“Sapienza” Università di Roma - Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale

Qualità delle Formulazioni, Formulazioni Ottime

Docente: Renato Bruni

bruni@dis.uniroma1.it

Corso di: Ottimizzazione Combinatoria

Questa sezione è derivata dal materiale del prof. A. Sassano

Valutazione delle Soluzioni

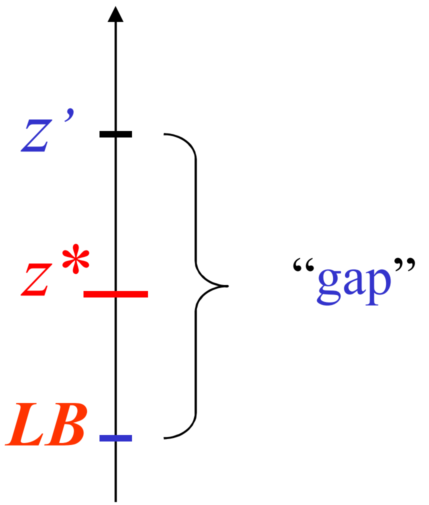
$x' \in S$ ***soluzione ammissibile*** per un problema di minimo

$f(x') = z'$ ***valore*** della soluzione ammissibile

$f(x^*) = z^*$ ***valore*** della soluzione **ottima**

Dato un insieme S, un Lower Bound (=limitazione inferiore) è un valore $\leq$ di tutti gli elementi di S. Un Upper Bound si definisce specularmente

Se non conosciamo z^* ma solo z', un LB sulle soluzioni ci aiuta a valutare la bontà di x' (certificazione di qualità): gap piccolo → soluzione "buona"



Come riduciamo il gap ?

1. Miglioramento del Lower Bound
2. Miglioramento (riduzione) di z'

Tecniche di ricerca nell'insieme delle soluzioni

Tecniche euristiche (ευρισκειν = *trovare*)

Es. "Greedy", Ricerca Locale, etc.

Vari Possibili Lower Bounds

Esistono vari metodi per il calcolo di Lower Bounds (e non danno gli stessi risultati):

- Rilassamento Lineare
- *Rilassamento Lagrangiano*
- *Programmazione Semi-Definita*
- *Metodi combinatorici e "ad hoc"*

- Formulazione Lineare (ora vediamo questo)
- Teoria della Dualità

Formulazione Lineare

Problema di PL01:

$$\boxed{\min \{c^{T}x : x \in S\}}$$

Esempio

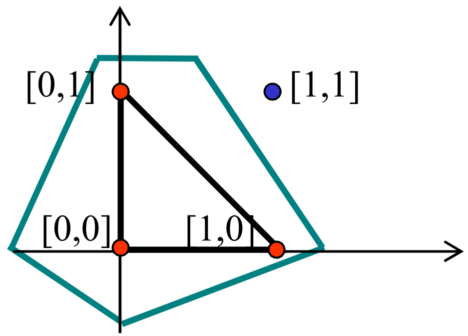
$$S = \{ x \in \{0,1\}^5 : x \text{ rispetta certe condizioni} \}$$

$P = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \leq b\}$
Poliedro con $(A \in \mathrm{R}^{m \times n}, b \in \mathrm{R}^m)$

$$P = \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_5 \leq 5 \\ 7x_1 + 3x_4 + 2x_5 \leq 10 \\ x \in \mathbf{R}^5 \end{cases}$$

$$P \text{ è una } \textbf{FORMULAZIONE} \text{ di } S \iff P \cap \{0,1\}^n = S$$

Un poliedro P è una *formulazione* se e solo se
- *contiene tutti i vettori di* S
- *non contiene alcun vettore di* $\{0,1\}^n - S$



