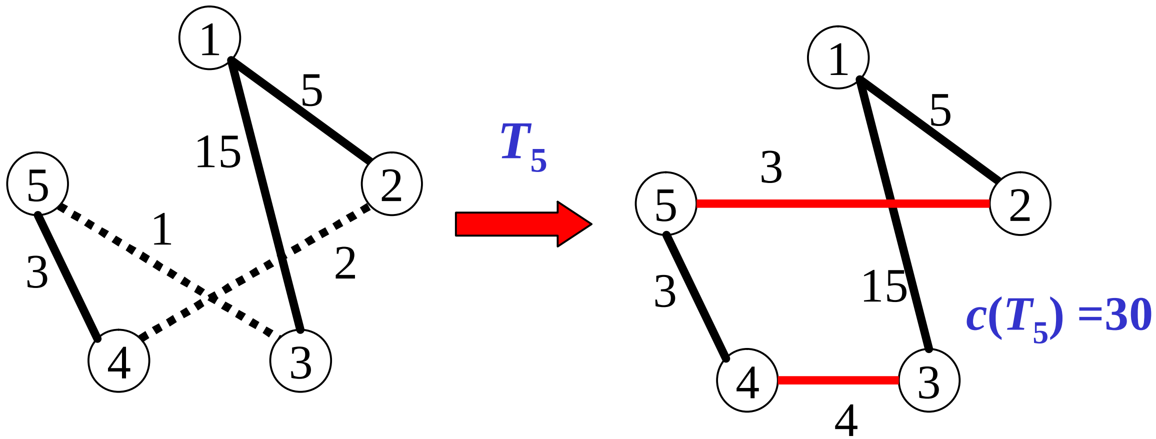
# Intorno 2-scambio (2/2)




$c(T)$ =26




Non ci sono altri modi di fare
2-scambio: ho generato tutto $N(T)$

- La miglior soluzione in $N(T)$ è $T_4$ (o anche $T_3$, sono equivalenti )

# Osservazioni sulla Ricerca Locale

- È una euristica **migliorativa** (ha bisogno di una soluzione di partenza)
- Per questo viene spesso eseguita dopo un Greedy
- Se l'intorno è costituito da pochi elementi, generarlo ed esaminarlo è **veloce**, ma le probabilità di ottenere miglioramenti sono **basse**.
- Al contrario, se l'intorno è costituito da molti elementi, le probabilità di ottenere miglioramenti sono più **alte**, ma generarlo ed esaminarlo potrebbe essere **costoso**
- Sarebbe conveniente riuscire ad usare intorni vasti ma di rapida soluzione

# Intorni Esponenziali

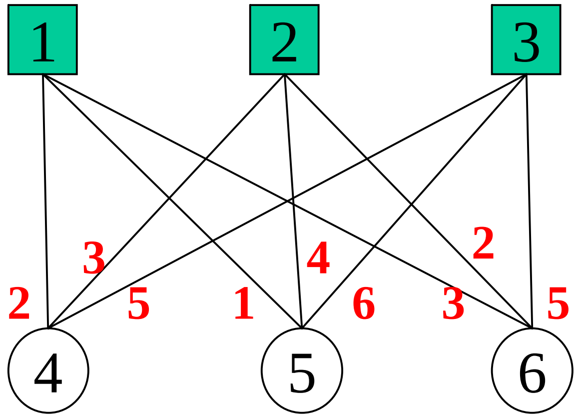
- A ogni iterazione dell'algoritmo di *LS* viene risolto un problema di ottimizzazione *locale*: $min\ \{c(T')\colon T' \in N(T)\}$
- Il problema di ottimizzazione *locale* è analogo al problema originale, ma l'insieme di soluzioni ammissibili (intorno) è ristretto.
- Negli esempi visti finora, la soluzione del problema locale può essere ottenuta efficientemente enumerando le soluzioni ammissibili (*poche*)
- Idea alternativa: definizione di un intorno "*grande*" ma tale che il problema di ottimizzazione *locale* sia risolvibile efficientemente
- Questo tipo di *LS* è chiamata *Ricerca Locale con intorni esponenziali*.
- Consideriamo il caso dell'intorno detto *ASSIGN* per il *TSP*.
- Per risolvere il problema di ottimizzazione associato, dobbiamo introdurre il *problema del matching* in grafi *bipartiti*.

# Matching su grafi bipartiti

- Grafo bipartito completo: $H\ (Z,A)$:

$Z = U \cup W \quad A = \{(u,w): u \in U, w \in W\}$

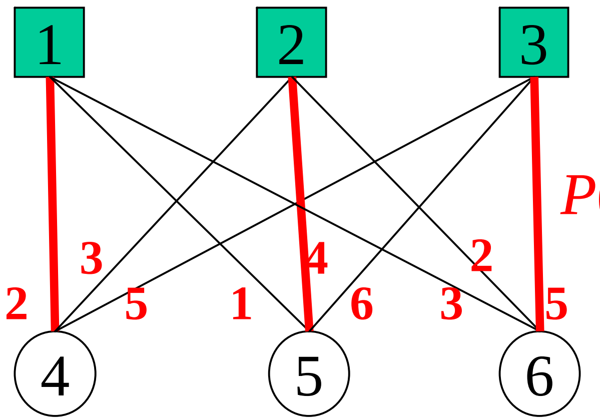
Pesi $p_{uw}$ per ogni $uw \in A$



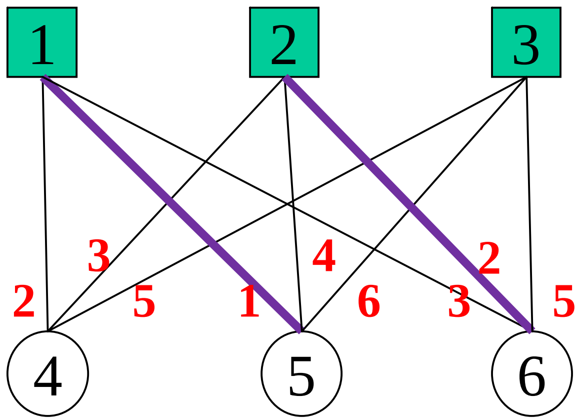

***H (Z,A)***

- Matching: sottoinsieme $M \subseteq A$ di archi *indipendenti* (niente nodi in comune)

