Cammino Minimo
Massimo Flusso

Docente: Renato Bruni

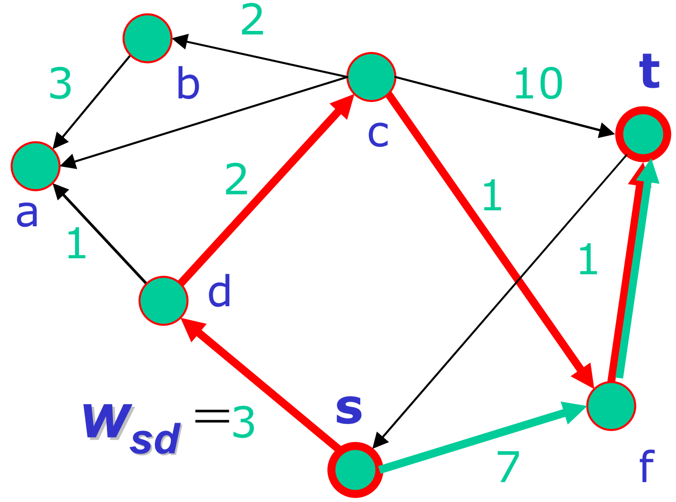
bruni@dis.uniroma1.it

Corso di: Ottimizzazione Combinatoria

Questa sezione è derivata dal materiale del prof. A. Sassano

Cammino di costo minimo da *s* a *t*

DATI:
- *Grafo orientato e connesso* ***G(N,A)***
- *Due nodi speciali* ***s*** *e* ***t***
- *∃ cammino orientato da* ***s*** *ad ogni* ***u*** $\in$ ***N***
- *Costi sugli archi* w_{uv} $\forall$ $uv \in A$



Il costo di un cammino ***P*** *di* ***G(N,A)*** *sia*

$$w(A(P)) = w(P) = \sum_{uv \in A(P)} w_{uv}$$

$P^* = \{sd, dc, cf, ft\}$	$c(P^*) = 7$

$P = \{sf, ft\}$	$c(P) = 8$

TROVARE: Il CAMMINO ORIENTATO P da s a t avente <u>COSTO MINIMO</u>*

$$P^*: \; w(P^*) \leq w(P) \quad \forall \text{ cammino orientato } P \text{ da } s \text{ a } t \text{ di } G(N,A)$$

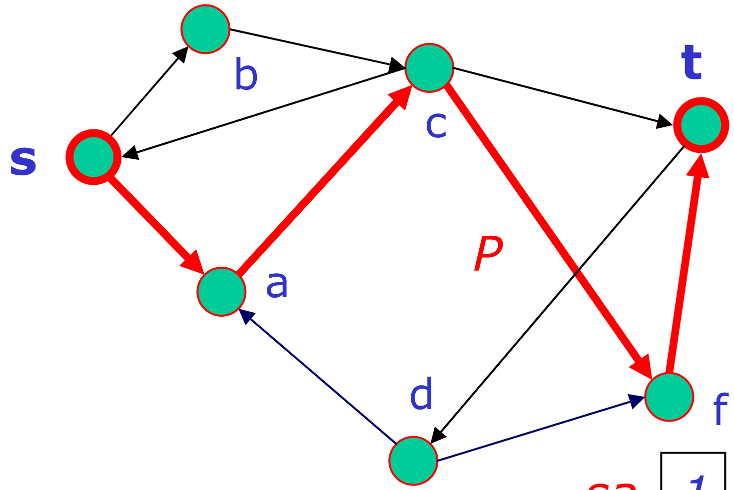
A volte, per semplicità di notazione, e quando questo non produce confusione denoteremo con P l'insieme A(P)

Vettore di Incidenza di un Cammino

Rappresentazione di un cammino

Def.: $\mathbf{x}^P \in \{0,1\}^A$ <u>*vettore di incidenza di*</u> *P*

$$\begin{cases} \mathbf{x}^P_{uv} = 1 & uv \in P \\ \mathbf{x}^P_{uv} = 0 & uv \notin P \end{cases}$$



<u>*Proprietà di*</u> $\mathbf{x}^P$

$$\sum_{us \in \delta^-_G(s)} \mathbf{x}^P_{us} = 0 \qquad \sum_{su \in \delta^+_G(s)} \mathbf{x}^P_{su} = 1$$

(i) Da s <u>esce un solo arco</u> di un cammino P

$$\sum_{ut \in \delta^-_G(t)} \mathbf{x}^P_{ut} = 1 \qquad \sum_{tu \in \delta^+_G(t)} \mathbf{x}^P_{tu} = 0$$

(ii) In t <u>entra un solo arco</u> di P

$$\sum_{uv \in \delta^-_G(v)} \mathbf{x}^P_{uv} = \sum_{vu \in \delta^+_G(v)} \mathbf{x}^P_{vu}$$

(iii) In ogni altro nodo $v \notin \{s,t\}$
Numero archi di P <u>entranti</u> =
= Numero archi di P <u>uscenti</u>

$\mathbf{x}^P$

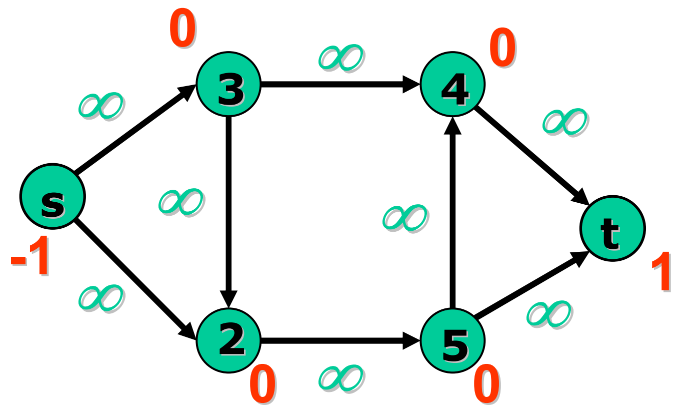
sa	1
sb	0
cs	0
bc	0
ac	1
cf	1
da	0
df	0
td	0
ct	0
ft	1

Cammino min come problema di Flusso Intero

DATI: *Un grafo orientato* $G(N,A)$

Un vettore capacità $c = \infty_{|A|}$

Un vettore domanda $d_{st} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} s \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ t \end{array} \end{array}$



*possiamo scrivere il problema del Cammino Minimo (**CM**) come:*

$$\min \{w^T x : x \in Q_{st}\}$$

Cioè come flusso intero di $(G, d_{st}, \infty_{|A|})$

$$Q_{st} = \{x : Mx = d_{st}, x \geq 0_{|A|}\}$$

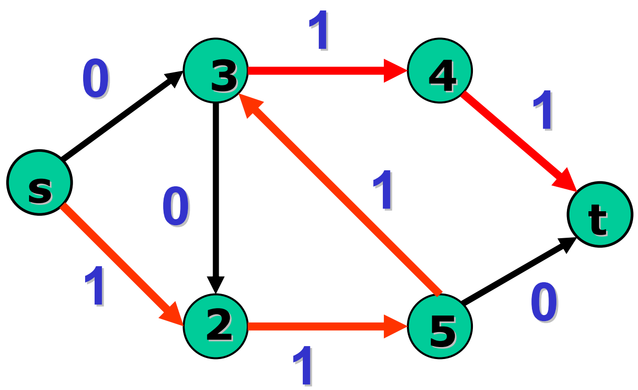
Poliedro dei cammini da s a t

Rappresentazione grafica di una soluzione $\boldsymbol{x} \in Q_{st}$

DEFINIZIONE: *Dato un vettore **x** diremo SUPPORTO di **x** l'insieme di archi* $S(\boldsymbol{x})=\{e \in A: \boldsymbol{x}_e > 0\}$

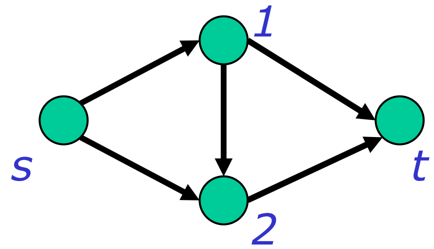
*Rappresenteremo un vettore **x** evidenziando gli archi del supporto (ad es. in rosso) e (a volte) indicando il valore della componente di* $\boldsymbol{x}_e$ *accanto all'arco e*

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} s3 \\ s2 \\ 32 \\ 25 \\ 53 \\ 34 \\ 4t \\ 5t \end{array} \equiv$$



Vettori del Poliedro dei Cammini (Esempi)