Posso avere ***infinite*** formulazioni dello stesso problema di PL01

LB da Rilassamento Lineare

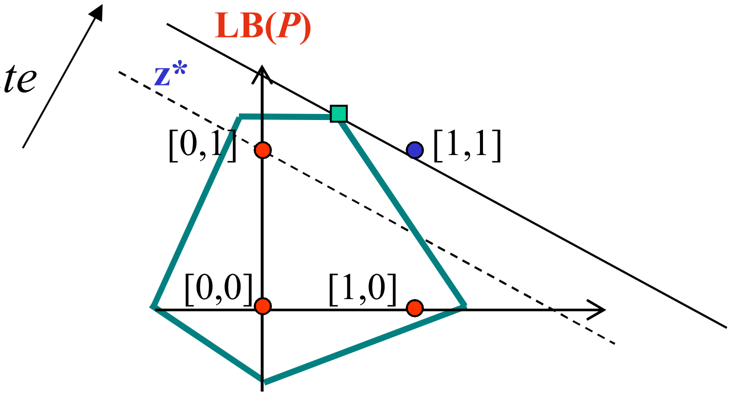
P *è una* **FORMULAZIONE** *di* S $\Leftrightarrow$ $P \cap \{0,1\}^n = S$

$$\min \{c^T x : x \in S\} = \min \{c^T x : x \in P \cap \{0,1\}^n\} = c^T x^* = z^*$$
$$\geq \min \{c^T x : x \in P\} = \mathrm{LB}(P)$$

Problema di PL
(*Rilassamento Lineare*)

Valore della Soluzione
Ottima del Problema di PL01

Allora $\mathrm{LB}(P) \leq z^*$



$\mathrm{LB}(P)$ è un "*Lower Bound*" per z^* :

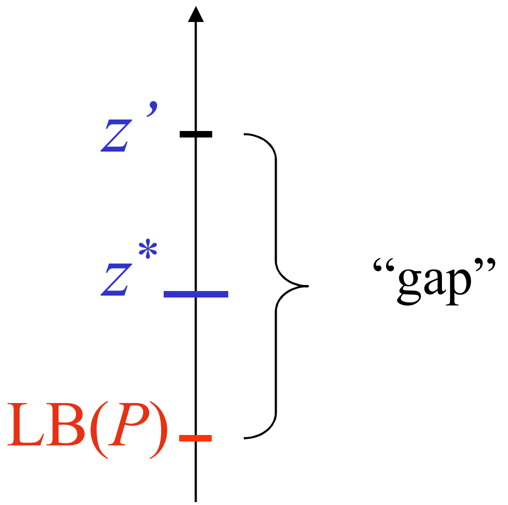
Dato che aumento le possibilità di scelta
della soluzione, l'ottimo del rilassamento
sarà non peggiore dell'ottimo del problema intero

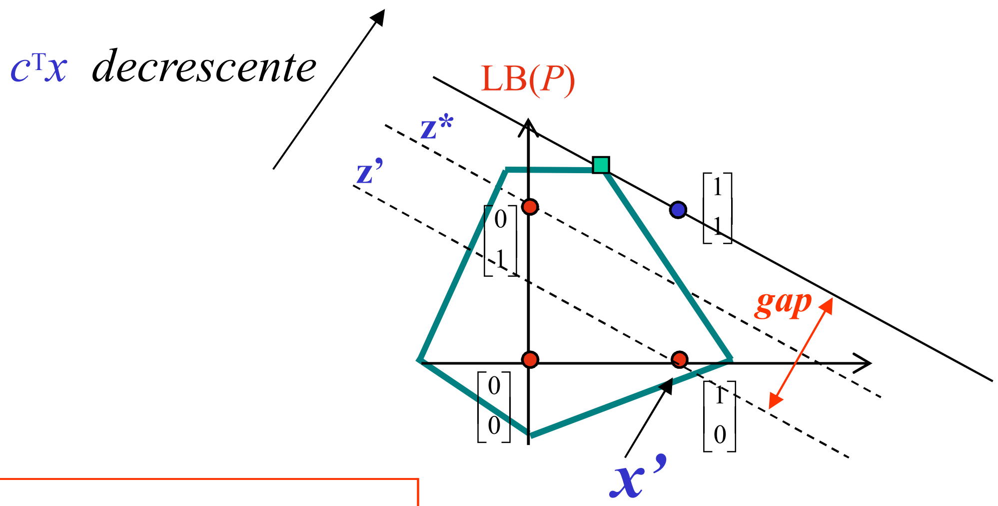
Uso del LB da Ril. Lineare

Problema di PL01: $\boxed{min\ \{c^{T}x:\ x \in S\}}$

$$\mathrm{LB}(P) \leq min\ \{c^{T}x:\ x \in S\} = z^{*}$$

- Calcolare z^{*} è (di solito) *difficile*
- Calcolare LB(P) è *facile* (Problema di PL, *Simplesso*)
- Se conosciamo una soluzione ammissibile $x' \in S$ (di valore $z' = c^{T}x'$), LB(P) fornisce una <u>*certificazione di qualità*</u> per x'





