"Sapienza" Università di Roma - Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale

Introduzione alla Teoria dei Grafi

Docente: Renato Bruni

bruni@dis.uniroma1.it

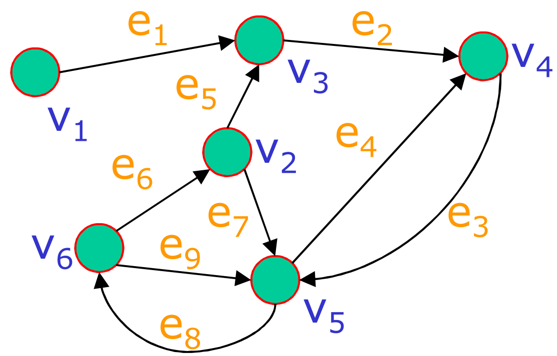
Corso di: Ottimizzazione Combinatoria

Questa sezione è tratta dal materiale del prof. A. Sassano

La Teoria dei Grafi

TEORIA DEI GRAFI: Studia le proprietà metriche e topologiche delle relazioni binarie

- Oggetti ⟶ *Nodi*
- Relazioni tra coppie ⟶ *Archi*



Grafo $G(N,A)$ *con*:

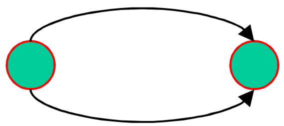
$N = \{v_1,\dots,v_n\}$ *Insieme dei Nodi di G*

$A = \{e_1,\dots,e_m\}$ *Insieme degli Archi di G*

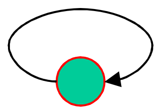
I Grafi possono modellare molti problemi del mondo reale

IPOTESI: *Grafo semplice*

Non esistono archi paralleli o "loop"



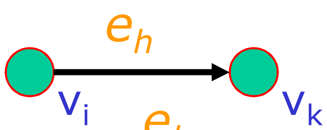
archi paralleli



"loop"

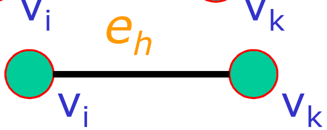
Quindi: al più un arco per ogni coppia (eventualmente ordinata) di nodi:

Coppia ordinata:



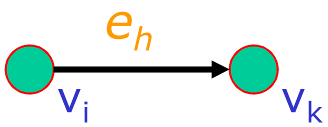
Arco orientato $(v_i,v_k) \equiv v_iv_k \equiv e_h$

Coppia non-ordinata:

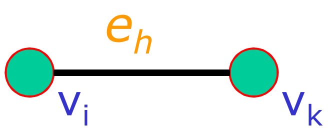


Arco non-orientato $v_iv_k \equiv v_kv_i \equiv e_h$

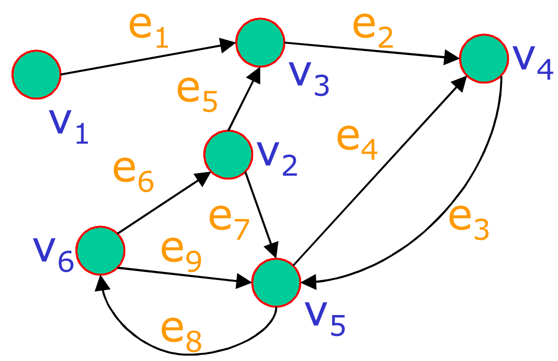
Archi orientati e non-orientati



Arco orientato $(v_i, v_k) \equiv e_h$



Arco non-orientato $(v_i, v_k) \equiv e_h$



Per ogni arco orientato $(v_i, v_k) \equiv e_h$ *diremo:*

v_i *coda di* e_h	v_i *precede* v_k	e_h *esce da* v_i
v_k *testa di* e_h	v_k *segue* v_i	e_h *entra in* v_k

Per ogni arco orientato o non orientato diremo:

v_i *adiacente a* v_k

e_h *incidente su* v_k *e* v_i

v_i e v_k *estremi di* e_h

ESEMPIO

$v_1 v_3 \equiv e_1$

v_1 *coda di* e_1

v_3 *testa di* e_1

v_1 *precede* v_3

v_5 *segue* v_2

e_2 *esce da* v_3

e_3 *entra in* v_5

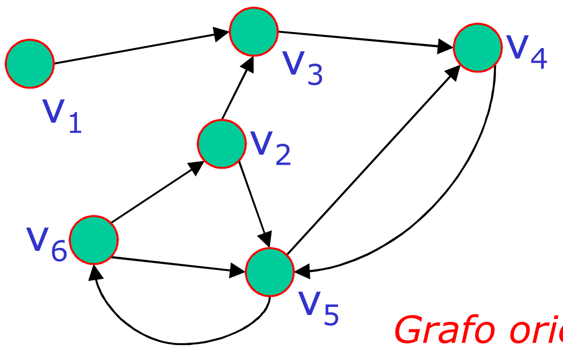
v_5 *adiacente a* v_2

e_3 *incidente su* v_4

Grafi orientati e non-orientati

G(N,A) ***Grafo orientato***

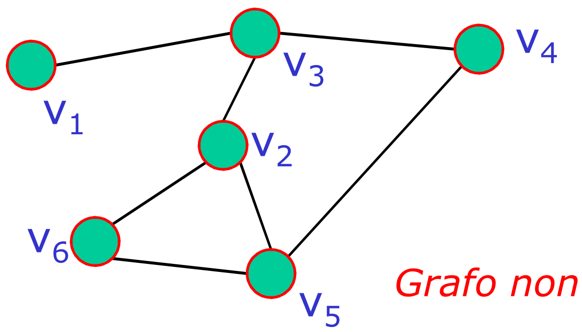
Ogni arco di A è orientato



Grafo orientato

G(N,A) ***Grafo non-orientato***

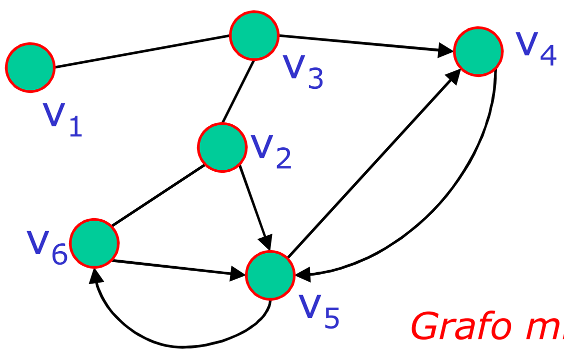
Ogni arco di A è non-orientato



Grafo non-orientato

G(N,A) ***Grafo misto***

Ogni arco di A può essere orientato o non-orientato



Grafo misto

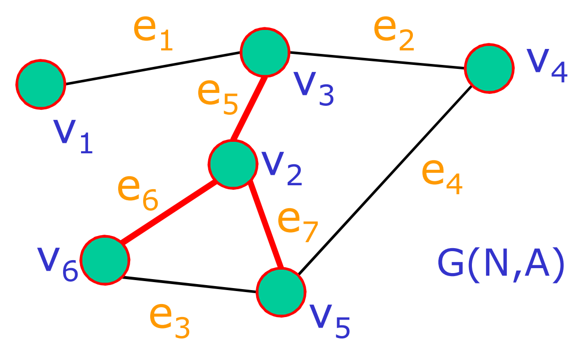
Stelle e Intorni

STELLA DI v IN G

$$\delta_G(v) = \{e : e = uv\} \subseteq A$$

Insieme degli archi di G incidenti su v

$|\delta_G(v)| = d_G(v)$; GRADO di v



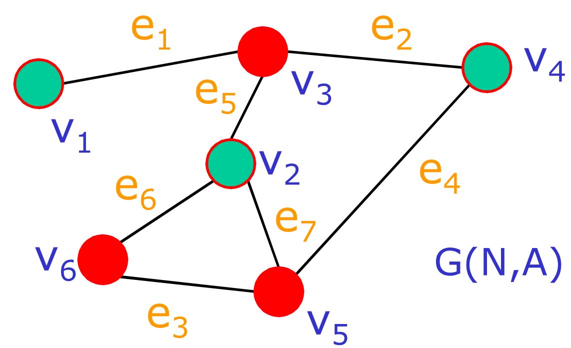
$\delta_G(v_2) = \{e_5, e_6, e_7\}$

$d_G(v_2) = 3$

INTORNO DI v IN G

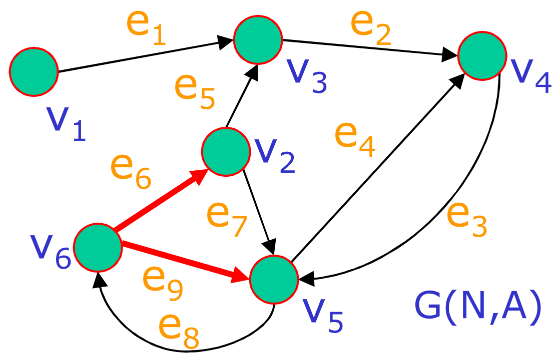
$$N_G(v) = \{u : vu \in A\} \subseteq N$$

Insieme dei nodi adiacenti a v in G



$N_G(v_2) = \{v_3, v_5, v_6\}$

Stelle in Grafi Orientati



STELLA USCENTE DA v IN G

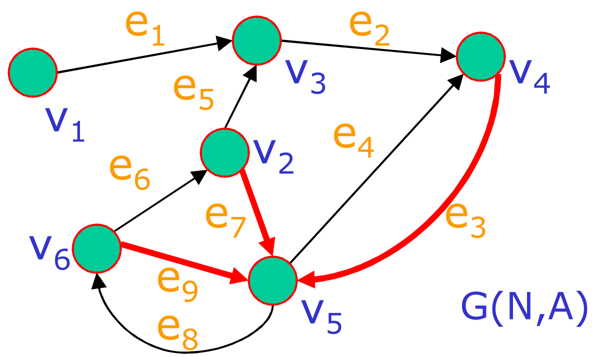
$$\delta^+_G(v) = \{e : v \text{ coda di } e\} \subseteq A$$