$uw\,,\, ij \in M\,,\, uw \neq ij \;\Rightarrow\; u\neq i,\ u\neq j,\ w\neq i,\ w\neq j$



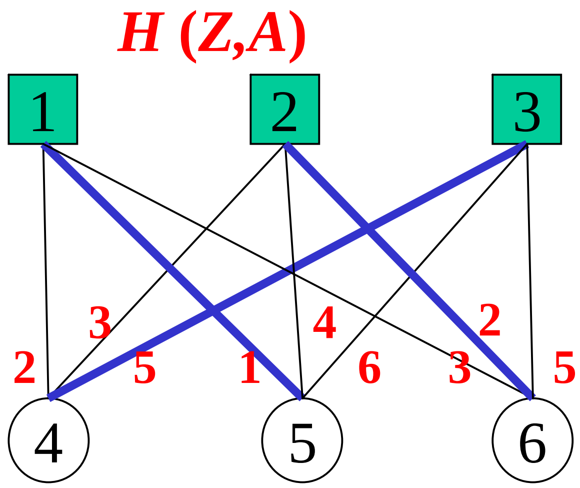

$P(M) = 11$




$P(M) = 3$

Peso Matching $M$: $\quad p(M) = \sum_{e \in M} p(e)$

# Matching perfetto di peso minimo




$P(M) = 8$

- $H\ (Z,A)$, $Z = U \cup W$, $|U| = |W|$
- Matching perfetto $M$ di $H$:

$$|M| = |Z/2| = |U| = |W|$$

*Problema Matching Perfetto*: trova un matching perfetto di peso minimo

- Il problema del Matching Perfetto di peso (costo) minimo viene ridotto a problema di flusso a costo minimo (problema facile) su un grafo orientato capacitato *H'*
- *H'* *è* costruito a partire da *H* *orientando* gli archi da *U* a *W*

# Trasformazione in Flusso a Costo Minimo

**Costruzione** $H' = (Z,A')$, con capacità $c$ e costi $p$

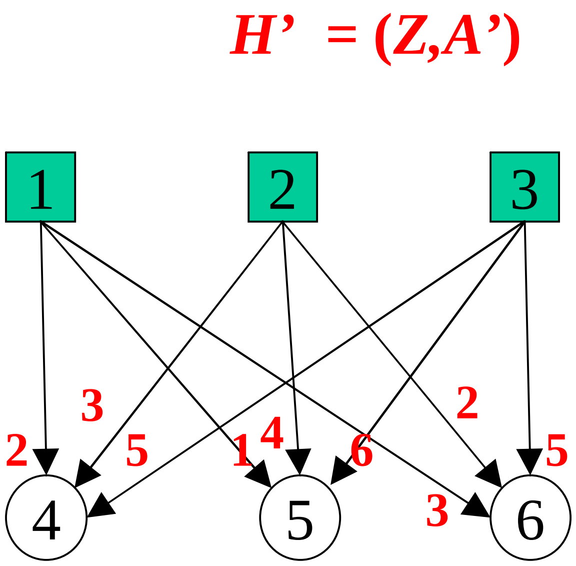
1.Orienta gli archi da $U$ a $W$:

$A' = \{(u,w): u \in U, w \in W\}$

2. Associa capacità unitaria $c_a = 1$ a ogni $a \in A'$

3. Poni $d_u = -1$ *per ogni* $u \in U$

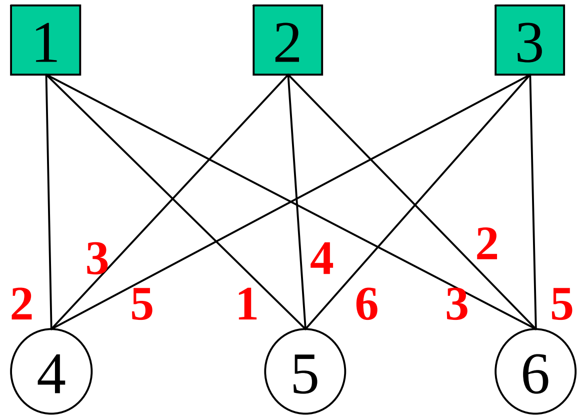
4. Poni $d_w = 1$ *per ogni* $w \in W$ .




- Ogni *Matching Perfetto* corrisponde a un flusso intero (0-1) e viceversa.
- Il flusso a costo minimo (con costi $p$) corrisponde al *matching perfetto di peso minimo*
- Il problema di flusso a costo minimo può essere risolto efficientemente.