"gap" nullo → x' ottimo per PL01

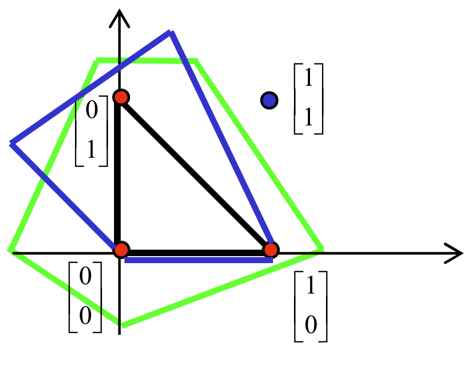
Complessivamente

Problema di PL01: $\boxed{min\ \{c^T x:\ x \in S\}}$

$$\mathrm{LB}(P) \le min\ \{c^T x:\ x \in S\} = z^*$$

- Calcolare z^* è *difficile*
- Calcolare LB(P) è *facile* (Problema di PL)
- Trovare una soluzione $x' \in S$ è (di solito) ***facile*** (*Euristiche*)
- Il "gap" $c^T x'$ - LB(P) certifica la qualità di x'
  - *piccolo "gap"* = buona qualità di x'
  - *"gap" nullo* = x' *ottimo per PL01*

Il *"gap"* dipende dalla formulazione P



- S ammette molte formulazioni alternative
- *Come classificarle (e sceglierle) ?*

Criteri di Qualità delle Formulazioni

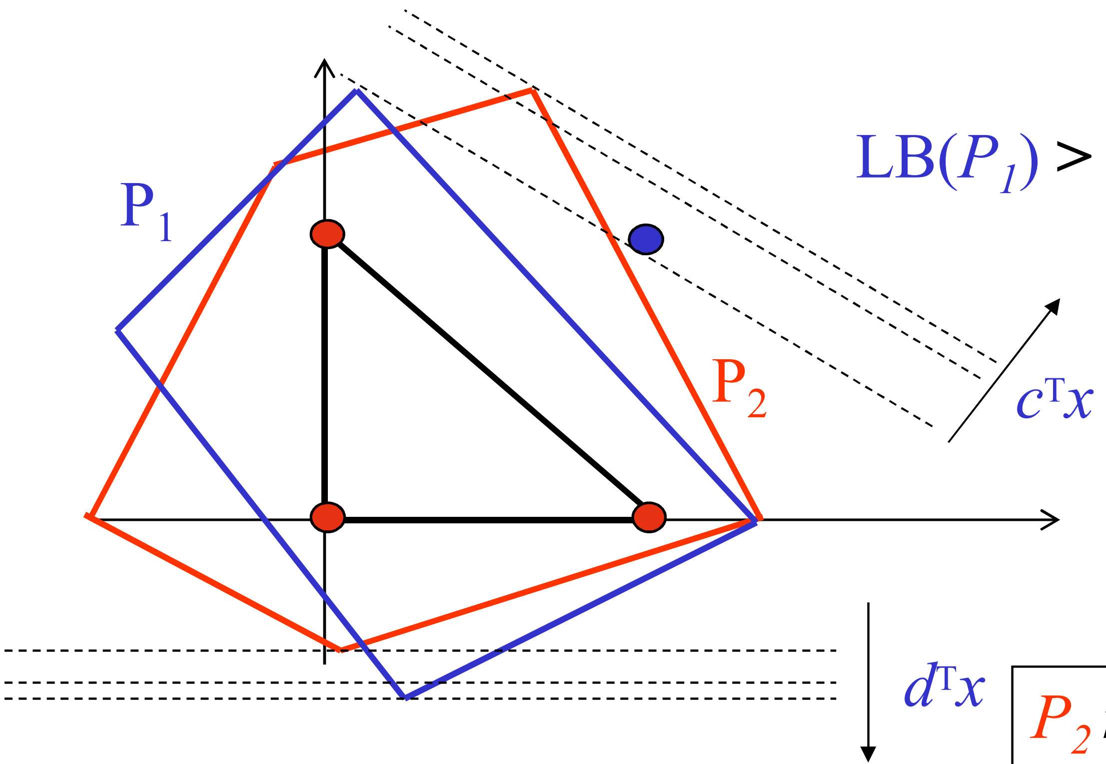
No. disequazioni di $Ax \le b$? No. variabili ? facilità di calcolo ?