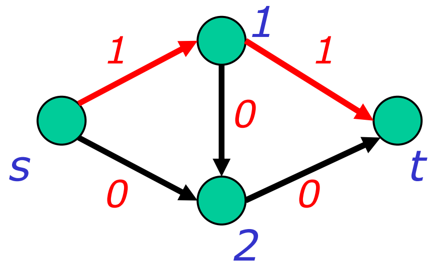
$$Q_{st} = \{\, x \in \Re^{|A|} :\ Mx = b,\ x \geq 0_{|A|} \,\}$$



$$\begin{aligned}
-x_{s1} - x_{s2} &= -1 \\
x_{1t} + x_{2t} &= 1 \\
x_{s1} - x_{12} - x_{1t} &= 0 \\
x_{s2} + x_{12} - x_{2t} &= 0
\end{aligned}$$

x^P

s1	1
s2	0
12	0
1t	1
2t	0

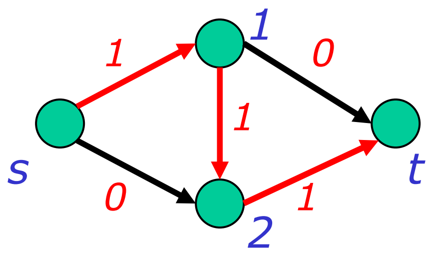


P cammino s-t

$x^P \in Q_{st}$

$x^{P'}$

s1	1
s2	0
12	1
1t	0
2t	1

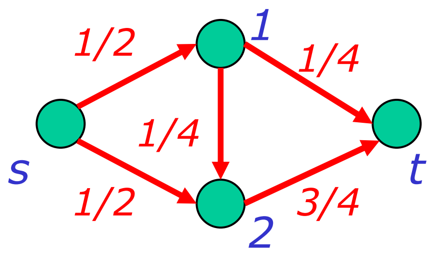


P′ cammino s-t

$x^{P'} \in Q_{st}$

$\hat{x}$

s1	1/2
s2	1/2
12	1/4
1t	1/4
2t	3/4



$\hat{x} \in Q_{st}$

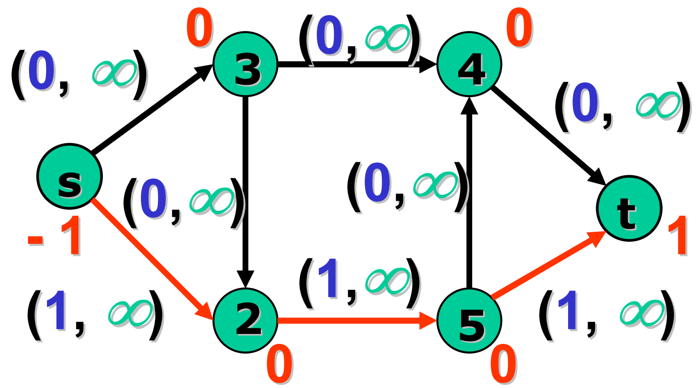
Non è un cammino ma sta nel poliedro dei cammini !

Vettore di incidenza di un cammino ⇒ flusso intero

x^P vettore di incidenza di un cammino orientato P

(i) da s esce un solo arco di P

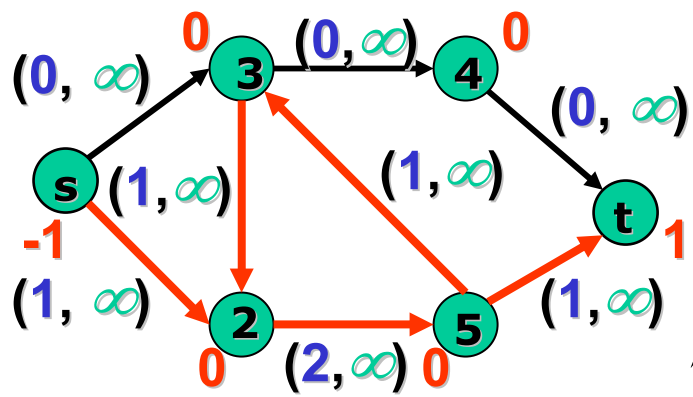
(ii) in t entra un solo arco di P



(iii) In ogni nodo $v \notin \{s,t\}$

- *un arco di* P *entrante e un arco di* P *uscente* **OPPURE**
- *nessun arco di* P *entrante o uscente*

⇒ x^P *flusso intero di* $(G, d_{st}, \infty_{|A|})$



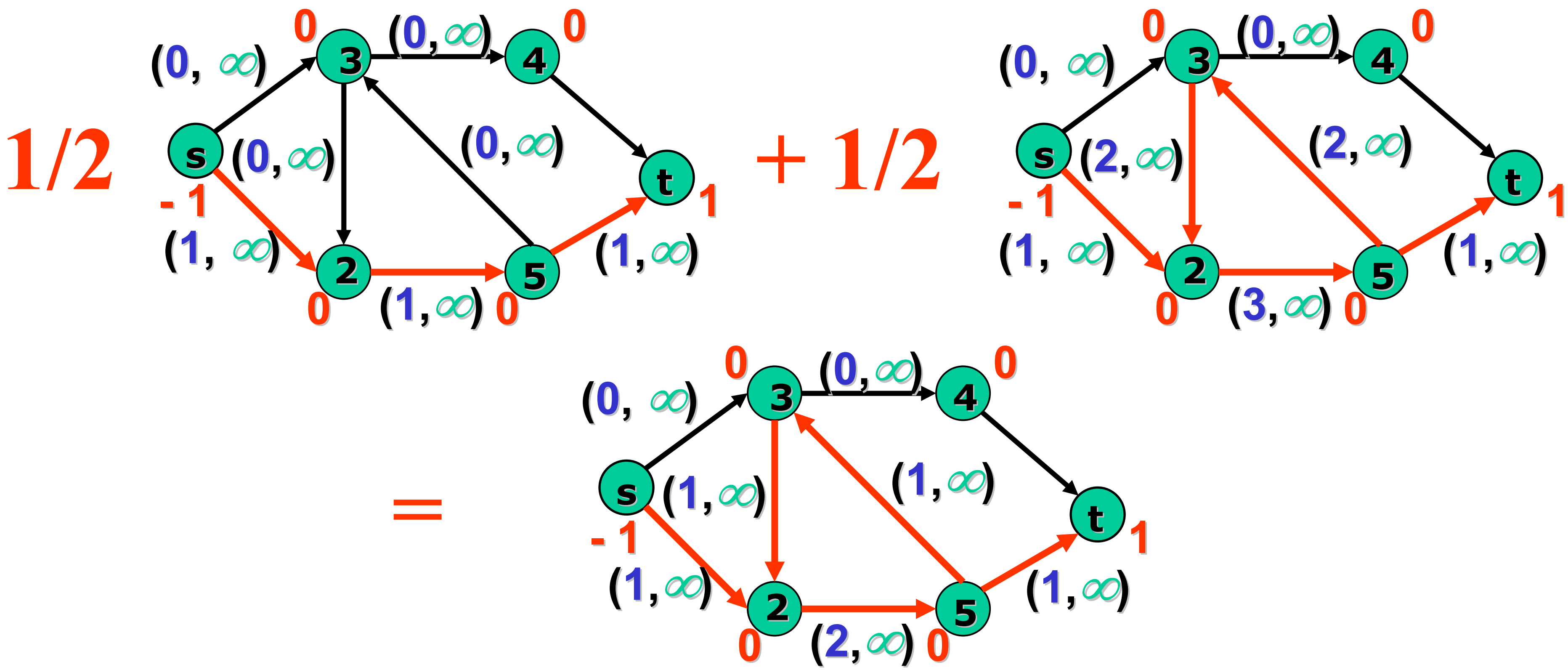
Viceversa?

No! ⇒

Flussi interi e vertici di Q_{st}

I vertici di Q_{st} sono (flussi) interi (M totalmente unimodulare)

ma … non tutti i flussi interi $x \in Q_{st}$ sono vertici: combinando i due seguenti flussi interi ho un nuovo flusso intero che quindi non è un vertice



E allora … quali sono i vertici di Q_{st}? **(*SBA*)**

Soluzioni Ammissibili di Base (SBA)

Abbiamo visto che nel poliedro dei cammini $\boldsymbol{Q_{st}}$ ci sono tanti punti che non sono cammini. Vediamo allora dove sono i cammini in questo poliedro. Si hanno 2 teoremi:

TEOREMA F1: $x' \in \boldsymbol{Q}_{st}$ *è una Soluzione di Base (SBA) <u>se e solo se</u>* $S(x')=\{e \in A: x'_e > 0\}$ *(supporto di* x'*) è una FORESTA di* $G(N,A)$

TEOREMA F2: $x' \in \boldsymbol{Q}_{st}$ *è una* ***SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE*** *<u>se e solo se</u>* *è VETTORE DI INCIDENZA DI UN CAMMINO ORIENTATO* ***P*** *da* ***s*** *a* ***t****.*

Quindi i cammini sono i vertici (SBA) del poliedro dei cammini $\boldsymbol{Q_{st}}$

Cammini Minimi e Programmazione Lineare

TROVARE: *Il CAMMINO ORIENTATO P^* da s a t avente COSTO MINIMO*

$$w(P)=\sum_{uv\in A(P)} w_{uv} = \sum_{uv\in A} w_{uv}\, x^P_{uv} = w^T x^P$$

TROVARE: *Un VETTORE DI INCIDENZA x^P di un CAMMINO ORIENTATO P da s a t avente COSTO MINIMO $w^T x^P$*

[*Teorema F1*]

TROVARE: *Una SOLUZIONE DI BASE (VERTICE) x del Poliedro*

$\mathbf{Q}_{st}=\{\mathbf{x}\in \Re^{|A|}:\ \mathbf{Mx=b},\ \mathbf{x}\geq 0_{|A|}\}$ *avente COSTO MINIMO $w^T x$*

[*Teoria della Programmazione Lineare*]