Insieme degli archi di G uscenti da v

$$|\delta^+_G(v)| = d^+_G(v);$$ GRADO USCENTE

$\delta^+_G(v_6) = \{e_6, e_9\}$

$d^+_G(v_6) = 2$



STELLA ENTRANTE IN v IN G

$$\delta^-_G(v) = \{e : v \text{ testa di } e\} \subseteq A$$

Insieme degli archi di G entranti in v

$$|\delta^-_G(v)| = d^-_G(v);$$ GRADO ENTRANTE

$\delta^-_G(v_5) = \{e_3, e_7, e_9\}$

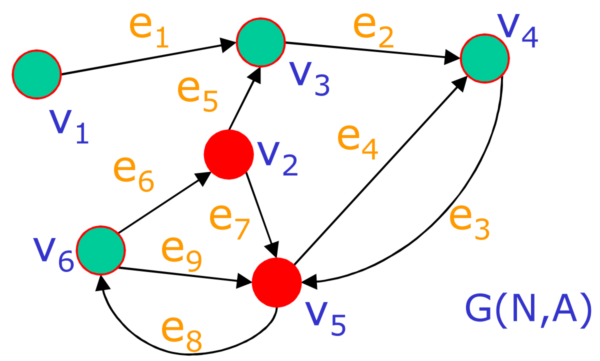
$d^-_G(v_5) = 3$

Intorni in Grafi Orientati

INTORNO+ DI v IN G

$$\boxed{N^{+}_{G}(v) = \{u : \ vu \in A\} \subseteq N}$$

Teste di archi di G con coda in v

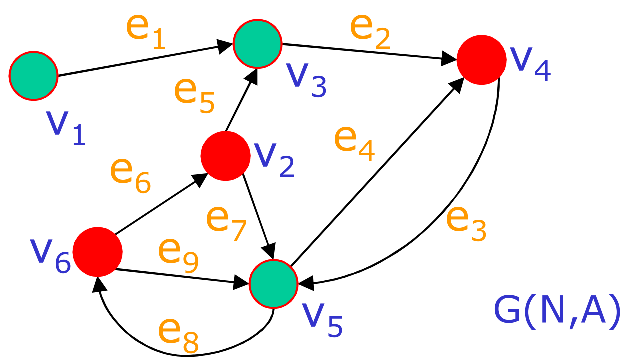


$N^{+}_{G}(v_6) = \{v_2, v_5\}$

INTORNO- DI v IN G

$$\boxed{N^{-}_{G}(v) = \{u : \ uv \in A\} \subseteq N}$$

Code di archi di G con testa in v



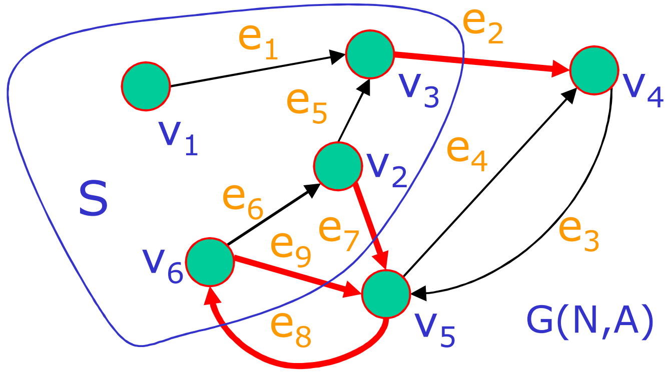
$N^{-}_{G}(v_5) = \{v_2, v_4, v_6\}$

Tagli

TAGLIO IN G(N,A) DEFINITO DA $S \subseteq N$

$$\delta_G(S) = \{uv : u \in S \text{ e } v \in N-S\} \subseteq A$$

Insieme degli archi di G con un estremo in S e l'altro in N-S



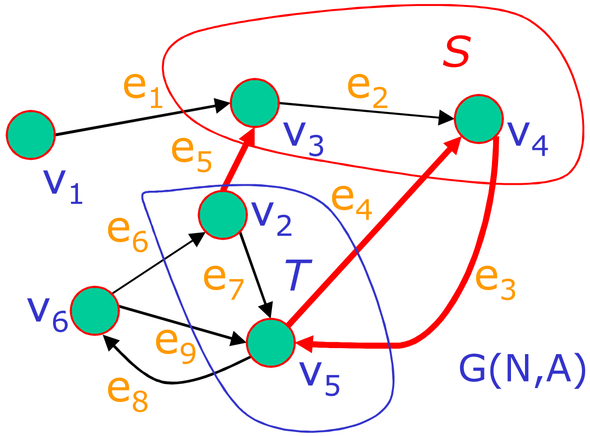
$S = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$

$\delta_G(S) = \{e_2, e_7, e_8, e_9\}$

DATI $S, T \subseteq N$ con $S \cap T = \emptyset$: definiamo

$$\delta_G(S,T) = \delta_G(S) \cap \delta_G(T)$$

Insieme degli archi di G con un estremo in S e l'altro in T



$S = \{v_3, v_4\}$ $T = \{v_2, v_5\}$

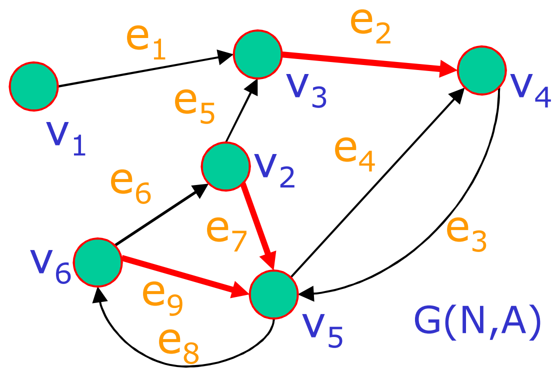
$\delta_G(S,T) = \{e_3, e_4, e_5\}$

Tagli in Grafi Orientati

TAGLIO USCENTE DA $S \subseteq N$ *IN G*

$$\delta^{+}_{G}(S) = \{uv : u \in S \text{ e } v \in N-S \} \subseteq A$$

Insieme degli archi di G con coda in S e testa in N-S



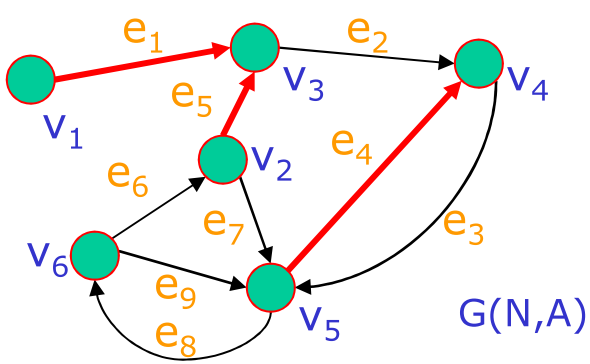
$S = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$