No, qualità vuol dire "gap piccolo" = massimo lower bound

CRITERIO 1: $\boldsymbol{P_1}$ migliore di $\boldsymbol{P_2}$ ⟺ LB($\boldsymbol{P_1}$) > LB($\boldsymbol{P_2}$)

Problema: Dipendenza dalla funzione obiettivo

LB(P_1) > LB(P_2)



P_1 migliore di P_2 Se utilizzo $c^T x$

P_2 migliore di P_1 Se utilizzo $d^T x$

LB(P_2) > LB(P_1)

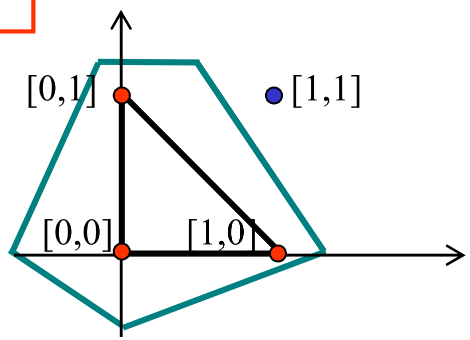
Un Criterio Indipendente dalla FO

Invece il criterio di qualità deve essere **indipendente** dalla funzione obiettivo (che non è prevedibile a priori)

CRITERIO 2: P_1 migliore di P_2 ⟺ $\mathrm{LB}(P_1) \geq \mathrm{LB}(P_2)$ per ogni $c \in \mathbf{R}^n$

Equivalente a:

CRITERIO 3: P_1 migliore di P_2 ⟺ $P_1 \subseteq P_2$



Ma allora… esiste una formulazione che sia contenuta in ogni altra?

$P_S = conv(S) \subseteq P \quad \forall$ formulazione P di S

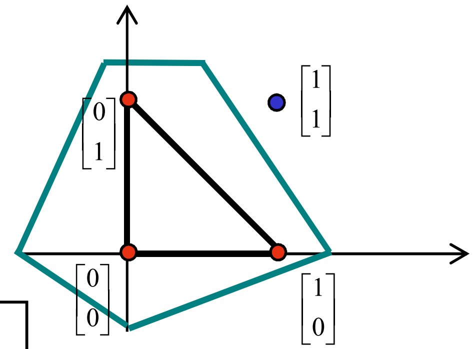
Formulazione ottima

Formulazione Ottima

Problema di PL01: $z^* = \min \{c^T x : \ x \in S\}$

$P_S = Conv(S) = \{x \in \mathbf{R}^n\text{:}\ Ax \leq b\}$ POLIEDRO ($A \in \mathbf{R}^{mn}$, $b \in \mathbf{R}^m$)

- S *insieme dei <u>vertici</u> di* P_S ($S = Ext(P_S)$)
- *Ogni disequazione di* $Ax \leq b$ *definisce una <u>faccia massimale</u> di* P_S (... se $dim(P_S) = n$)



$$z^* = \min \{c^T x : x \in S\} = \min \{c^T x : x \in Ext(P_S)\}$$
$$= \min \{c^T x : x \in P_S\} = \mathrm{LB}(P_S) = c^T x^\circ$$

con $\mathbf{x}^\circ$ ***<u>soluzione ottima</u>*** *del* ***rilassamento lineare***

$z^* = \mathrm{LB}(P_S) = c^T x^\circ$ $\Rightarrow$ $c^T x^\circ = z^* \leq c^T x \quad \forall x \in S$

$x^\circ \in Ext(P_S) = S$ $\Rightarrow$ x° ***<u>soluzione ottima</u> del*** PL01

Come Trovare P_S ?