# Matching e Assegnamento

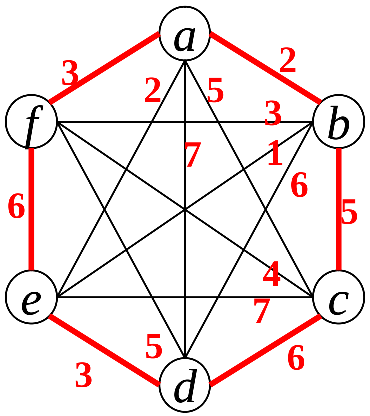
- Il problema del matching perfetto può essere interpretato come problema di *assegnamento*.
- Dati due insiemi di elementi $U$ e $W$ di uguale *cardinalità*
- Dato un costo $p_{uw}$ di assegnare l'elemento $u \in U$ all'elemento $w \in W$.
- Assegnare ogni elemento di $U$ ad un elemento di $W$ in modo da minimizzare il costo complessivo di assegnamento.
- Equivalente al problema di matching perfetto nel grafo bipartito completo non orientato $H\,(U \cup W, A)$ con pesi $p_{uw}$ per ogni $uw \in A$

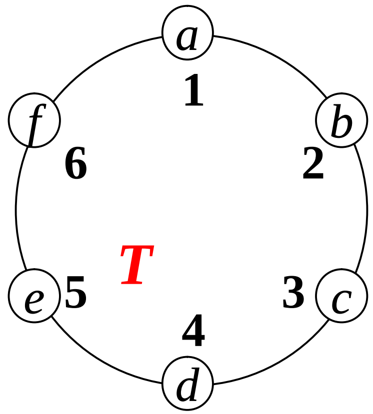


# Cicli Hamiltoniani e Permutazioni

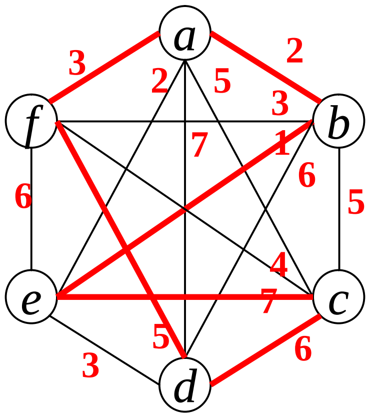
- Ogni *Ciclo Hamiltoniano* corrisponde a una permutazione (non unica) dei vertici, e ogni permutazione corrisponde a un ciclo Hamiltoniano (unico)