RISOLVERE IL PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE:

$$(CM)\ \min \mathbf{w}^T\mathbf{x} \quad \mathbf{Mx=b},\ \mathbf{x}\geq 0_{|A|} \qquad \equiv \qquad \min \mathbf{w}^T\mathbf{x},\ \mathbf{x}\in\mathbf{Q}_{st}=\left\{\mathbf{x}\in\Re^{|A|}:\ \mathbf{Mx=b},\ \mathbf{x}\geq 0_{|A|}\right\}$$

Il METODO DEL SIMPLESSO (eventualm. semplificato per questo specifico caso) individua la soluzione di base (vertice) avente ***costo minimo***

Problema Primale e Problema Duale

<u>PROBLEMA PRIMALE</u>:

(CM) $\quad \min c^T x$

$$Mx = b$$

$$x \geq 0_{|A|}$$

$$\begin{array}{c|c} & uv \\ \hline & \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ u & -1 & \\ & 0 & \\ v & 1 & \\ & 0 & \end{bmatrix} \end{array}
\qquad
\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} t \\ s \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{M} \qquad\qquad \mathbf{b}$$

<u>PROBLEMA DUALE</u>:

(DCM) $\quad \max b^T y$

$$M^T y \leq c$$

$$\begin{array}{ccccc} t & s & & & \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^T$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & u & & v & \\ \hline uv & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\mathbf{M}^T$$

Cioè, vista la struttura di *b* e di *M*:

(DCM) $\quad \max y_t - y_s$

$y_v - y_u \leq c_{uv}$ per ogni $uv \in A$

rango(**M**)=n-1 → *Una (qualunque) riga di **M** è ridondante*

Possiamo *eliminare la riga corrispondente ad s e porre* $y_s = 0$

Esempi di soluzioni primali e duali

<u>PROBLEMA PRIMALE</u>:

(CM) $\min c^T x$

$Mx = b$

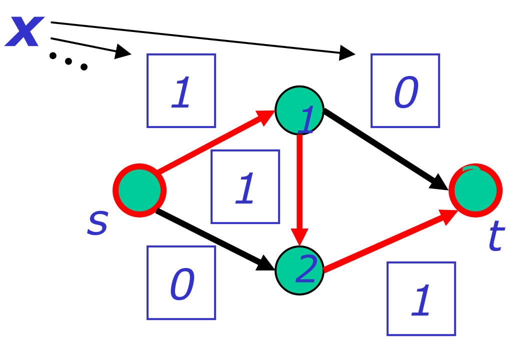
$x \geq 0_{|A|}$

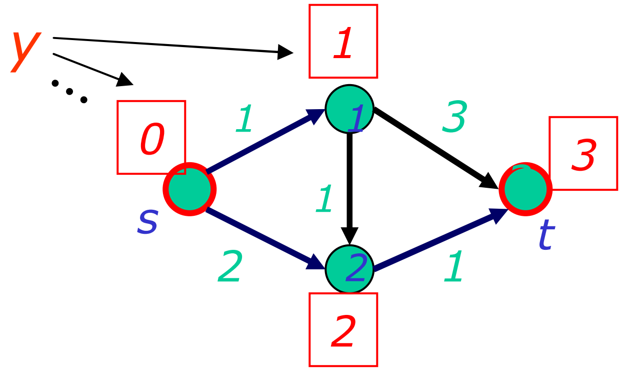
<u>PROBLEMA DUALE</u>:

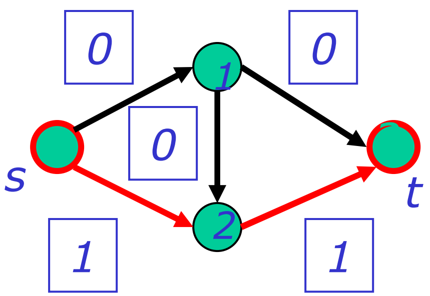
(DCM) $\max y_t$

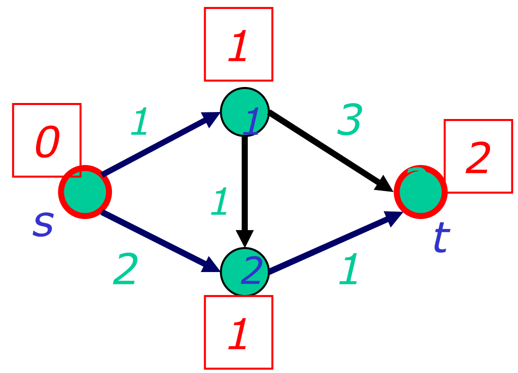
$y_v - y_u \leq c_{uv}$ per ogni $uv \in A$

$y_s = 0$









La differenza tra le var agli estremi non supera il costo dell'arco

Ammissibilità e Limitatezza

<u>PROBLEMA PRIMALE</u>:

(CM) $\min c^T x$

$Mx = b$

$x \geq 0_{|A|}$

<u>PROBLEMA DUALE</u>:

(DCM) $\max y_t$

$y_v - y_u \leq c_{uv}$ per ogni $uv \in A$

$y_s = 0$

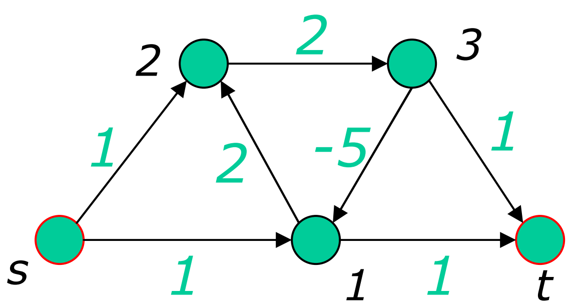
IPOTESI: Esiste un cammino orientato da s a t

⇒ Il problema primale ammette sempre una soluzione

Il <u>problema primale</u> può essere illimitato inferiormente ?

<u>ovvero</u>: il <u>problema duale</u> può non ammettere soluzioni ?

<u>ESEMPIO</u>



$$
\begin{aligned}
y_1 &\leq 1 \\
y_2 &\leq 1 \\
y_3 - y_2 &\leq 2 \\
y_1 - y_3 &\leq -5 \\
y_2 - y_1 &\leq 2 \\
y_t - y_3 &\leq 1 \\
y_t - y_1 &\leq 1
\end{aligned}
$$

non ammette soluzioni !

Condizione di Limitatezza

TEOREMA F3: *Il Problema Duale ammette soluzioni (il Problema Primale non è illimitato) se e solo se il grafo G(N,A) non ha cicli orientati di costo totale negativo.*

DIMOSTRAZIONE: (parte *se*) *Se G(N,A) non contiene cicli con costo negativo*

Sia P^*_u il cammino di lunghezza minima da s ad un generico nodo $u \in N-\{s\}$ [esiste il cammino orientato da s ad ogni u]

Poni $y'_u = c(P^*_u)$ per ogni $u \in N-\{s\}$

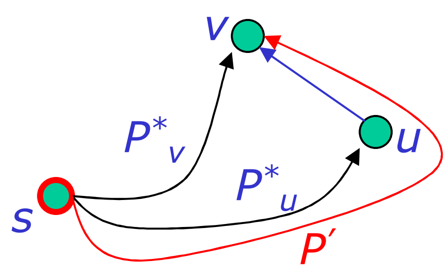
*Allora esiste soluzione duale per es. **y'** dato che $y'_v - y'_u \leq c_{uv}$ per ogni $uv \in A$*

Infatti, se per assurdo $y'_v - y'_u > c_{uv}$ per un qualche $uv \in A$

$\Rightarrow$ $c(P^*_v) - c(P^*_u) > c_{uv}$ $\Rightarrow$ $c(P^*_v) > c(P^*_u) + c_{uv}$

Se v non appartiene a $P^*_u = (s,\dots,u)$

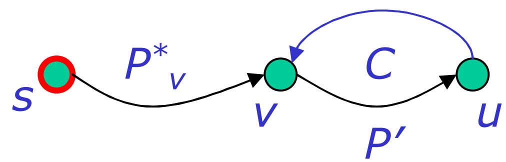
$\Rightarrow$ *$P' = (s,\dots,u,uv,v)$ è un cammino minore del minimo:*
$c(P') = c(P^*_u) + c_{uv} < c(P^*_v)$ CONTRADDIZIONE



Se invece v appartiene a $P^*_u = (s,\dots,u)$

Detto $P' = (v,\dots,u)$ il sotto-cammino di P^*_u da v ad u

$\Rightarrow$ *$C = P' \cup \{uv\}$ è un ciclo*



$c(P^*_v) > c(P^*_v) + c(P') + c_{uv}$ $\Rightarrow$ *$0 > c(P') + c_{uv} = c(C)$*

CICLO NEGATIVO ! CONTRADDIZIONE perchè ipotesi niente cicli negativi

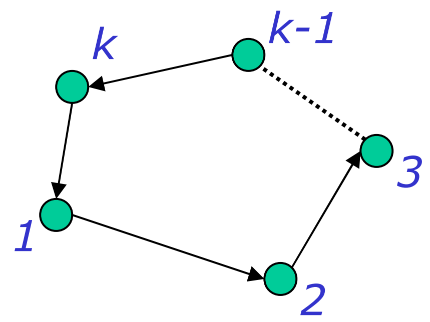
Condizione di Limitatezza (...)