Disponiamo di una descrizione (esplicita) di:

$P_S = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \leq b\}$ per ogni problema di PL01 ?

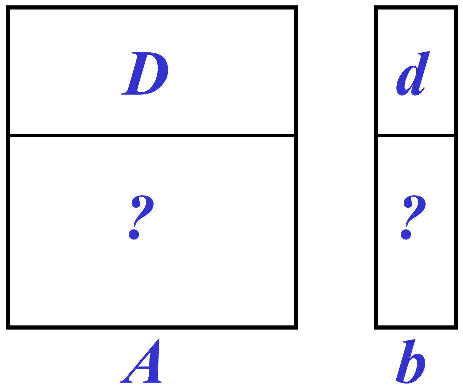
Ovvero: ***Conosciamo la matrice A e il vettore b ?***

Dove "conoscere" significa: *conoscere i coefficienti* oppure *avere una regola che consente di calcolare i coefficienti* di ogni riga della matrice ($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$)

Sfortunatamente NO !

Quasi sempre conosciamo solo *alcune* (*poche*) righe di ($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$) che *definiscono una formulazione* di S

- $P = \{x \in \mathbf{R}^n : Dx \leq d\}$
- $P \cap \{0,1\}^n = S$



Esempio di P_S

$$S = \{ y \in \{0,1\}^5 : \; 7y_1 + 6y_2 + 5y_3 + 3y_4 + 2y_5 \leq 11 \}$$

$$P_S = \{ y \in \mathrm{R}^5 : Ay \leq b, y \geq 0_5 \}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 + y_3 \leq 1 \\ y_1 + y_4 + y_5 \leq 2 \end{array}}$$
$$\begin{array}{l} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_5 \leq 2 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 + y_5 \leq 4 \\ 1 \geq y_1, \ldots, y_5 \geq 0 \end{array}$$

Regola di costruzione di un “tipo” di riga di ***A***:
Se la somma dei coefficienti di ***k*** *variabili è maggiore di* ***11*** *allora al più* ***k-1*** *di esse possono essere poste ad* ***1***.

$$\begin{array}{l} y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 + y_3 \leq 1 \\ y_1 + y_4 + y_5 \leq 2 \end{array}$$

Famiglia di disequazioni di P_S

Rilassamenti di P_S

Attualmente non disponiamo di una descrizione di P_S per ogni problema di PL01

Disponiamo però spesso di Rilassamenti di P_S, *ovvero*:

- Poliedri $\boldsymbol{P}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\!: \boldsymbol{Dx} \le \boldsymbol{d}\,\}$) con le seguenti proprietà:

1. Il poliedro $\boldsymbol{P}$ è una formulazione di S
2. Il sistema $\boldsymbol{Dx} \le \boldsymbol{d}$ è costituito da alcune famiglie di disequazioni appartenenti al sistema $\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$

- Ciascun rilassamento produce un "lower bound" di z^* :

$$\mathrm{LB}(P) = min\ \{c^{\mathrm{T}}x\!: x\in P\} \le z^*$$

Esempio: (mini-)pianificazione degli investimenti

- Due progetti A e B su unico periodo
- Vantaggi c_A e c_B associati (es. 5/3 e 11)
- Risorse necessarie $d_A=5$ e $d_B=7$
- Vincolo: risorse utilizzate $\leq$ D =10