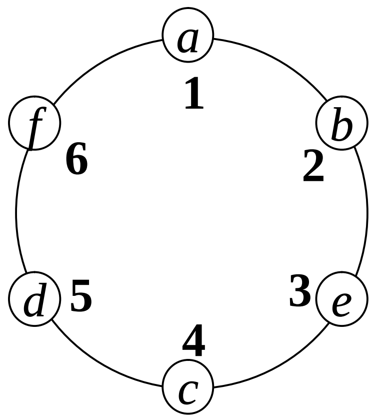
***G(V,E)***




$(a, b, c, d, e, f)$



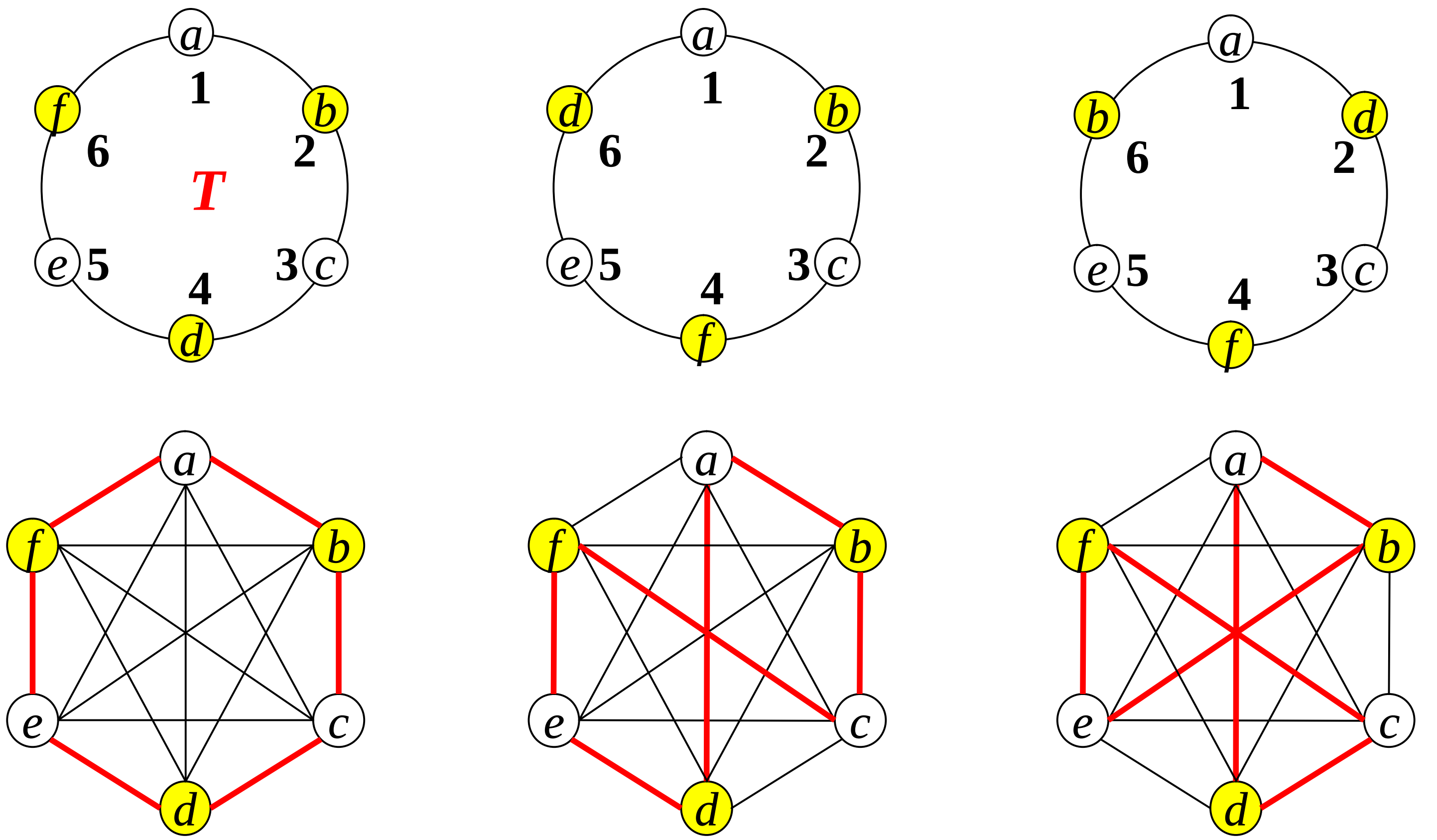

$(a, b, e, c, d, f)$

- Fissato il primo elemento nella permutazione (es. $a$), ogni altro elemento occupa univocamente una posizione pari oppure dispari

# Intorno delle Permutazioni

- Dato un ciclo hamiltoniamo $T$ definiamo intorno *ASSIGN di* $T$ *(indicato con* $N_A(T)$*)* come:

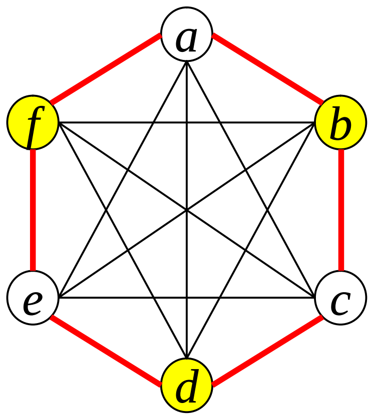
$N_A(T)$ = {*insieme dei cicli hamiltoniani ottenuti da* $T$ *riposizionando in tutti i modi possibili i nodi in posizioni pari*}

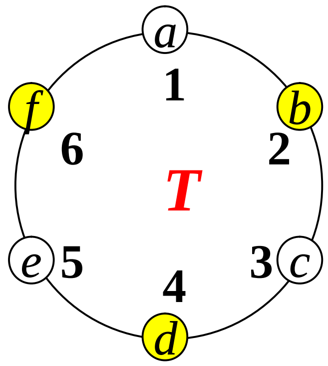



($a$, **$b$**, $c$, **$d$**, $e$, **$f$**) ($a$, **$b$**, $c$, **$f$**, e, **$d$**) ($a$, **$d$**, $c$, **$f$**, $e$, **$b$**)

# Cardinalià dell'Intorno Permutazioni

$N_A(T)$ = {*insieme dei cicli hamiltoniani ottenuti da $T$ riposizionando in tutti i modi possibili i nodi in posizioni pari*}

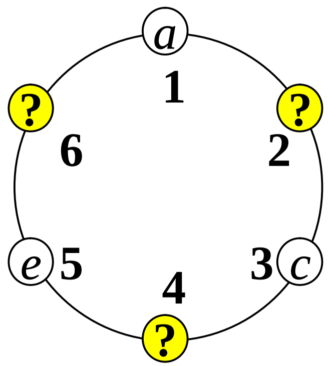



$T = \{v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , \ldots, v_n\}$

$U = \{v_2 , v_4 , \ldots, v_{\lfloor n/2 \rfloor \cdot 2}\}$ **Nodi liberi**

$\{2, 4, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor \cdot 2\}$ **Posizioni libere**

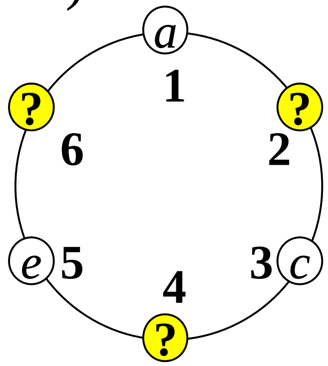



I modi diversi di assegnare i nodi liberi alle posizioni libere sono il numero di permutazioni di $\lfloor n/2 \rfloor$ elementi, che sono $\lfloor n/2 \rfloor!$

$\Rightarrow$ $|N_A(T)|$ cresce esponenzialmente con $n$

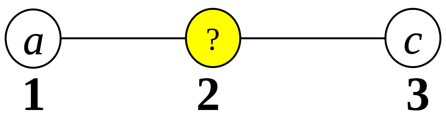
# Costo di inserimento di un nodo

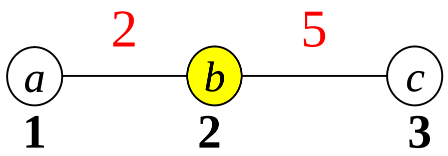
- Data una posizione pari, i due nodi adiacenti (posizioni dispari) sono noti .

