“Sapienza” Università di Roma - Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale

Flusso a Costo Minimo

Docente: Renato Bruni

bruni@dis.uniroma1.it

Corso di: Ottimizzazione Combinatoria

Dal mondo reale …

In molti casi reali occorre risolvere problemi in cui, intuitivamente, bisogna scegliere un percorso per trasportare qualcosa, ad esempio:

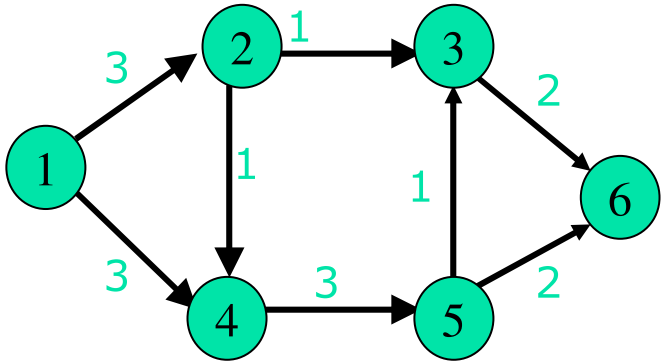
- **Trasporto di merci**: decidere quale strade utilizzare, tra un insieme di strade possibili, in modo da minimizzare dei costi
- **Progetto reti di telecomunicazione**: scegliere quali collegamenti effettuare in modo da minimizzare costi o massimizzare flussi

Esistono inoltre problemi in cui non trasportiamo qualcosa ma che possono essere visti nello stesso modo

- **Assegnamento**: attribuire lavori a persone
- **Pianificazione di attività**: individuare il tempo minimo di completamento di un progetto fatto da molte attività
- Etc.

… alla teoria

- Abbiamo un **grafo orientato** $G = (N, A)$
  Senza perdita di generalità: collegamenti bidirezionali diventano due archi opposti

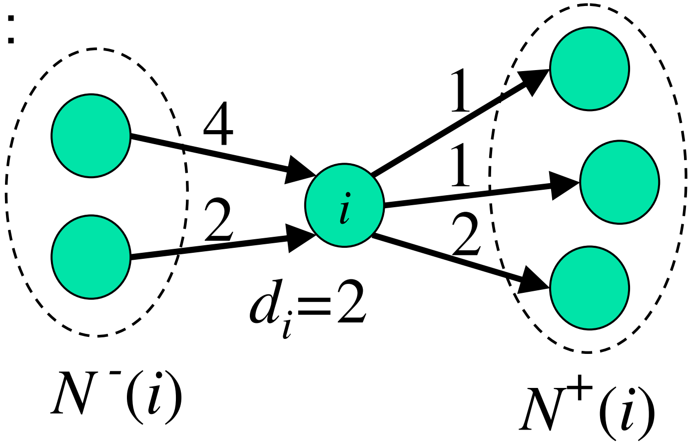


- Una **domanda** d_i associata a ogni nodo $i \in N$. È quanto deve ricevere ogni nodo, diventa negativo se invece deve fornire, nullo se solo transito.
- Una **costo** w_{ij} associato a ogni arco $(i, j) \in$ A. È il costo di inviare una unità lungo quell'arco. Il grafo si chiama allora **rete** (=network).
- Spesso anche una **capacità** c_{ij} associata a ogni arco $(i, j) \in A$. È la massima quantità inviabile lungo quell'arco.
- Vogliamo trovare un **flusso** x_{ij} da inviare su ogni arco $(i, j) \in A$ in modo da rispettare le richieste e minimizzare il costo (es. flussi monetari)

Flusso Ammissibile

Vogliamo che il flusso rispetti due **condizioni**:

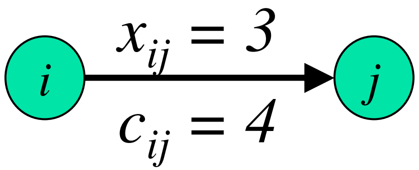
- $$\sum_{j \in N^-(i)} x_{ji} - \sum_{k \in N^+(i)} x_{ik} = d_i \qquad \forall i \in N$$



Cioè **conservazione** del flusso: flusso entrante - flusso uscente = domanda

Sommando su tutti i nodi, occorre che la somma delle domande sia nulla.