$$\max\ c_A x_A + c_B x_B$$

$$x \in S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

<u>Formulazione Naturale:</u>

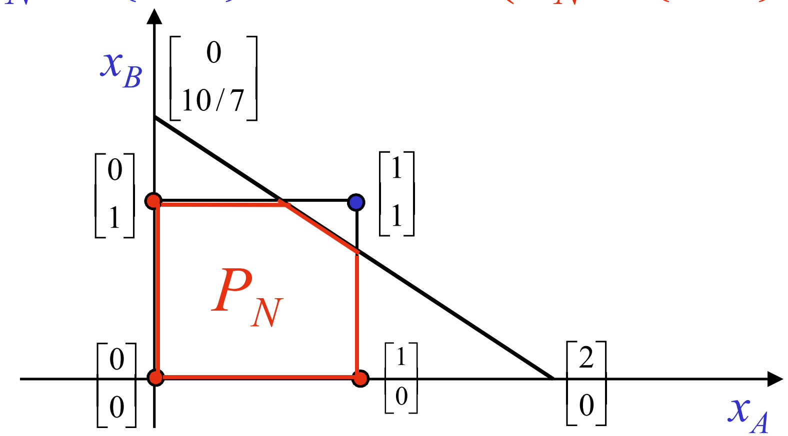
$$\min\ -c_A x_A - c_B x_B$$

$$x \in P_N = \begin{cases} \boxed{5x_A + 7x_B \leq 10} \\ \underbrace{\boxed{1 \geq x_A, x_B \geq 0}}_{\text{vincoli di “box”}} \end{cases}$$

Verifica: $P_N \cap \{0,1\}^2 = S$

a) $x \in S \Rightarrow x \in P_N$ $(S \subseteq P_N \cap \{0,1\}^2)$

b) $x \in P_N \cap \{0,1\}^2 \Rightarrow x \in S$ $(P_N \cap \{0,1\}^2 \subseteq S)$



Formulazione Naturale del Problema

$\boldsymbol{S}$ = {*Vettori di incidenza degli insiemi di progetti compatibili con i vincoli di "budget" in <u>ogni periodo</u>*}

$$A^T = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11},} & a_{12}, \dots, & a_{1t} \\ a_{21}, & a_{22}, \dots, & a_{2t} \\ & \dots & \\ a_{m1}, & a_{m2}, \dots, & a_{mt} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21}, \dots, & a_{m1} \\ a_{12}, & a_{22}, \dots, & a_{m2} \\ & \dots & \\ a_{1t}, & a_{2t}, \dots, & a_{mt} \end{pmatrix} \quad \leq \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_t \end{pmatrix}$$

$$\leq$$

$$b^T = [\, b_1, \; b_2, \dots, \; b_t \,]$$

$$\boxed{x \in \boldsymbol{S}} \Rightarrow a_{11}x_1 + a_{21}x_2 +, \dots, a_{m1}x_m \leq b_1$$

$$\boxed{x \in \boldsymbol{S}} \Leftrightarrow \boxed{x \in \{0,1\}^{\mathrm{I}}, \; Ax \leq b}$$

Formulazioni dell'esempio

Formulazione Naturale:

$$\min -5/3\, x_A - 11\, x_B$$

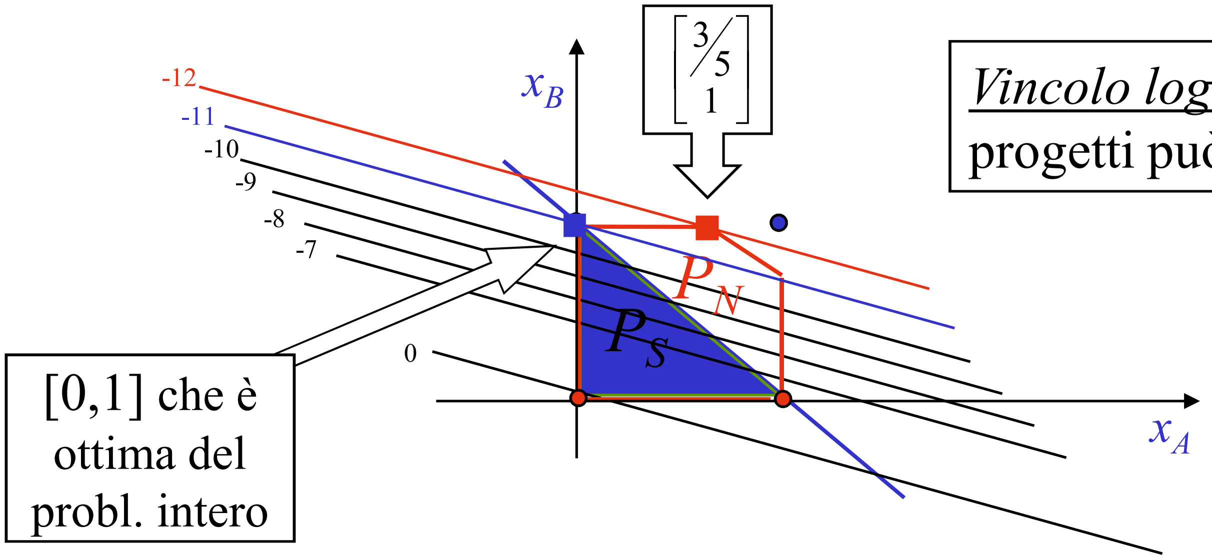
$$x \in P_N = \begin{cases} 5x_A + 7x_B \leq 10 \\ 1 \geq x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