$\delta^{+}_{G}(S) = \{e_2, e_7, e_9\}$

TAGLIO ENTRANTE IN $S \subseteq N$ *IN G*

$$\delta^{-}_{G}(S) = \{uv : u \in N-S \text{ e } v \in S \} \subseteq A$$

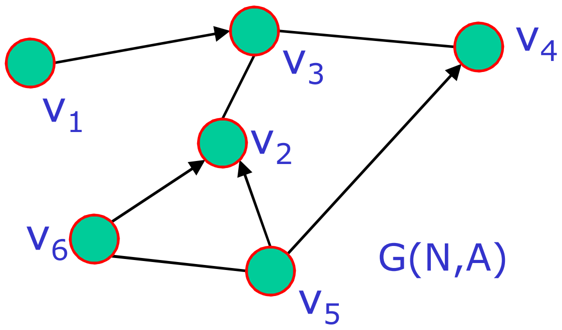
Insieme degli archi di G con coda in N-S e testa in S

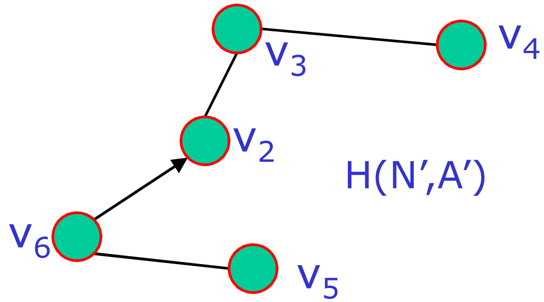


$S = \{v_3, v_4\}$

$\delta^{-}_{G}(S) = \{e_1, e_5, e_4\}$

Sottografi

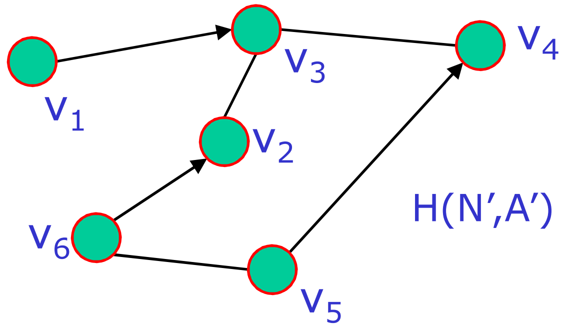




Sottografo

H(N′,A′) ***SOTTOGRAFO DI*** *G(N,A)*

$\Leftrightarrow N' \subseteq N \wedge A' \subseteq \{uv \in A: \{u,v\} \in N'\}$



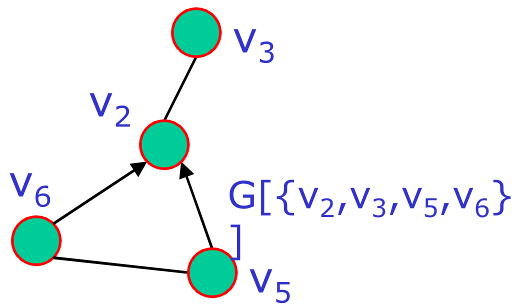
Sottografo ricoprente

H(N′,A′) ***SOTTOGRAFO RICOPRENTE DI*** *G(N,A)*

$\Leftrightarrow N' \mathbf{=} N \wedge A' \subseteq \{uv \in A: \{u,v\} \in N'\}$

H(N′,A′) ***SOTTOGRAFO INDOTTO DI*** *G(N,A)*

$\Leftrightarrow N' \subseteq N \wedge A' \mathbf{=} \{uv \in A: \{u,v\} \in N'\}$

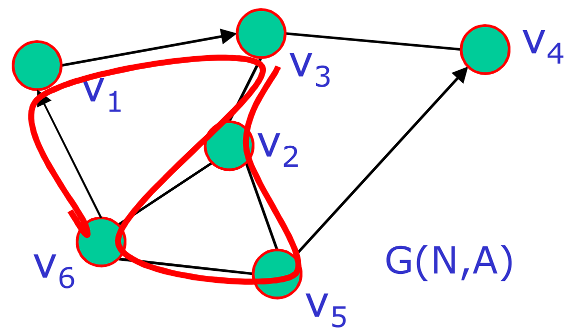


Sottografo indotto

N′ ***DETERMINA*** *H* $\Rightarrow$ $H = G[N']$

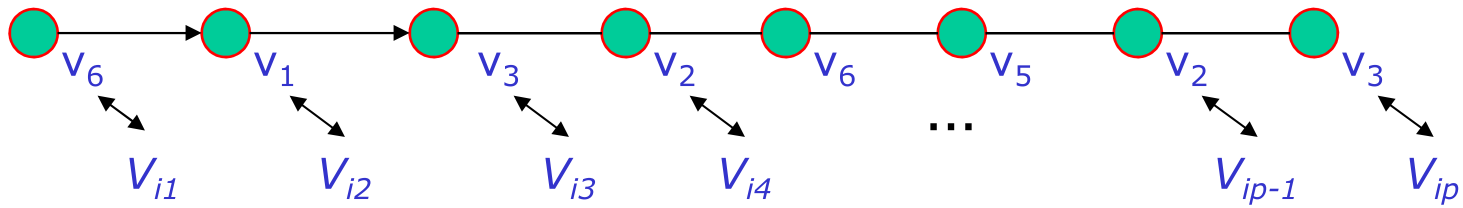
Strutture Speciali: "Walk"