(parte *solo se*) *Se* $\mathbf{y'}$ *è una soluzione duale* ⇒ $G(N,A)$ *non contiene cicli negativi*

Supponi (per assurdo) che $C=(1,12,2,\ldots,k,k1,1)$ *sia un ciclo di* $G(N,A)$ *avente costo totale* $c(C)$ *negativo*

Poiché $\mathbf{y'}$ *è una soluzione duale abbiamo:*

$$\begin{array}{l} y_2' - y_1' \leq c_{12} \\ y_3' - y_2' \leq c_{23} \\ \vdots \\ y_1' - y_k' \leq c_{k1} \\ \hline 0 \leq c(C) < 0 \end{array} \quad +$$



CONTRADDIZIONE

■

Condizioni di Scarto Complementare

PROBLEMA PRIMALE:

(CM) $\quad \min c^T x$

$Mx = b$

$x \geq 0_{|A|}$

PROBLEMA DUALE:

(DCM) $\quad \max y_t$

$y_v - y_u \leq c_{uv}$ *per ogni* $uv \in A$

$y_s = 0$

x' soluzione del primale

y' soluzione del duale

Per tutte le coppie primale-duale ho CONDIZIONI DI SCARTO COMPLEMENTARE:

(x', y') sono OTTIME per i rispettivi problemi se e solo se:

$$x'_{uv}(c_{uv} - y'_v + y'_u) = 0 \quad \text{per ogni } uv \in A$$

Cioè: x^* VETTORE DI INCIDENZA DI UN CAMMINO P^* è OTTIMO

se e solo se esiste una soluzione duale y^* tale che:

$$y^*_v = y^*_u + c_{uv} \quad \text{per ogni } uv \in A \text{ con } x^*_{uv} = 1 \quad (\text{cioè } uv \in P^*)$$

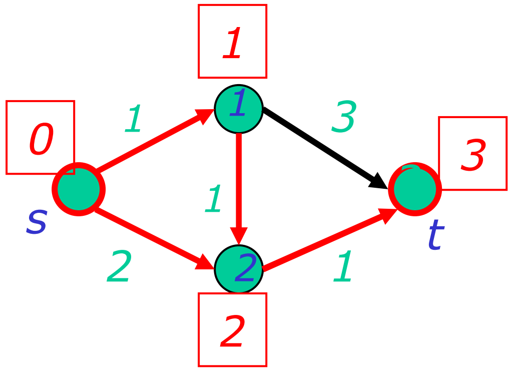
Grafo Ridotto

DEFINIZIONE: *Data una soluzione duale y' diremo GRAFO RIDOTTO rispetto ad y' il grafo $G(y')$ (N,F') con $F'=\{uv \in A : y'_v = y'_u + c_{uv}\}$*

$G(y')$ è il sottografo ricoprente di $G(N,A)$ definito dagli archi associati ai vincoli duali $y_v - y_u \leq c_{uv}$ <u>soddisfatti all'uguaglianza da</u> y'

$y'_v - y'_u = c_{uv} \iff uv \in F'$

Esempi di GRAFO RIDOTTO

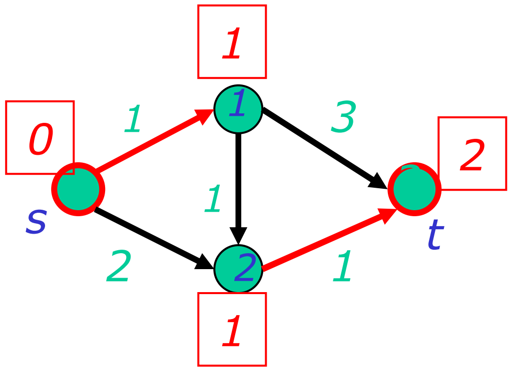


$y'_1 - y'_s = 1\text{-}0=1=c_{s1}$

$y'_2 - y'_1 = 2\text{-}1=1=c_{12}$

$y'_t - y'_2 = 3\text{-}2=1=c_{2t}$

$y'_2 - y'_s = 2\text{-}0=2=c_{s2}$



$y'_1 - y'_s = 1\text{-}0=1=c_{s1}$

$y'_t - y'_2 = 2\text{-}1=1=c_{2t}$

Condizione di Ottimalità

TEOREMA F4: *Un cammino orientato P da s a t in G(N,A) ha costo minimo se e solo se esiste una soluzione duale y′ con la proprietà che P è un cammino orientato da s a t nel grafo ridotto G(y′)*

DIMOSTRAZIONE:

Sia P un cammino orientato da s a t in G(N,A)

Sia x^P il suo vettore di incidenza

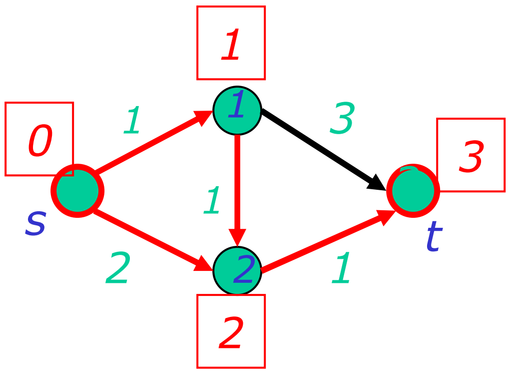
x^P è OTTIMO se e solo se [*CONDIZIONI DI SCARTO COMPLEMENTARE*]

Esiste una soluzione duale y′: $x^P_{uv}(c_{uv}-y'_v+y'_u)=0$ per ogni uv

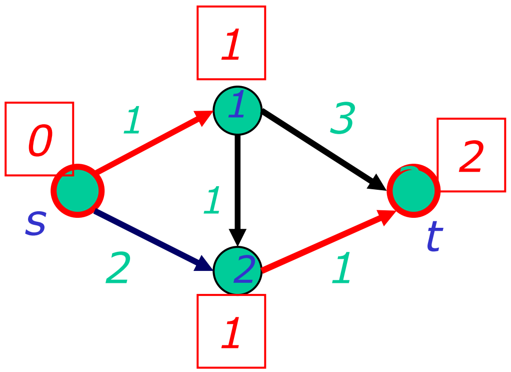
Esiste y′: $y'_v = y'_u+c_{uv}$ per ogni $uv \in P$ ($x^P_{uv}=1$)

⇔ *P cammino orientato da s a t in G(y′)* ■

ESEMPI



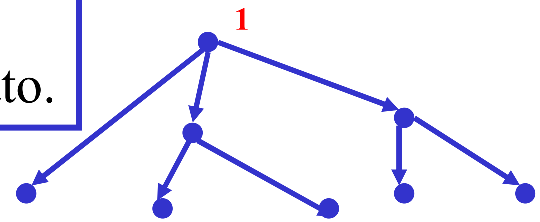
y′ ottima

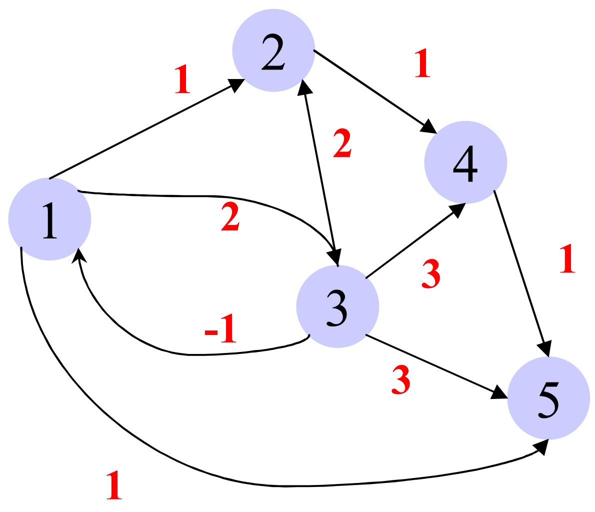


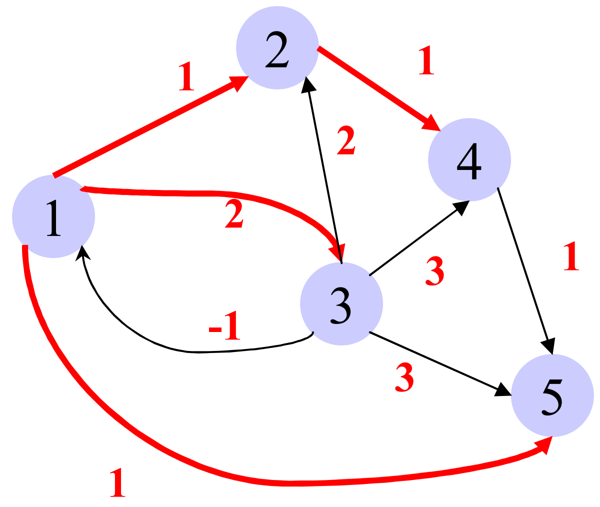
y′ non-ottima

L'arborescenza dei cammini minimi

Arborescenza (di radice 1): albero in cui, per ogni $j \in V$, l'unico cammino dal nodo 1 al nodo j è un cammino orientato.







OSS. Ogni nodo diverso dal nodo radice 1 ha un unico predecessore nell'arborescenza.