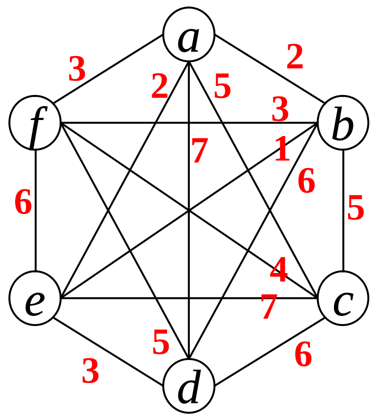



- Esempio: la posizione 2 è adiacente al nodo *a* e al nodo *c*
- Indichiamo con $p_{vi}$ il costo di inserimento di un nodo "libero" *v* in una posizione "libera" *i*.
- Quanto costa inserire il nodo *b* in posizione **2**?

$$p_{b2} = c_{ab} + c_{bc} = 2 + 5 = 7$$

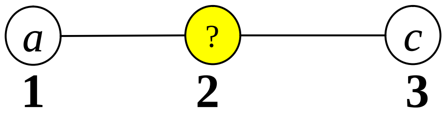


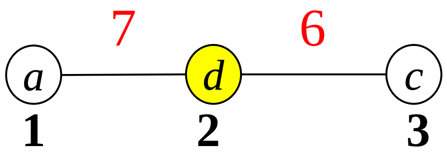



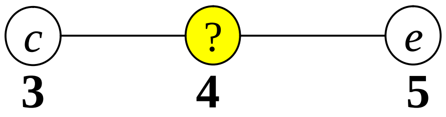




- Quanto costa inserire il nodo *d* in posizione **2**?

$$p_{d2} = c_{ad} + c_{dc} = 7 + 6 = 13$$

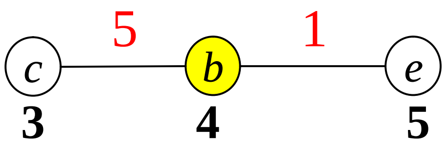



- Quanto costa inserire il nodo *b* in posizione **4**?

$$p_{b4} = c_{cb} + c_{db} = 5 + 1 = 6$$



# Ottimizzazione nell'Intorno

- Sia $U$ l'insieme dei nodi liberi (quelli in posizione pari) di $T$
- Sia $W$ l'insieme delle posizioni pari di $T$.

- Per ogni $v \in U$ e ogni $i \in W$ calcoliamo il costo $p_{vi}$ di assegnare il nodo $v$ alla posizione $i$ : sia $u$ il nodo in posizione $i$-1 e $z$ il nodo in posizione $i$+1 (mod $|V|$), allora $p_{vi} = c_{uv} + c_{vz}$.

- Trovare la soluzione ottima in $N_A(T)$ equivale a risolvere il seguente

- Problema: assegnare ogni nodo $v \in U$ ad esattamente una posizione $i \in W$ in modo da minimizzare il costo complessivo dell'assegnamento

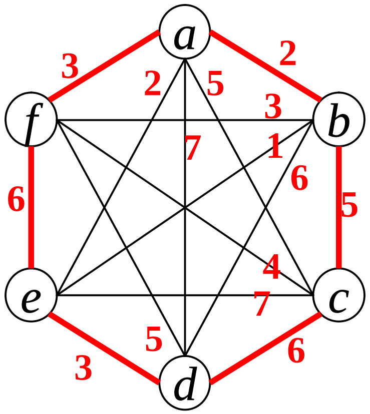
⇓

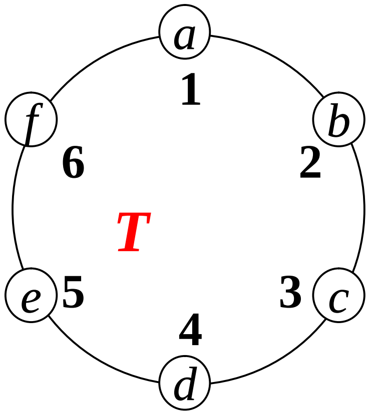
- Equivalente al problema di *matching perfetto* sul grafo bipartito completo $H (U \cup W, A)$ con pesi $p_{uw}$ per ogni $uw \in A$

# Esempio

- Consideriamo il ciclo Hamiltoniano {a,b,c,d,e,f} (sol. ammissibile)

***G(V,E)***



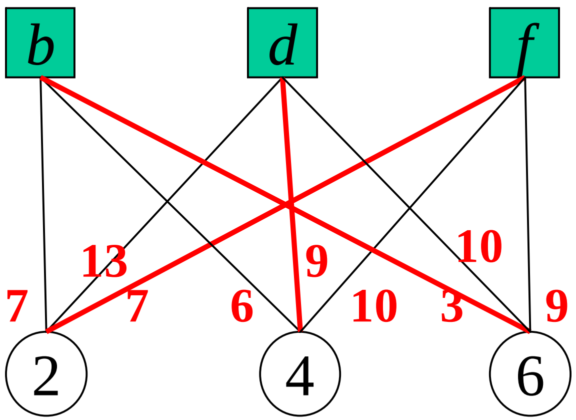




*Nodi liberi* $U = \{b, d, f\}$

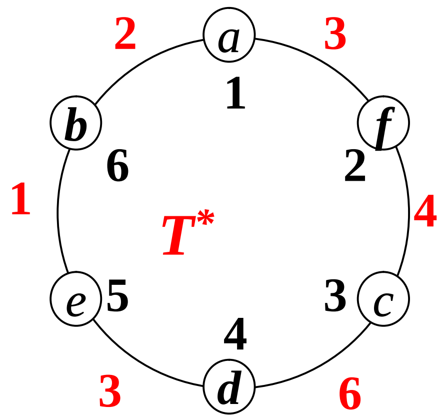
*Posizioni* $W = \{2, 4, 6\}$

*Costo* $c(T) = 25$

La miglior soluzione dell'intorno Permutazione è data risolvendo il seguente problema di matching perfetto, cioè il flusso a costo minimo