W "WALK" IN G(N,A)



SEQUENZA ALTERNANTE DI NODI e ARCHI

$W=(V_{i1}, (V_{i1},V_{i2}), V_{i2}, (V_{i2},V_{i3}),\dots, (V_{ip-1},V_{ip}), V_{ip})$



INSIEME DEI NODI DI W: $V(W) = \{V_{i1}, V_{i2},\dots, V_{ip}\}$

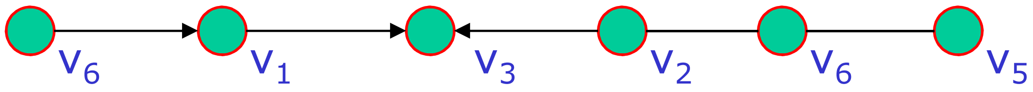
INSIEME DEGLI ARCHI DI W: $A(W) = \{(V_{i1},V_{i2}), (V_{i2},V_{i3}),\dots, (V_{ip-1},V_{ip})\}$

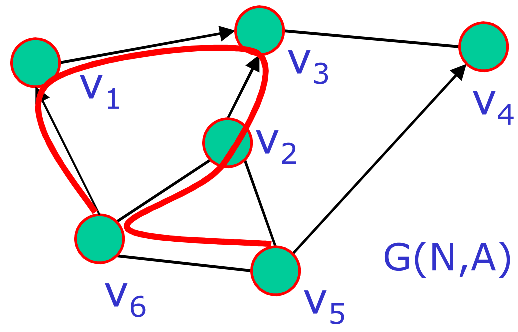
- V_{i1} *e* V_{ip} *si dicono NODI ESTREMI DEL "WALK"*
- $\{V_{i2},\dots, V_{ip-1}\}$ *si dicono NODI INTERNI DEL "WALK"*

- *Archi e nodi possono essere ripetuti*
- *Se* $V_{i1} \equiv V_{ip}$ *(nodi estremi coincidenti) il "WALK" si dice CHIUSO altrimenti di dice APERTO*

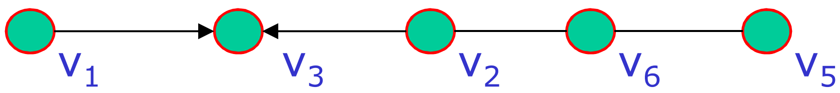
Strutture Speciali: “Trail”, Cammini e Cicli

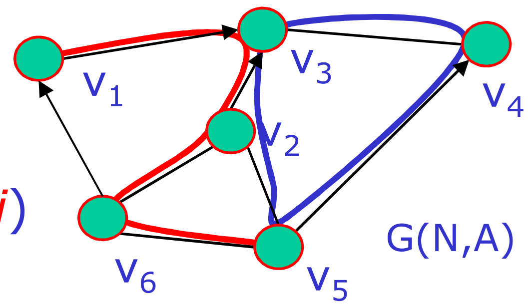
“TRAIL” ⇒ *“WALK” in G(N,A) senza archi ripetuti*



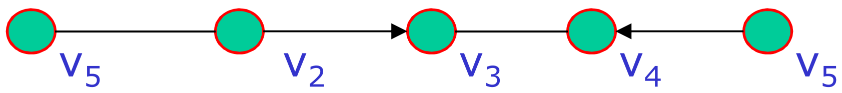


CAMMINO ⇒ *“TRAIL” in G(N,A) senza <u>nodi interni</u> ripetuti*





CICLO ⇒ *CAMMINO CHIUSO (nodi estremi coincidenti)*

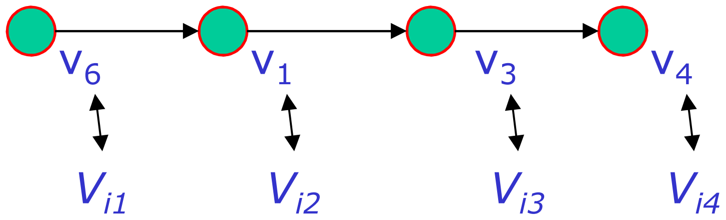


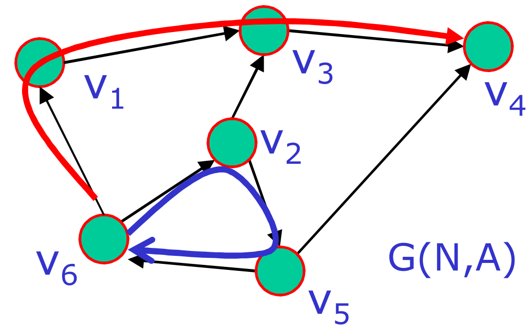
Grafi Orientati: Cammini e Cicli Orientati