- Un'arborescenza può essere descritta mediante il vettore dei predecessori, *prec*

Algoritmo iterativo di Bellman Ford

Per trovare l'**arborescenza dei cammini minimi** esistono vari algoritmi (*Dijkstra, Algoritmo della numerazione topologica, Bellman-Ford, etc.*)

Vediamo l'algoritmo di ***Bellman-Ford***, veloce e di vasta applicazione

- Inizialmente vengono ordinati gli archi e definita una particolare soluzione duale iniziale y^0 che **non è ammissibile** ma è facile da scrivere
- A ogni iterazione gli archi vengono visitati nell'ordine prefissato: se per un arco (i,j) si ha $y_j > y_i + c_{ij}$ violando l'ammissibilità duale, si rende ammissibile ponendo

$$\boldsymbol{y_j = y_i + c_{ij}}$$

- Si dimostra che dopo al più un certo numero di iterazioni **tutte** le condizioni di ammissibilità duale saranno soddisfatte

Alla fine è possibile ricostruire l'arborescenza dei cammini massimi utilizzando il vettore dei predecessori *prec*

Schema algoritmo Bellman Ford

Calcolo dell'arborescenza dei cammini minimi dal nodo 1 a i per $i = 1, \ldots, n$

Inizializzazione:

$y_1 = 0$, $y_i = \infty$ e $prec(i) = 0$ per $i = 2, \ldots, n$.

Ordina gli archi $A = \{e_1, \ldots, e_m\}$

Repeat (*finchè y non si modifica più*)

For $k = 1$ to m (*per ogni arco*)

If $e_k = (i,j)$ è tale che $y_j > y_i + c_{ij}$

poni $y_j = y_i + c_{ij}$

poni $prec(j) = i$

Endfor

EndRepeat

Iterazioni "piccole"

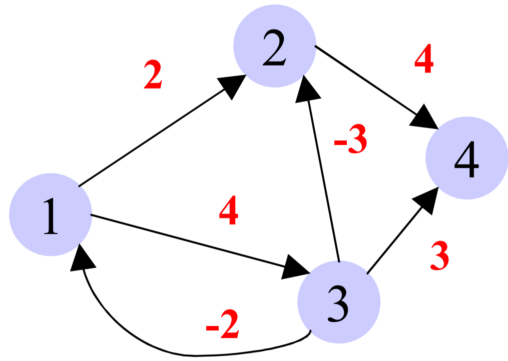
Iterazioni "grandi"

- L'algoritmo termina fornendo y_i = *cammini minimi da 1 a tutti gli altri nodi*
- Il blocco {*Repeat … EndRepeat*} (iterazione *grande*) viene eseguito al più n volte
- Ogni iter. grande sono m iterazioni *piccole*, quindi la complessità è $O(mn)$ (numero totale di iterazioni piccole)

Esempio di applicazione

Inizializzazione: $y(1) = 0$, $y(2) = y(3) = y(4) = \infty$

Ordino gli archi: $e_1 = (1,2)$, $e_2 = (1,3)$, $e_3 = (3,1)$, $e_4 = (2,4)$, $e_5 = (3,4)$, $e_6 = (3,2)$



Repeat 1

Iter 1. $k = 1$. $y(2) = \infty > y(1) + 2 \Rightarrow y(2) = y(1) + 2 = 2$ $\quad prec(2) = 1$

Iter 2. $k = 2$. $y(3) = \infty > y(1) + 4 \Rightarrow y(3) = y(1) + 4 = 4$ $\quad prec(3) = 1$

Iter 3. $k = 3$. $y(1) = 0 <= y(3) -2$

Iter 4. $k = 4$. $y(4) = \infty > y(2) + 4 \Rightarrow y(4) = y(2) + 4 = 6$ $\quad prec(4) = 2$

Iter 5. $k = 5$. $y(4) = 6 <= y(3) + 3$

Iter 6. $k = 6$. $y(2) = 2 > y(3) - 3 \Rightarrow y(2) = y(3) - 3 = 1$ $\quad prec(2) = 3$

Repeat 2

Iter 1. $k = 1$. $y(2)= 1 <= y(1) + 2$

Iter 2. $k = 2$. $y(3) = 4 <= y(1) + 4$

Iter 3. $k = 3$. $y(1) = 0 <= y(3) -2$

Iter 4. $k = 4$. $y(4) = 6 > y(2) + 4 \Rightarrow y(4) = y(2) + 4 = 5$ $\quad prec(4) = 2$

Iter 5. $k = 5$. $y(4) = 5 <= y(3) + 3$

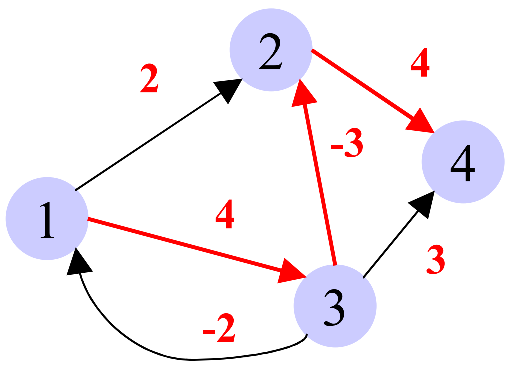
Iter 6. $k = 6$. $y(2) = 1 <= y(3) - 3$

L'arborescenza dei cammini minimi

Nella successiva iterazione grande non vengono aggiornate le variabili, quindi stop.

La soluzione ottima è $y(1) = 0, y(2) = 1, \; y(3) = 4, \; y(4) = 5$

• L'arborescenza dei cammini minimi può essere ricostruita a partire dal vettore dei predecessori, *prec*()



prec(4) = 2

prec(2) = 3

prec(3) = 1

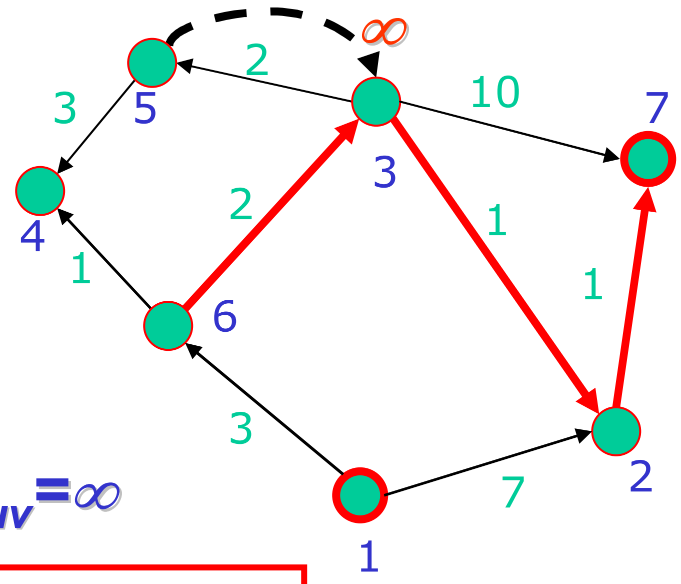
prec(1) non esiste

Algoritmo di Floyd-Warshall

DATI:

- Grafo orientato e connesso $G(N,A)$

- Costi sugli archi $w_{uv}\ \forall\ uv \in A$



TROVARE: *il* ***cammino orientato di costo minimo*** *tra* ***ogni coppia di nodi***

Aggiungiamo *gli archi* $uv \notin A$ *ponendo* $w_{uv} = \infty$

→ *Esiste un cammino orientato tra ogni coppia di nodi*

→ *Il problema del cammino minimo ammette sempre una soluzione*

DEFINIZIONE: dato l'insieme dei nodi $N = \{1,2,\ldots,n\}$

Sia: $P_{ij}^{d} = (i,k_1,k_2,\ldots,k_q,j),\quad k_h \in N_d = \{1,2,\ldots,d\}$

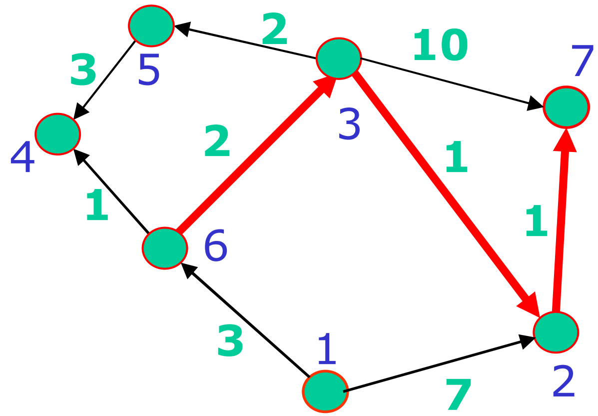
il ***cammino minimo*** *tra* i *e* j *con* ***nodi interni solo*** *nell'insieme* N_d

Es: $N_3 = \{1,2,3\}\quad P_{67}^{3} = (6,3,2,7)\ ,\ P_{53}^{3} = (5,3)$

Algoritmo di Floyd-Warshall (II)

Sia: $P_{ij}^{d} = (i, k_1, k_2, \ldots, k_q, j), \quad k_h \in N_d = \{1,2,\ldots,d\}$
il **cammino minimo** tra i e j con **nodi interni solo** nell'insieme N_d

d_{ij}^{k} **costo del cammino minimo** P_{ij}^{k}



$$D^k = [d_{ij}^{k}]_{i,j=1,..,n}$$

$$D^0 = [w_{ij}]_{i,j=1,..,n}$$

D^n costi dei **cammini minimi** tra i e j
con **nodi interni** nell'insieme N

Matrice dei costi dei cammini minimi

$$D^0 = \begin{bmatrix} 0 & 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 2 & \infty & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 1 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