Questa assegnazione corrisponde alla sol.:




$M^* = \{b6, d4, f2\}$ $p(M^*) = 19$

***Costo*** $\boldsymbol{c(T^*) = 19}$

# Qualità di un algoritmo euristico

- Gli algoritmi euristici cercano *buone* soluzioni ammissibili per un problema di ottimizzazione (Q) : $\min \{c(F): F \in S\} = v(Q)$
- Come definire la qualità della soluzione prodotta da un algoritmo?
- In alcuni casi non si può garantire nulla (la soluzione potrebbe essere molto scadente), in altri ci possono dare delle *garanzie* a priori (es. l'ottimo o entro una certa distanza dall'ottimo)
- Sia $A$ un algoritmo per (Q) che produce la soluzione $F \in S$
- Diciamo che $A$ è un algoritmo che garantisce un'approssimazione $\alpha$ (l'algoritmo $A$ è $\alpha$ *-approssimato*) se

$$c(F) \leq \alpha\, v(Q)$$

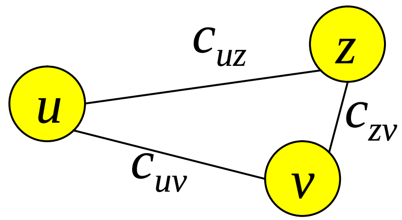
- Illustreremo un algoritmo **2-approssimato** per il *TSP metrico* (cioè la soluzione fornita vale non più del doppio della soluzione ottima)

# TSP metrico

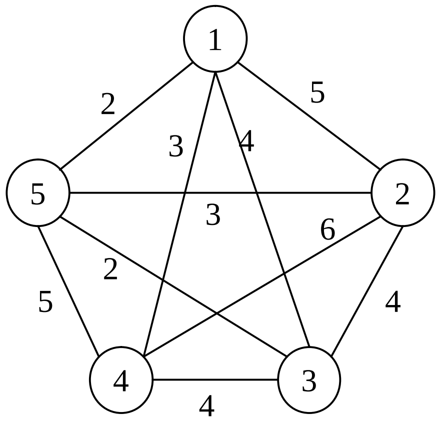
Dato un grafo $G(V,E)$ non orientato, completo con costi $c$ associati agli archi, se

- $c_{uv} \geq 0$ per ogni arco $uv \in E$ e $c_{uv} = 0$ se [se solo se] $u = v$
- $c$ è tale che *per ogni tripla di nodi distinti* $u, v, z$, si ha che

$$c_{uv} \leq c_{uz} + c_{zv} \quad (\textit{disuguaglianza triangolare})$$




allora $c$ induce una semimetrica [una metrica]




- Trovare il ciclo Hamiltoniano di costo minimo in $G(V,E)$ con vettore dei costi $c$ (semi)metrica

# Metriche indotte da norme

- Una classe molto importante di metriche è quella delle **metriche indotte dalle varie norme** $\|\bullet\|_p$ :

$$d_{\|\bullet\|_p}(i, j) = \| \, i - j \, \|_p = \left( \sum_{k=1}^{m} | \, i_k - j_k \, |^p \right)^{1/p}$$

- Se $p$=1 distanza di Manahattan $d_{\|\bullet\|_1}(i, j) = \sum_{k=1}^{m} | \, i_k - j_k \, |$

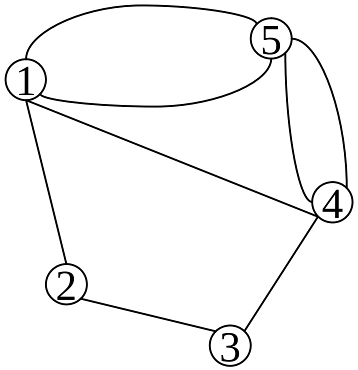
- Se p=2 distanza Euclidea $d_{\|\bullet\|_2}(i, j) = \left( \sum_{k=1}^{m} | \, i_k - j_k \, |^2 \right)^{1/2}$

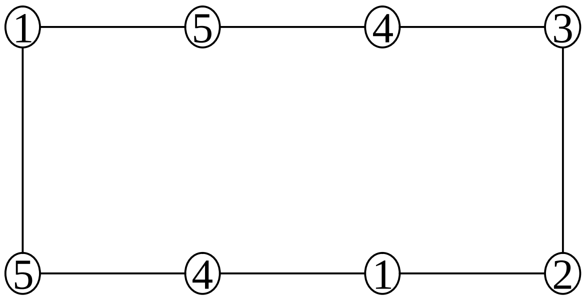
- Se $p = \infty$ distanza di Lagrange $d_{\|\bullet\|_\infty}(i, j) = \max_k \{ \, | \, i_k - j_k \, | \, \}$

# Cicli Euleriani

- Per descrivere l'euristica 2-approssimata di Christofides per il TSP metrico dobbiamo introdurre il concetto di ciclo eureliano

Dato un (multi)grafo non orientato, si definisce *Ciclo Eureliano* un walk chiuso che passa esattamente una volta per ogni arco.




Teorema di Eulero. Un (multi)grafo ammette un ciclo eurleriano se e solo se è connesso e ogni nodo ha grado pari.

Un (multi) grafo connesso e con ogni nodo di grado pari è detto *grafo euleriano*.