CAMMINO ORIENTATO $\Rightarrow$

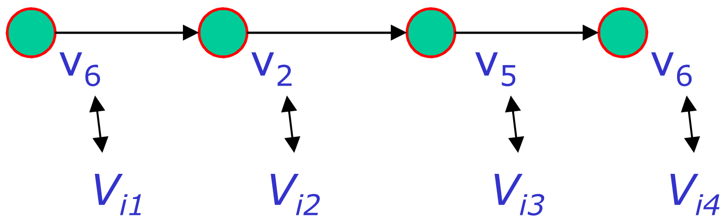
CAMMINO $P=(V_{i1}, (V_{i1},V_{i2}), V_{i2}, (V_{i2},V_{i3}),\dots, (V_{ip-1},V_{ip}), V_{ip})$ *con:*

$\boxed{V_{ik} \text{ coda di } (V_{ik},V_{ik+1}) \text{ per ogni } k=1,\dots,p-1}$





CICLO ORIENTATO $\Rightarrow$ *CAMMINO ORIENTATO CHIUSO*

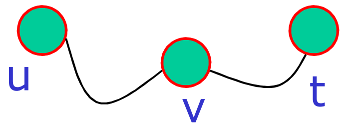


Relazione di Connessione

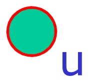
u <u>*CONNESSO A*</u> *v* $\Leftrightarrow$ *Esiste un cammino con estremi u e v*

"Connesso a": <u>Relazione di Equivalenza</u> $\Re$

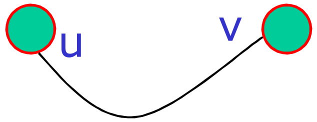
transitiva: $u \Re v \wedge v \Re t \Rightarrow u \Re t$



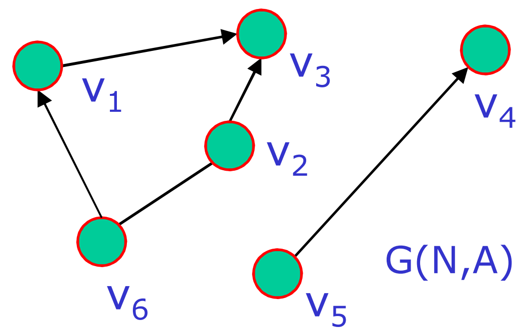
riflessiva: $u \Re u$



simmetrica: $u \Re v \Leftrightarrow v \Re u$



Nodi e Coppie di nodi partizionabili in Classi di Equivalenza



ESEMPI

v_1 *connesso a* v_2

v_3 *connesso a* v_6

v_4 *connesso a* v_5

v_3 *non connesso a* v_5

RICORDO

Data una relazione di equivalenza $\Re \subseteq N \times N$ *e detto* $\Re(u)=\{v \in N : v \Re u\}$

$C \subseteq N$ *è una* <u>*CLASSE DI EQUIVALENZA*</u> $\Leftrightarrow \quad C \equiv \Re(u) \ \forall \ u \in C$

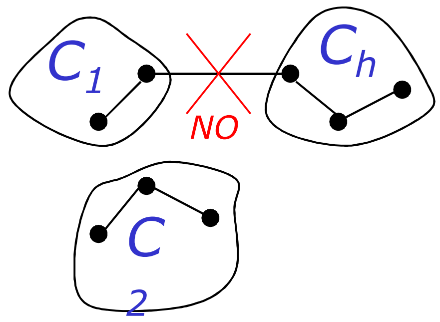
N *si* <u>*partiziona*</u> *in classi di equivalenza*: $N = C_1 \cup \ldots \cup C_t \ \wedge \ C_h \cap C_k = \emptyset \quad k \neq h$

$\Re$ Relazione di Equivalenza $\Leftrightarrow \ (u \Re v \Leftrightarrow \exists \ C_h : u,v \in C_h)$

Componenti Connesse

u CONNESSO A $v \Leftrightarrow$ Esiste un cammino con estremi u e v

$\Re$ "Connesso a": Relazione di Equivalenza



Nodi partizionabili in classi di equivalenza: $\{C_1,\ldots,C_t\}$

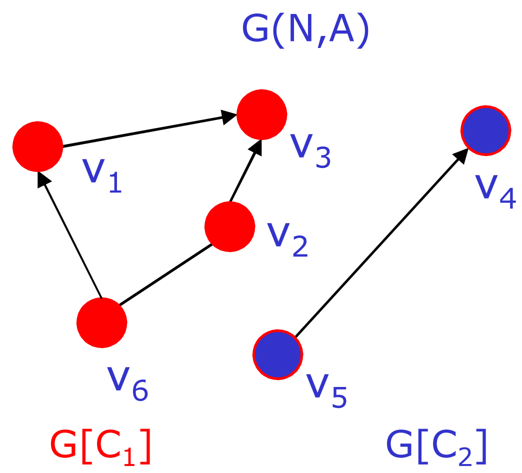
$$\begin{cases} N = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_t \\ C_h \cap C_k = \varnothing \quad 1 \leq h < k \leq t = c(G) \end{cases}$$

Coppie di nodi connesse se e solo se appartengono alla stessa classe di equivalenza.

$$\begin{cases} \{u,v\} \in C_h \Rightarrow \text{ u connesso a v} \\ u \in C_h \wedge v \in C_k \wedge k \neq h \Rightarrow \text{ u non connesso a v} \end{cases}$$