ALGORITMO:
$$D^0 \rightarrow D^1 \cdots \rightarrow D^{k-1} \rightarrow D^k \cdots \rightarrow D^n$$

Algoritmo di Floyd-Warshall (III)

Semplice formula per passare dalla matrice …

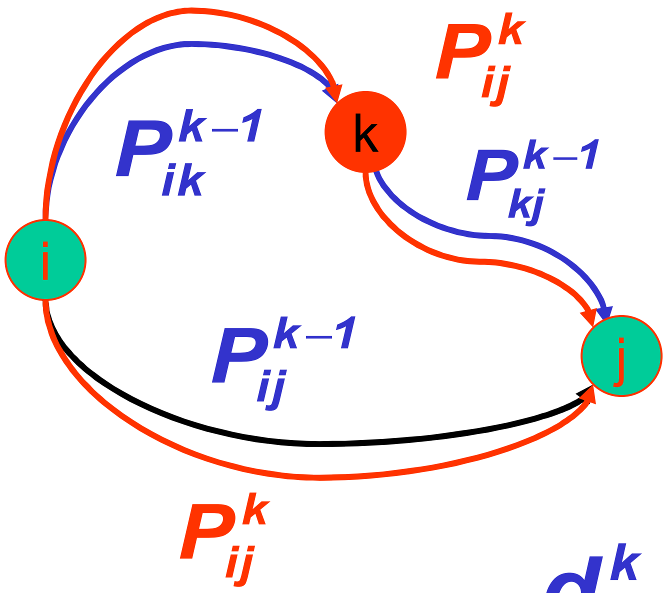
$$D^{k-1} = [d_{ij}^{k-1}]_{i,j=1,..,n}$$

costi dei cammini minimi che utilizzano i nodi $N_{k-1} = \{1,2,\dots,k\text{-}1\}$

alla matrice …

$$D^{k} = [d_{ij}^{k}]_{i,j=1,..,n}$$

costi dei cammini minimi P_{ij}^{k} *che utilizzano i nodi* $N_k = \{1,2,\dots,k\}$



due possibili casi:

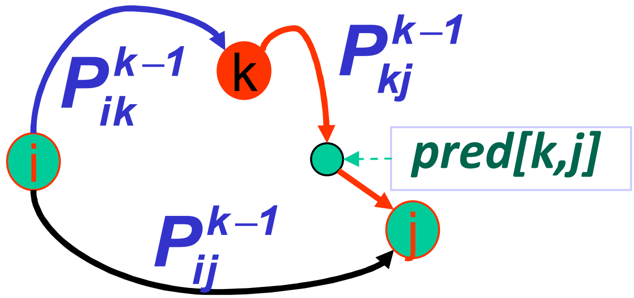
- P_{ij}^{k} *non utilizza* il nodo *k*
- P_{ij}^{k} *utilizza* il nodo *k*

$$d_{ij}^{k} = \min\left\{ d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \right\}$$

Schema Algoritmo di Floyd-Warshall

Inizializzazione

```
For i:=1 to n
    For j:=1 to n
        do begin
            D[i,j]:=w(i,j);
            pred[i,j]:=i;
        end;
```

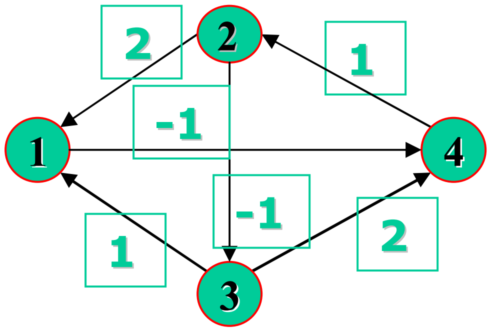



```
For k:=1 to n
    For i:=1 to n
        For j:=1 to n
        do begin
          if  D[i,j]>D[i,k]+D[k,j]
          then begin
              D[i,j]:= D[i,k]+D[k,j];
              pred[i,j]:= pred[k,j];
          end;
        end;
```

pred[i,j] *è il* ***predecessore di j*** *nel cammino tra* ***i*** *e* ***j***

Se ***D[i,i]<0*** *c'è un* ***ciclo negativo*** *che passa per il nodo* ***i***

Esempio Algoritmo di Floyd-Warshall



$$D^0 = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & -1 \\ 2 & 0 & -1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & 2 \\ \infty & 1 & \infty & 0 \end{bmatrix} \qquad pred = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D^1 = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & \infty & 0 & 0 \\ \infty & 1 & \infty & 0 \end{bmatrix} \qquad pred = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

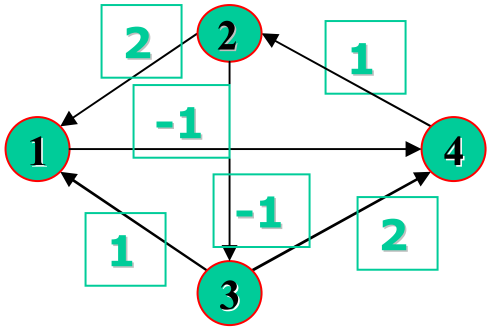
$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & \infty & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad pred = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & \infty & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad pred = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$pred = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Esempio Algoritmo di Floyd-Warshall



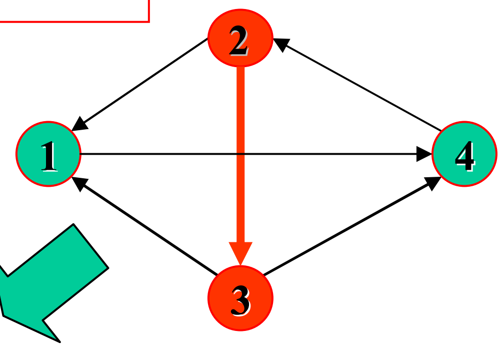
$$D^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad pred = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Come si ricostruisce il cammino minimo tra *i* e *j* ?

Es. P_{13}

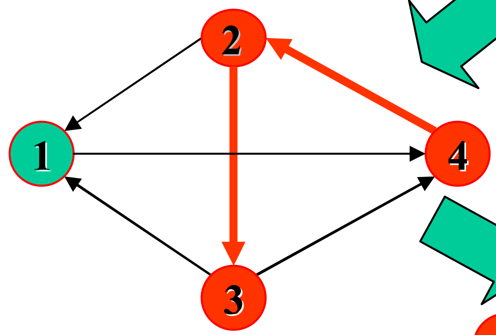
Si parte dal nodo 3 e si cerca il predecessore …

$$pred(1,3) = 2$$



Poi si cerca il predecessore di 2 nel cammino da 1 a 2 …

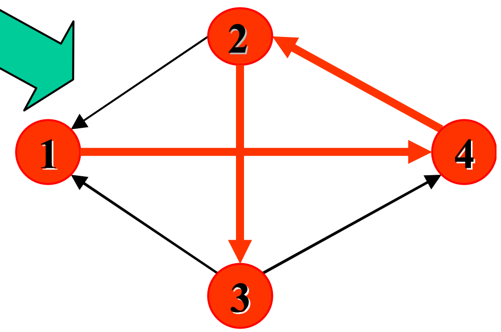
$$pred(1,2) = 4$$



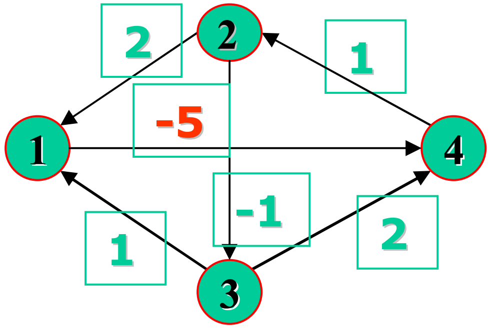
Infine il predecessore di 4 nel cammino da 1 a 4 …

$$pred(1,4) = 1$$

Raggiunto 1 ***STOP***



Algoritmo di Floyd-Warshall: Ciclo negativo



$$D^4 = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -5 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 1 & -3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Se ho un ciclo di peso complessivo negativo (me ne accorgo dai valori sulla diagonale che diventano negativi)
non esiste una soluzione ottima

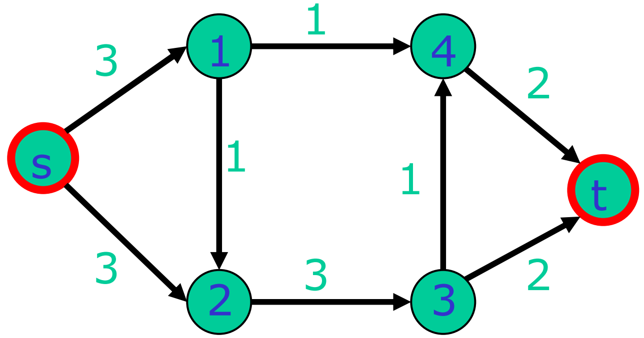
Flusso s-t in un Grafo Orientato

DATI: *Un grafo orientato G(N,A)*

Un nodo ***sorgente*** $s \in N$

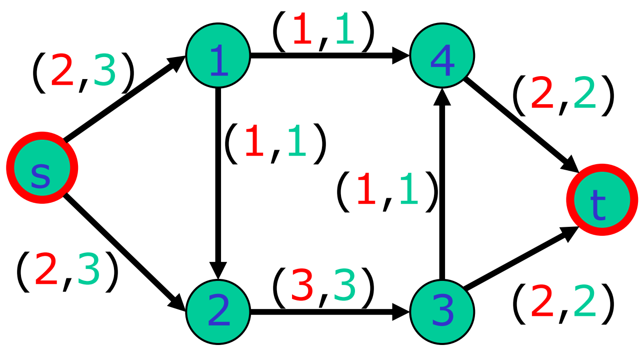
Un nodo ***pozzo*** $t \in N-\{s\}$

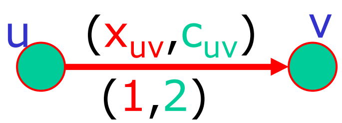
Un vettore <u>capacità</u> $c \geq 0_{|A|}$