- $$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} \qquad \forall (i, j) \in A$$



Cioè flusso non negativo e non superiore alla capacità

Problema di Flusso a Costo Minimo (MFC)

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} w_{ij}\, x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{j\in N^-(i)} x_{ji} - \sum_{k\in N^+(i)} x_{ik} = d_i \quad \forall i\in N \\ 0 \le x_{ij} \le c_{ij} \qquad \forall (i,j)\in A \end{cases}$$

- Cioè in forma **compatta**

$$\begin{cases} \min w^{\mathrm{T}} x \\ Mx = d \\ \mathbf{0} \le x \le c \end{cases}$$

o anche, convertendo equazioni in disequazioni:

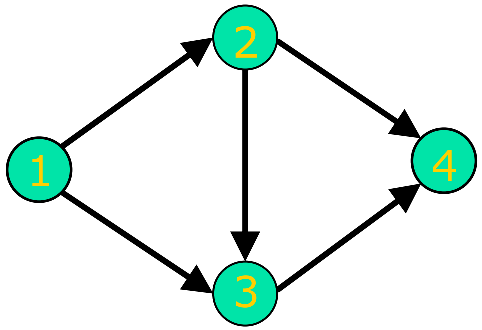
$$\begin{cases} \min w^{\mathrm{T}} x \\ Mx \le d \\ -Mx \le -d \\ Ix \le c \\ x \ge \mathbf{0} \end{cases}$$

- M è detta matrice di **incidenza nodi-archi**

Matrice di Incidenza

- In M i nodi corrispondono a **righe** e gli archi a **colonne**.
- Ogni elemento vale -1 se l'arco parte dal nodo, 1 se l'arco arriva nel nodo, 0 altrimenti

Esempio:



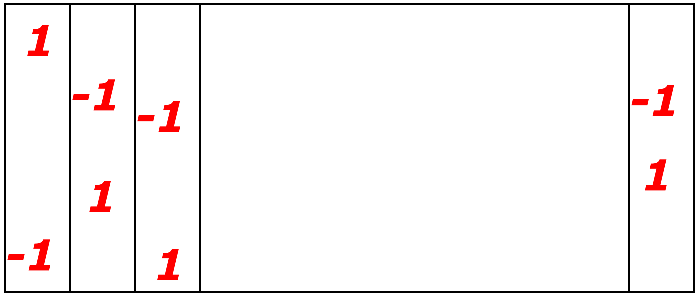
$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 12 & 13 & 23 & 24 & 34 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

- Da notare che le righe di M sono linearmente **dipendenti**: la somma di tutte le righe è il vettore nullo (una è ridondante)

Interezza?

- Molto spesso i **veri costi** non sono $w^{\mathrm{T}}x$ ma $w^{\mathrm{T}}\lceil x \rceil$: se occupo ¾ di un camion lo pago per intero!
- Allora, quando possibile, vogliamo **flussi interi**
- Complicato? No, fortunatamente

- È un problema di PL ma M è **totamente unimodulare**: ogni col. ha 2 componenti non nulle e di segno opposto: nel partizionamento (Q_1,Q_2) sono tutte in Q_1



- allora è totalmente unimodulare anche $\begin{pmatrix} M \\ -M \\ I \end{pmatrix}$

- allora per d e c **interi** ho tutti i **vertici interi** e quindi ottengo una **soluzione intera** risolvendo un problema di PL

Flusso Intero di Costo Minimo

Il problema in cui voglio un flusso intero, detto **flusso intero** di (G,c,d) perchè definito dal grafo G e dai vettori c e d, è: $min\{w^T x: \ x \in S\}$ con $x \in Z^{|A|}$ ed è un problema di **OC**

MCF

(il problema visto)

$$\begin{cases} \min w^T x \\ x \in Q \end{cases} \qquad Q = \left\{ x : Mx = d, 0_{|A|} \leq x \leq c \right\}$$