$G[C_h]$ COMPONENTE CONNESSA DI $G(N,A)$

Sottografo indotto da una classe di equivalenza



$c(G) = 1$ Grafo CONNESSO

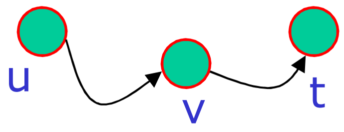
$c(G) > 1$ Grafo NON-CONNESSO

Cammini orientati e Connessione

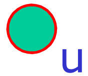
$u \Re v \Leftrightarrow$ *Esiste un CAMMINO ORIENTATO da u a v*

$\Re$ *<u>Non è</u> una <u>Relazione di Equivalenza</u>*

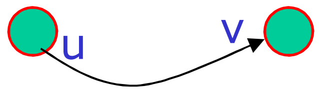
transitiva: $u \Re v \wedge v \Re t \Rightarrow u \Re t$



riflessiva: $u \Re u$

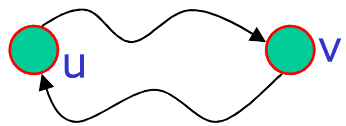


non simmetrica:



Cosa fare?

Rendiamo simmetrica la relazione richiedendo la contemporanea esistenza di un cammino orientato da u a v e di uno da v ad u



DEFINIAMO

Nuova relazione di equivalenza $\Re^F$: $u \Re^F v \Leftrightarrow v \Re u \wedge u \Re v$

$u \Re^F v \Leftrightarrow u$ *FORTEMENTE CONNESSO a* v

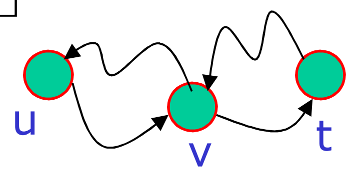
Connessione Forte

$u\Re^F v \Leftrightarrow$ u *FORTEMENTE CONNESSO a* v

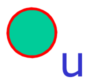
$\Leftrightarrow$ *Esiste un CAMMINO ORIENTATO da u a v* ***e***
un CAMMINO ORIENTATO da v a u

$\Re^F$ è *una* Relazione di Equivalenza

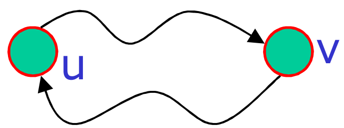
transitiva: $u\Re^F v \wedge v\Re^F t \Rightarrow u\Re^F t$



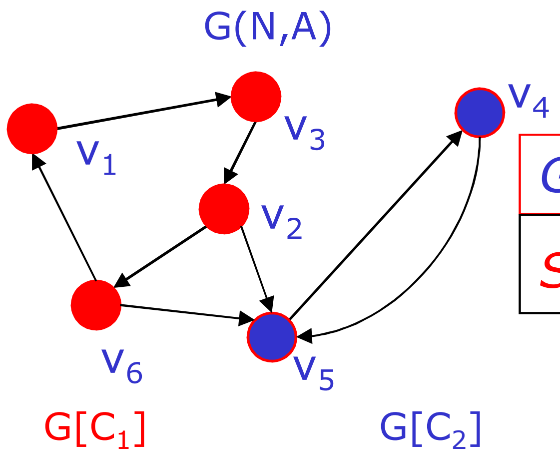
riflessiva: $u\ \Re^F u$



simmetrica:



Nodi partizionabili in classi di equivalenza di $\Re^F$: $\{C_1,\ldots,C_t\}$

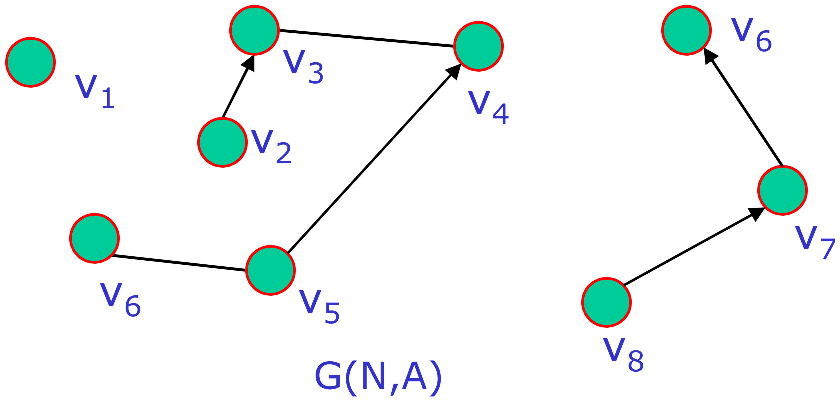


$G[C_h]$ *COMPONENTE FORTEMENTE CONNESSA DI* $G(N,A)$

Sottografo indotto da una classe di equivalenza di $\Re^F$

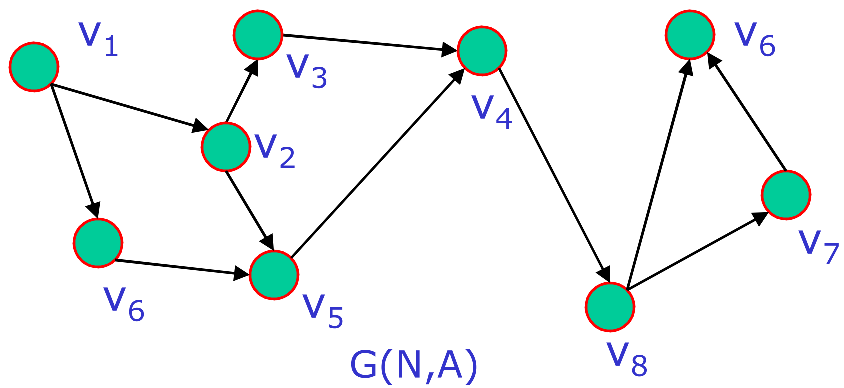
Grafi Aciclici e Alberi

GRAFO ACICLICO (FORESTA) $\Rightarrow$ Grafo senza cicli



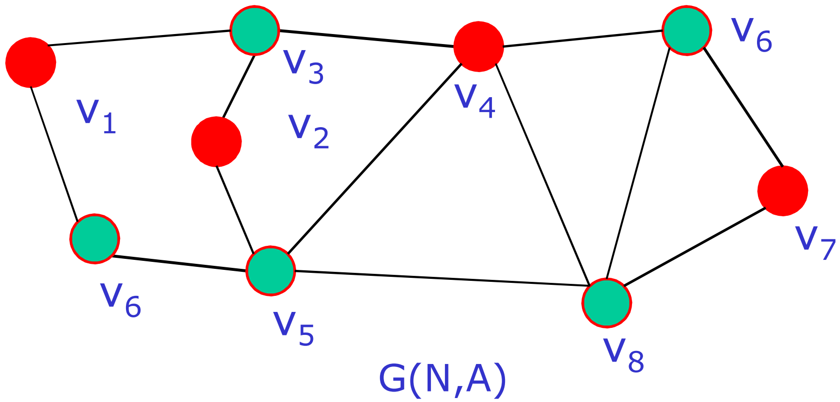
GRAFO ACICLICO CONNESSO $\Rightarrow$ ALBERO

GRAFO ACICLICO ORIENTATO (DAG) $\Rightarrow$ Grafo senza cicli orientati



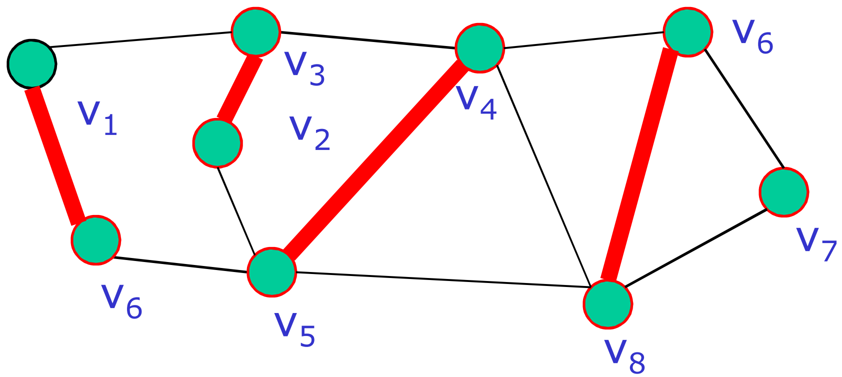
Insiemi Stabili e "matching"

*Insieme **STABILE*** $\Rightarrow$ *Insieme di nodi **a coppie non adiacenti***



nodi indipendenti

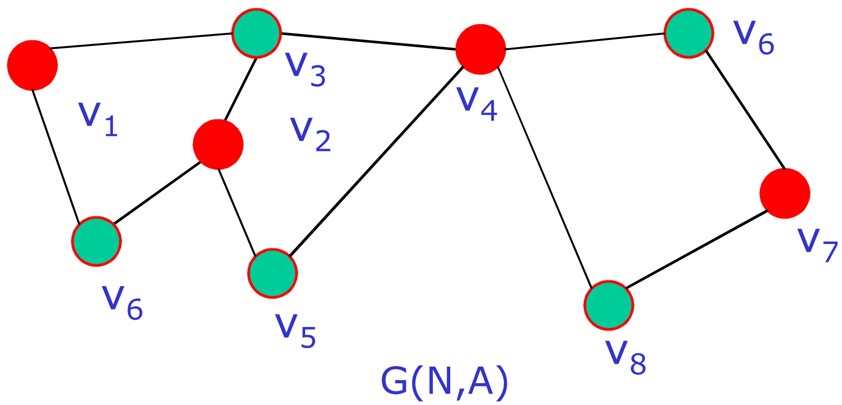
"Matching" $\Rightarrow$ *Insieme di archi **a coppie non adiacenti***



archi indipendenti

Grafi Bipartiti

Grafo Bipartito ⇔ *Insieme dei nodi* ***partizionato in due insiemi stabili***



Grafo Bipartito ⇔ ***Non contiene cicli con un numero dispari di nodi***

Provate a dimostrarlo

Autovalutazione Teoria dei Grafi

2.1 *Vero o Falso? Rimuovendo un taglio da un grafo connesso si ottiene un grafo con almeno due componenti connesse. Il motivo?*

2.2 *Quanti archi può possedere, al massimo, un grafo con 5 nodi.*

2.3 *COMPLETARE LA DEFINIZIONE SEGUENTE:*

Albero Ricoprente di G(N,A): è un sottografo di G(N,A) ...

2.4 *Dimostrare che un DAG contiene un nodo con stella uscente vuota.*

2.5 *Dimostrare che aggiungendo un arco di A ad un albero ricoprente di G(N,A), si genera un sottografo di G(N,A) contenente un ciclo.*

2.6 *Dimostrare che in un grafo G(N,A) la somma dei gradi dei nodi è pari al doppio del numero degli archi*

$$\boxed{\sum_{u \in N} d(u) = 2|A|}$$

2.7 *Dimostrare che una Componente Fortemente connessa G′ di un grafo orientato G contiene un Ciclo Orientato Ricoprente di G′.*