DIREMO: FLUSSO s-t *di* (G,c)

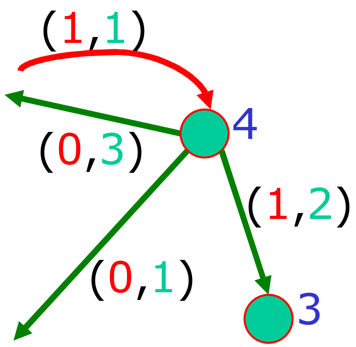
un vettore $\boldsymbol{x} \in \Re^{|A|}$ tale che:





$$0 \leq x_{uv} \leq c_{uv}$$

[vincolo di capacità]



$$\sum_{uv \in \delta^-_G(v)} x_{uv} - \sum_{vu \in \delta^+_G(v)} x_{vu} = 0 \qquad \boxed{v \notin \{s,t\}}$$

[conservazione del flusso]

$$\sum_{tu \in \delta^+_G(t)} x_{tu} = \sum_{us \in \delta^-_G(s)} x_{us} = 0$$

[<u>nulla esce</u> da t e <u>nulla entra</u> in s]

Flusso s-t in un Grafo Orientato

$\mathbf{x}(\delta_G^-(v)) - \mathbf{x}(\delta_G^+(v)) = 0$ | flusso in – flusso out = 0 per ogni nodo $v \notin \{s,t\}$

$\mathbf{x}(\delta_G^-(t)) - \mathbf{x}(\delta_G^+(t)) = \mathbf{x}(\delta_G^-(t)) = \mathbf{f_t(x)}$ | flusso entrante in t

$\mathbf{x}(\delta_G^-(s)) - \mathbf{x}(\delta_G^+(s)) = -\,\mathbf{x}(\delta_G^+(s)) = \mathbf{-\,f_s(x)}$ | flusso uscente da s

Sommando tutte le equazioni otteniamo

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}\Big(\bigcup_{v\in N} \delta_G^-(v)\Big) - \mathbf{x}\Big(\bigcup_{v\in N} \delta_G^+(v)\Big) = f_t(x) - f_s(x)$$

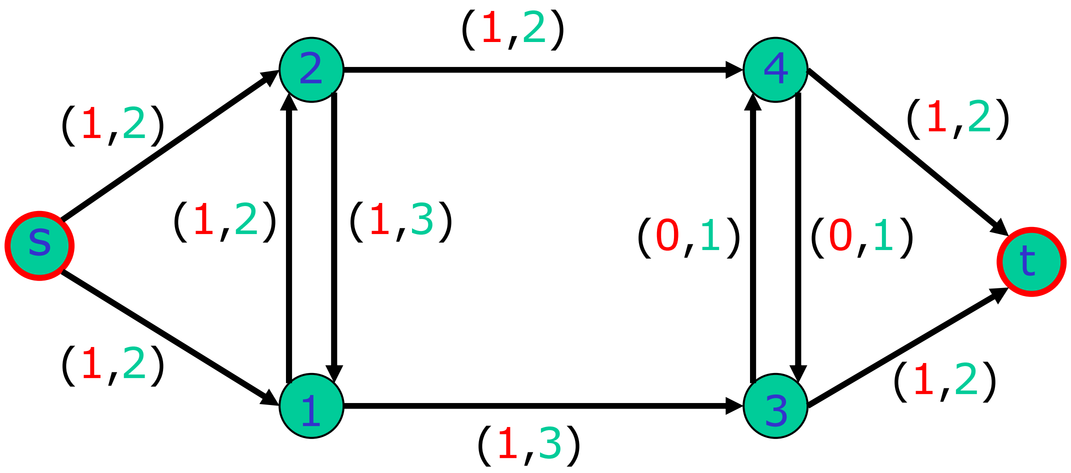
Poichè *ogni arco appartiene ad una (e una sola) stella entrante e ad una (e una sola) stella uscente,*

abbiamo che: $\bigcup_{v\in N} \delta_G^-(v) = \bigcup_{v\in N} \delta_G^+(v) = A$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}(A) - \mathbf{x}(A) = 0 = f_t(x) - f_s(x) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f_t(x) = f_s(x) = f(x)}$$

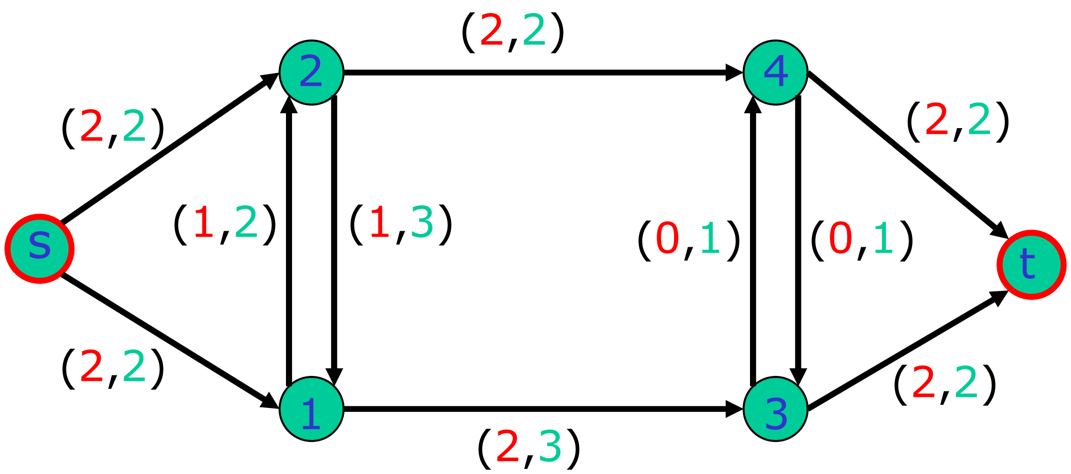
flusso entrante in t = **flusso uscente** da s =
= **<u>valore f(x) del flusso</u>** <u>x</u>

Esempi di flusso



flusso x^1

$f_s(x^1) = f_t(x^1) = f(x^1) = 2$



flusso x^2

$f_s(x^2) = f_t(x^2) = f(x^2) = 4$

Problema del Massimo Flusso (MF)

$\mathbf{x}(\delta^-_G(v))\ -\ \mathbf{x}(\delta^+_G(v)) = 0$ per ogni nodo $v \notin \{s,t\}$

$\mathbf{x}(\delta^-_G(t))\ -\ \mathbf{x}(\delta^+_G(t)) = \mathbf{x}(\delta^-_G(t)) = f(x)$

$\mathbf{x}(\delta^-_G(s))\ -\ \mathbf{x}(\delta^+_G(s)) = -\ \mathbf{x}(\delta^+_G(s)) = -\ f(x)$

Si vuole massimizzare il flusso $f(x)$ uscente da s (entrante in t)

(**MF**) max f

$\mathbf{x}(\delta^-_G(v))\ -\ \mathbf{x}(\delta^+_G(v)) = 0$ per ogni nodo $v \notin \{s,t\}$

$\mathbf{x}(\delta^-_G(t)) = f$

$-\ \mathbf{x}(\delta^+_G(s)) = -\ f$

$\mathbf{0} \leq \mathbf{x}_{uv} \leq \mathbf{c}_{uv}$ per ogni arco $uv \in A$

M: Matrice di Incidenza di **G**

b: $b_s=-1;\ b_t=1;\ b_v=0\quad \forall v \in N-\{s,t\}$

I vincoli diventano $\mathbf{Mx=bf}$ *e ottengo un problema di Flusso a Minimo Costo (MCF)*