# Algoritmo di Christofides

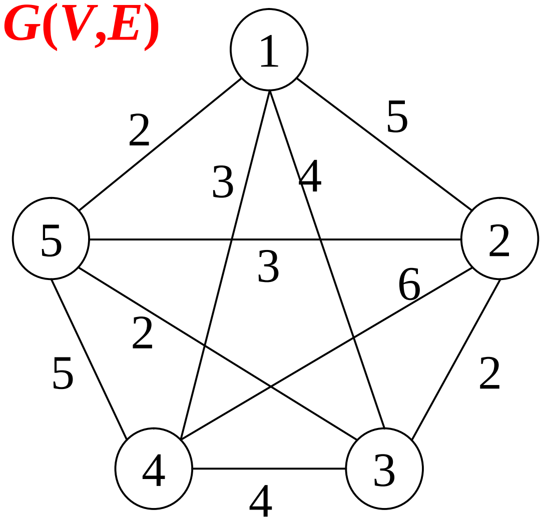
- Grafo $G(V,E)$ non orientato, completo, con costi *c semimetrica*
- L'algoritmo di Christofides trova un ciclo hamiltoniano di costo al più doppio rispetto al ciclo di costo minimo

*L'algoritmo di Christofides*

1. Trova il minimo albero ricoprente $T$ di $G$ (facile!)
2. Raddoppia ogni arco di $T$ ottenenendo un grafo euleriano
3. Costruisci un ciclo euleriano $\mathsf{E}$ di questo grafo (facile!)
4. Scegli un nodo iniziale $u$ in $\mathsf{E}$ e visita $\mathsf{E}$ a partire da $u$
5. Costruisci una permutazione $\pi$ dei nodi $V$ *sequenziando i nodi* nell'ordine della loro prima apparizione in $\mathsf{E}$ nella visita
6. Restituisci il ciclo hamiltoniano $H$ associato a $\pi$

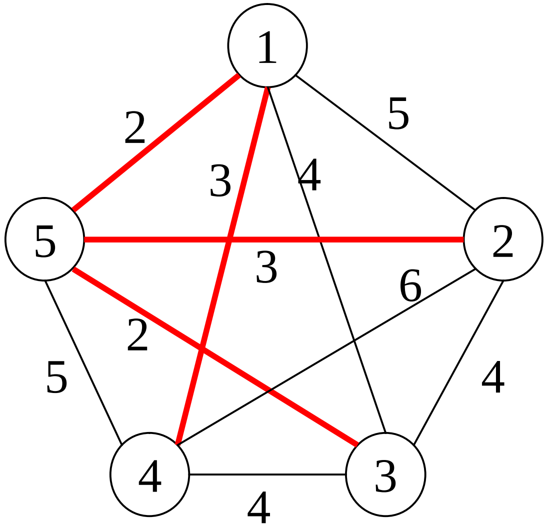
# Esempio 1/3

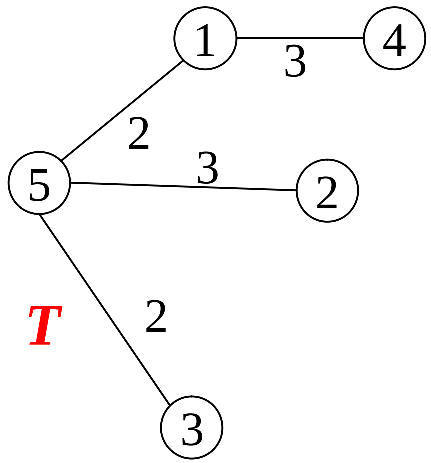
***G*(*V*,*E*)**




**1. Trova il minimo albero ricoprente *T* di *G*.**

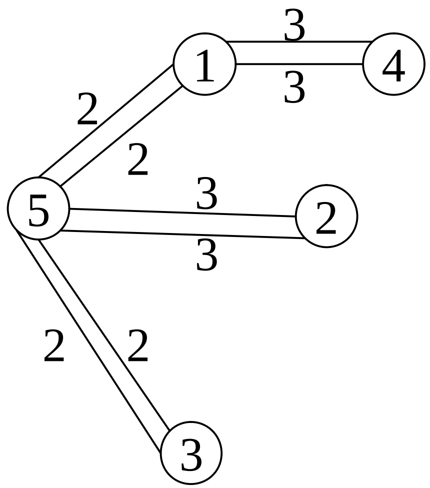
Per questo problema l'algoritmo greedy garantisce l'ottimo: basta scegliere gli archi in ordine di costo crescente ma saltando quelli che chiudono cicli



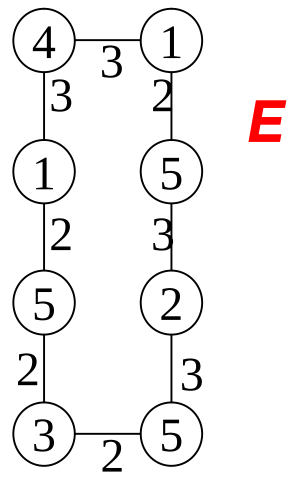
# Esempio 2/3

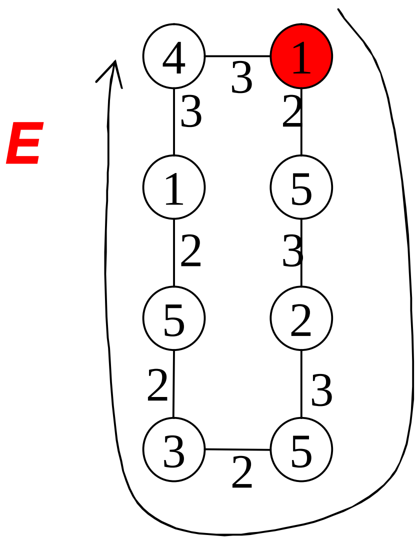
**2. Raddoppia ogni arco di *T* ottenendo un grafo euleriano**