Formulazione Ottima:

$$\min -5/3 x_A - 11\, x_B$$

$$x \in P_S = \begin{cases} \boxed{x_A + x_B \leq 1} \\ 1 \geq x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

Vincolo logico: uno solo dei due progetti può essere attivato



Come vedere se la Formulazione è Ottima?

Problema di PL01: $z^* = \min \{c^T x : x \in S\}$

Abbiamo una $P = \{x \in R^n : Dx \leq d\}$ formulazione di S

Sarà $P = P_S = \{x \in R^n : Ax \leq b\} = Conv(S)$??

Si può rispondere dimostrando che :

- Ogni disequazione del sistema $Ax \leq b$ è **implicata** dal sistema $Dx \leq d$;
- *Oppure che* $\text{argmin} \{c^T x : x \in P\} \in S$ **per ogni** $c \in R^n$
- *Oppure che* ogni ***vertice*** di P ha **componenti 0-1**

vediamo ora quest'ultimo caso ...

Definizioni di Unimodularità

Definizione 1: *Una matrice* ***A (m×n)*** *è detta* ***unimodulare*** *se e solo se, per ogni sotto-matrice quadrata* ***B (m×m)*** *di* ***A*** ***(base)*** *si ha* ***det(B)∈{0,1,-1}***

Definizione 2: *Una matrice* ***A (m×n)*** *di è detta* ***totalmente unimodulare*** *se e solo se, per ogni sotto-matrice quadrata di* ***A*** ***B (p×p)*** *con* ***p≥0 (=1,…,m)*** *si ha* ***det(B)∈{0,1,-1}***

3	2
1	1

unimodulare
det(A)=3x1-1x2=1
ma non ***totalmente unimodulare***
det(B)=3,2,1,1

1	1	0
0	1	1
1	0	1

Non ***unimodulare***
det(A)=1(1x1-0x1)
-0(1x1-0x0)
+1(1x1-1x0)=2)

0	1	1
1	0	1

unimodulare e ***totalmente unimodulare***
det(B)∈{0,1,-1}

Unimodularità e Interezza

TEOREMA 1: *Sia* A *una matrice a componenti intere con* $rank(A)=m$. *Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. A è **unimodulare;**
2. *I* **vertici** *di* $P = \{x \in R^n : Ax=b\ ,\ x \geq 0_n\}$ *sono* **interi** *per ogni vettore* $b \in Z^m$ **(intero)**
3. *Ogni sotto-matrice quadrata* B $(m \times m)$ **non-singolare** *di* A *ha una* **matrice inversa** B^{-1} **a componenti intere**

La dimostrazione procede dimostrando che

$(1 \Rightarrow 2)$ $(2 \Rightarrow 3)$ $(3 \Rightarrow 1)$

Nel corso da 6 crediti ci limiteremo a vedere $(1 \Rightarrow 2)$

Motivazione di $(1 \Rightarrow 2)$

$\boxed{A \text{ è } \textbf{unimodulare} \Rightarrow \textbf{Vertici} \text{ di } P \textbf{ interi} \text{ per } b \in Z^m}$

DIMOSTRAZIONE: $x°$ **vertice** di $P = \{x \in R^n \colon Ax = b,\ x \geq 0_n\}$