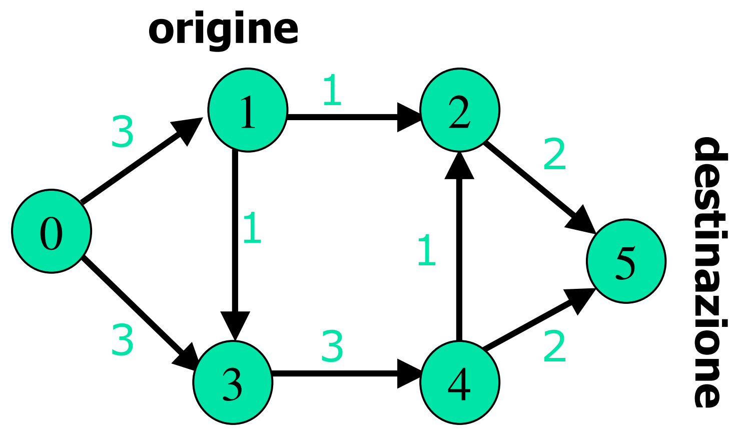
Q formulazione ottima ⇒ ***L'ottimo $x^* \in Z^{|A|}$ del flusso intero** di (G,c,d) si ha risolvendo un problema di PL*

Vedremo, prima intuitivamente e poi più dettagliatamente, due importanti casi particolari di problemi di flusso

- Problemi di **Cammino Minimo**
- Problemi di **Massimo Flusso**

Problema di Cammino Min (o Max)

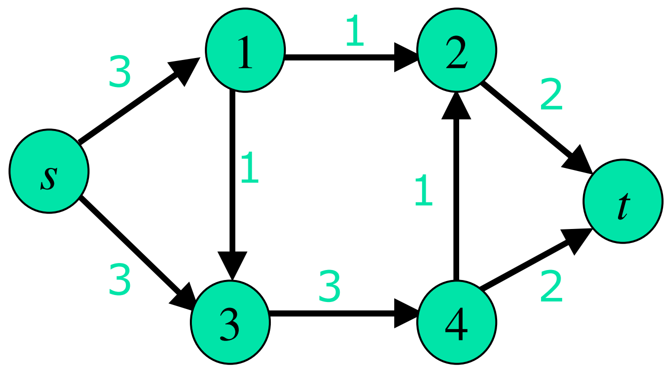
- Ho dei **costi** c_{ij} per ogni arco $(i, j) \in A$
- Voglio trovare un **cammino** orientato da un nodo (origine, es. 1) ad un altro (destinazione, es. 5) tale che la somma dei costi degli archi che lo compongono sia **minima** (o **massima**)



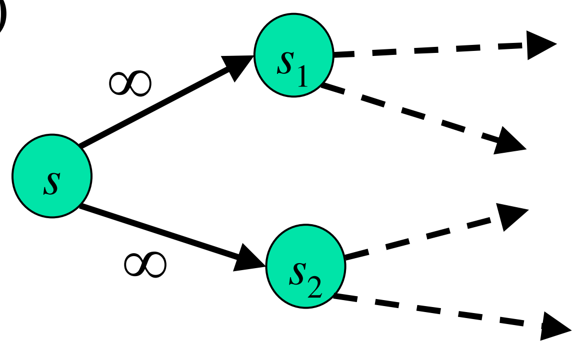
- Se non esistono cammini orientati tra quei nodi il problema è **inammissibile**
- Se esiste un ciclo (= cammino orientato chiuso) di lunghezza totale negativa il problema è **illimitato** inferiormente
- In tutti gli altri casi esiste l'**ottimo**
- È un problema di flusso a costo minimo in cui la rete è non capacitata e la domanda è -1 per l'origine, 1 per la destinazione e 0 per gli altri nodi

Problema di Massimo Flusso

- Ho un nodo **sorgente** s solo archi uscenti
- e un nodo **pozzo** t con solo archi entranti
- Ho delle capacità c_{ij} per ogni arco $(i, j) \in A$ ma tutti i costi uguali



- Voglio trovare un flusso ammissibile tale da **massimizzare** il flusso entrante in t (e quindi uscente da s, dato che i nodi intermedi sono tutti di transito) detto **flusso s-t** e indicato con $f(x)$
- Se ho più sorgenti s_1 s_2 ne creo una sola a monte
- E, se ho più pozzi, ne creo uno solo a valle



- È un problema di flusso a costo minimo in cui ho un arco da t ad s di capacità infinita e costo -1 mentre tutti gli altri hanno costo 0