**3. Costruisci un ciclo euleriano *E* del grafo euleriano**

Basta percorrere
uno dopo l'altro
tutti i cicli ottenuti
dai rami dell'albero




**4. Scegli nodo iniziale *u* in *E* e visita *E* a partire da *u***

**5. Costruisci una permutazione π dei nodi *V* sequenziando i nodi nell'ordine della loro prima apparizione in *E* nella visita**

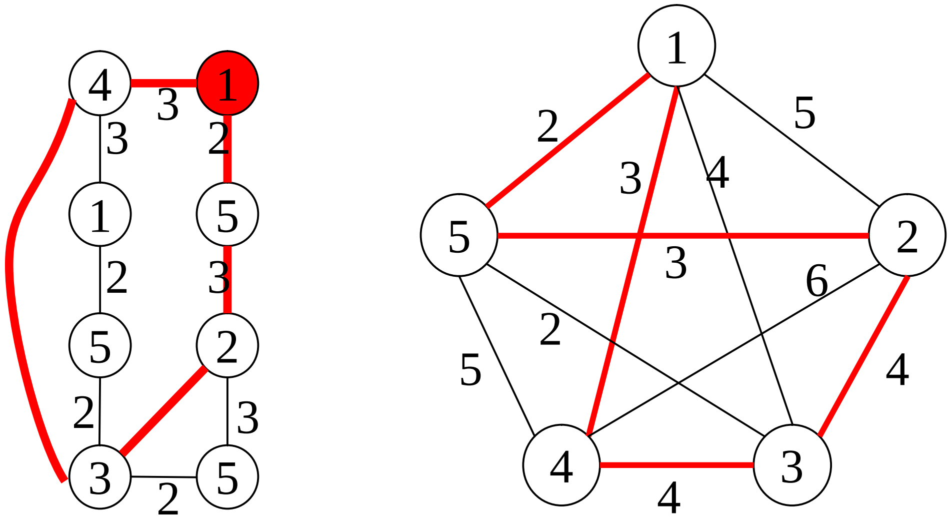
Sequenza di visita di *E* : (1,5, 2, 5, 3, 5, 1, 4)

Permutazione associata $\pi = (1, 5, 2, 3, 4)$

# Esempio 3/3

6. Ciclo hamiltoniano *H* associato a $\pi = (1, 5, 2, 3, 4)$

*H* è ottenuto da *E* sostituendo cammini con archi

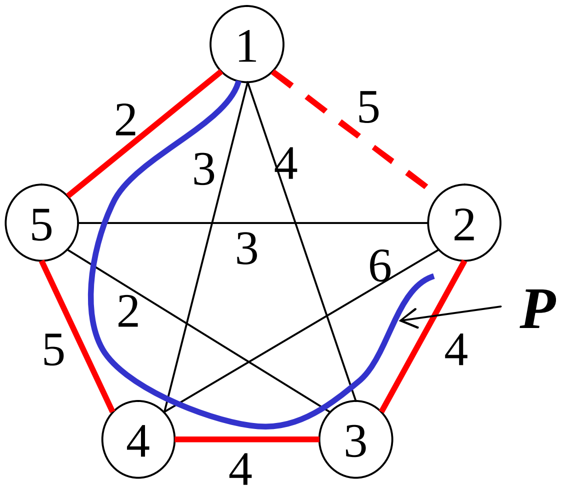



Poiché *c* **soddisfa la disuguaglianza triangolare**, saltando dei nodi seguo delle scorciatoie. Allora

$$\boxed{c(H) \leq c(E)}$$

# Valore della soluzione trovata

*Th.* 9.1 Sia $H^*$ il ciclo hamiltoniano di costo minimo, e sia $T^*$ l'albero ricoprente di $G$ di costo minimo. Allora $c(H^*) \geq c(T^*)$.




Sia $P$ il cammino semplice ottenuto da $H^*$ *rimuovendo un arco*. Allora $P$ è un albero

$c(H^*) \geq c(P)$ (costi non negativi)

$P$ contiene tutti i nodi di $G \rightarrow P$ è un albero ricoprente

$P$ albero ricoprente, $T^*$ albero ricoprente a costo minimo $\rightarrow c(P) \geq c(T^*)$

$c(H^*) \geq c(P) \quad \rightarrow \quad c(H^*) \geq c(T^*)$

■

# Valore della soluzione trovata

*Th.* 9.2 Sia $H^*$ il ciclo hamiltoniano di costo minimo, e sia $H$ il ciclo ritornato dall'algoritmo di Christofides. Allora $c(H) \leq 2c(H^*)$.

$E$ ottenuto dall'albero ricoprente di costo minimo $T^*$ raddoppiando gli archi $\Rightarrow$ $c(E) = 2c(T^*)$

$H$ ottenuto dal ciclo euleriano $E$ eventualmente saltando nodi (quindi facendo scorciatoie) $\Rightarrow$ $c(H) \leq c(E) = 2c(T^*)$

Dal Teorema precedente $c(T^*) \leq c(H^*)$ $\Rightarrow$ $c(H) \leq 2c(T^*) \leq 2c(H^*)$

$\blacksquare$