$\Leftrightarrow$ $x°$ **SBA (Soluzione di Base Ammissibile)**

$\Leftrightarrow$ Esiste B sotto-matrice $(m \times m)$ di A con $\det(B) \neq 0$

tale che, posto: $x = \begin{pmatrix} x_B \in R^m \\ x_N \in R^{n-m} \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}$ abbiamo:

$$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \qquad \boxed{x° = \begin{pmatrix} x^o_B \\ x^o_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix} \geq 0_n}$$

$$B^{-1} = \frac{B^{+}}{\det(B)}$$

matrice aggiunta (trasposta dei compl. alg.) di B

A **matrice** intera (a componenti intere) $\Rightarrow$ B^{+} intera

A **matrice** unimodulare $\Rightarrow$ $|\det(B)| = 1$

$\Rightarrow$ $B^{-1}b \in Z^m$ **per ogni** $b \in Z^m$ $\Rightarrow$ $x° \in Z^n$ **per ogni** $b \in Z^m$

Totale Unimodularità e Interezza

TEOREMA: *Sia* $\boldsymbol{A}$ *una matrice a componenti intere con* $rank(A)=m$. *Allora I* ***vertici*** *di* $\boldsymbol{P = \{x \in R^n : Ax \leq b \, , \, x \geq 0_n\}}$ *sono* ***interi*** *per ogni vettore* $\boldsymbol{b \in Z^m}$ **(*intero*)** *se e solo se la* ***matrice*** $\boldsymbol{A}$ è ***totalmente unimodulare.***

Nel corso da 6 crediti non ne vediamo la dimostrazione

Come verificare la Totale Unimodularità?

TEOREMA: *Sia **A** una matrice a componenti **{0,1,-1}**. Allora **A** è **totalmente unimodulare (TUM) se:***

(1) *ogni colonna contiene al più due coefficienti diversi da zero;*

(2) *le righe di **A** sono partizionabili in due insiemi* Q_1 *e* Q_2 ***tali che:***

(2a) *Se una colonna **j** contiene due elementi* $a_{ij} \neq 0$ **e** $a_{hj} \neq 0$ *aventi lo **stesso segno** allora* $i \in Q_1$ *e* $h \in Q_2$

(2b) *Se una colonna **j** contiene due elementi* $a_{ij} \neq 0$ **e** $a_{hj} \neq 0$ *aventi lo **segno diverso** allora* $i,h \in Q_1$ *oppure* $i,h \in Q_2$

È una condizione sufficiente: se verificata è TUM, se non verificata potrebbe esserlo o no!

Criterio Sufficiente (esempi)

TEOREMA: *Sia* ***A*** *una matrice a componenti* ***{0,1,-1}***.

Allora ***A*** *è* ***totalmente unimodulare (TUM)*** ***se:***

(1) *ogni colonna contiene al più due coefficienti diversi da zero;*

(2) *le righe di* ***A*** *sono partizionabili in due insiemi* Q_1 *e* Q_2 ***tali che:***

(2a) Se una colonna ***j*** *contiene due elementi* $a_{ij} \neq 0$ **e** $a_{hj} \neq 0$ *aventi lo* ***stesso segno*** *allora* $i \in Q_1$ *e* $h \in Q_2$

(2b) Se una colonna ***j*** *contiene due elementi* $a_{ij} \neq 0$ **e** $a_{hj} \neq 0$ *aventi lo* ***segno diverso*** *allora* $i,h \in Q_1$ *oppure* $i,h \in Q_2$

$$\begin{array}{c} \\ Q_1 \\ \\ \\ Q_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Criterio OK $\Rightarrow$ ***TUM***

Criterio fallito

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Non TUM

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TUM

Matrici Totalmente Unimodulari

1. Se ***A*** *è* ***totalmente unimodulare****, anche*

$$A^T \qquad \begin{bmatrix} A \\ I_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I_n \end{bmatrix}$$

sono ***totalmente unimodulari***

2. La ***matrice di incidenza*** *nodi archi* ***M*** *di un grafo orientato è* ***totalmente unimodulare*** *(vedremo)*