(**MF**) **max f**

$\mathbf{Mx-bf=0}$

$\mathbf{0} \leq \mathbf{x}_{uv} \leq \mathbf{c}_{uv}\quad \forall uv \in A$

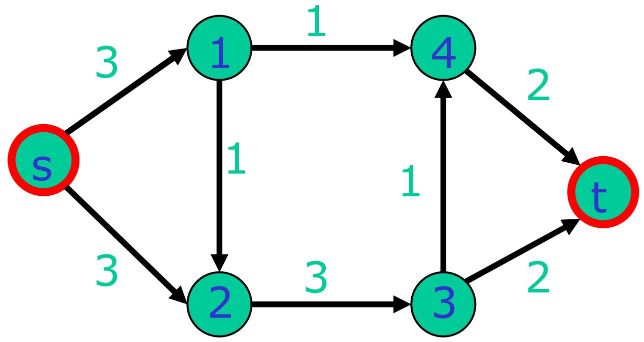
Problema del Massimo Flusso (MF)

$$(MF) \quad \max \quad f$$

$$Mx - bf = 0_{|N|}$$

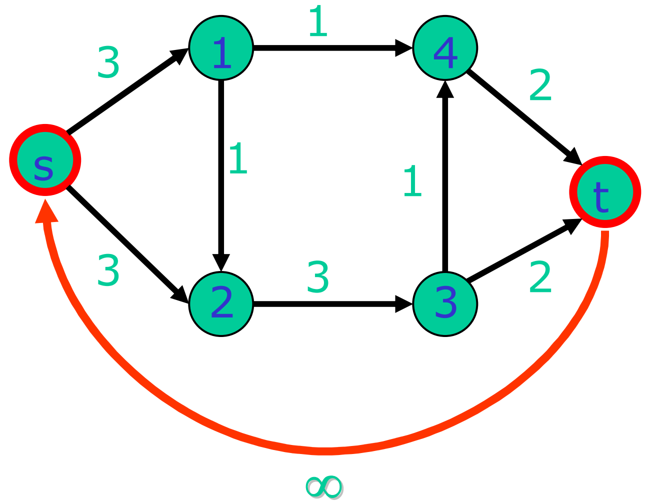
$$0_{|A|} \le x \le c$$

$$b = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} s \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ t \end{array}$$



$$\begin{bmatrix} M & -b \end{bmatrix}$$

Matrice di incidenza *del grafo ottenuto aggiungendo l'arco* ***ts***



$$(MF) \quad \max \quad x_{ts}$$

$$Mx - bx_{ts} = 0_{|N|}$$

$$0_{|A|} \le x \le c$$

PROGRAMMAZIONE LINEARE

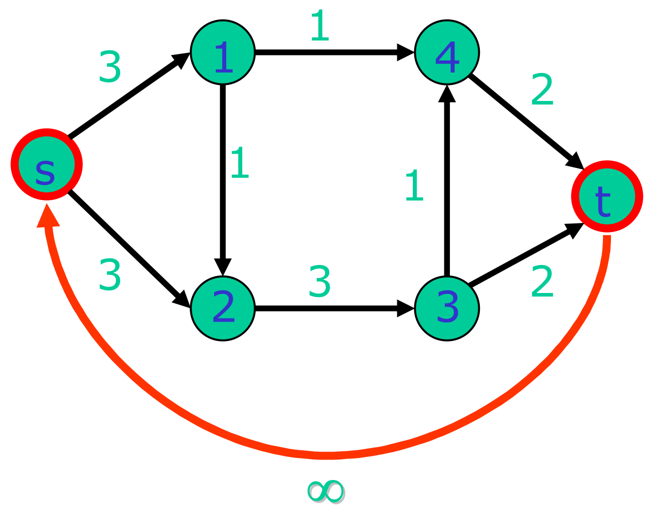
Duale del Massimo Flusso

$$(MF) \quad \max \quad x_{ts}$$

$$(z \in R^{|N|}) \quad Mx - bx_{ts} = 0_{|N|}$$

$$(y \in R^{|A|}) \quad I_{|A|}x \le c$$

$$x \ge 0_{|A|}; \quad x_{ts} \ge 0$$



DUALE del Massimo Flusso

$$(DMF) \quad \min \quad c^T y$$

$$(x \in R^{|A|}) \quad M^T z + I_{|A|} y \ge 0_{|A|}$$

$$(x_{ts}) \quad z_t - z_s \ge 1$$

$$y \ge 0_{|A|}$$

$$\equiv$$

$$(DMF) \quad \min \quad c^T y$$

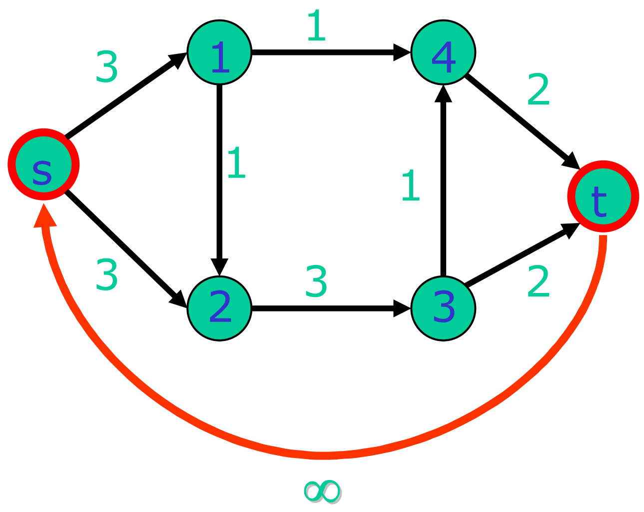
$$z_u - z_v + y_{uv} \ge 0 \quad \forall\, uv \in A$$

$$z_t - z_s \ge 1$$

$$y \ge 0_{|A|}$$

Soluzioni del Duale del Massimo Flusso

TEOREMA F5: *Il duale del massimo flusso*



$$\text{(DMF)} \quad \min \; c^T y$$

$$z_u - z_v + y_{uv} \geq 0 \quad \forall\, uv \in A$$

$$z_t - z_s \geq 1$$

$$y \geq 0_{|A|}$$

Ammette una ***soluzione ottima*** $\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \in \{0,1\}^{|N|+|A|}$

DIM: *Una riga della matrice* $[M\; -b]$ *è ridondante* ⇒ *possiamo fissare una var nel duale:* $z_s = 0$

La matrice dei vincoli è ***TUM*** *il vettore dei termini noti è* ***intero***

⇒ ***esiste*** *una soluzione ottima* ***intera*** $(z°,y°)$ *di* ***(DMF)***

ora facciamo una partizione dei nodi $X = \{ u \in N : z_u^o \leq 0 \} \quad \overline{X} = \{ u \in N : z_u^o \geq 1 \}$

e osserviamo che ***s*** *e* ***t*** *sono in insiemi diversi:* $\boxed{z_t^o - z_s^o = z_t^o \geq 1 \Rightarrow t \in \overline{X}}$

Soluzioni del Duale del Massimo Flusso(II)

$(z°,y°)$ soluzione *ottima* ***intera*** di ***(DMF)*** $\quad (z_s^o = 0)$

$$X = \{u \in N : z_u^o \le 0\} \qquad \bar{X} = \{u \in N : z_u^o \ge 1\}$$

Se prendo due nodi $u \in X$ *e* $v \in \bar{X}$*, devo avere* $\Rightarrow y_{uv}^o \ge z_v^o - z_u^o \ge 1$

quindi questo è un lower bound per il problema di min DMF e lo chiamiamo LB

$$c^T y° = \sum_{uv \in A} c_{uv} y_{uv}^o \ge \sum_{uv \in A : u \in X, v \in \bar{X}} c_{uv} y_{uv}^o \ge \boxed{\sum_{uv \in A : u \in X, v \in \bar{X}} c_{uv} = LB}$$

$[c \ge 0_{|A|} \, , \, y \ge 0_{|A|}]$

MA IL VETTORE:

$$\begin{cases} z_u^* = 0 & u \in X \\ z_v^* = 1 & v \in \bar{X} \\ y_{uv}^* = 1 & u \in X, v \in \bar{X} \\ y_{uv}^* = 0 & altrimenti \end{cases}$$

è ammissibile per il duale:

$$z_u^* - z_v^* + y_{uv}^* \ge 0 \quad \forall\, uv \in A$$

$$z_t^* - z_s^* \ge 1 \qquad [z_s^o = 0 \ e \ \ t \in \bar{X}]$$

$$y^* \ge 0_{|A|}$$

il suo minimo $c^T y^* = \sum_{uv \in A : u \in X, v \in \bar{X}} c_{uv}^* = LB$ *vale proprio* **LB**

gap=0 $\Rightarrow$ ***(z*,y*)*** *è OTTIMA per DMF e il suo valore è lo stesso dell'ottimo di MF (max flusso)*

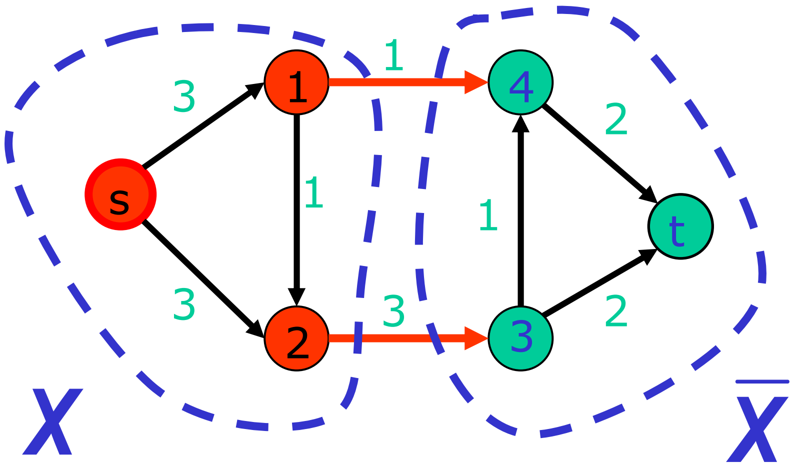
Capacità dei tagli s-t

Cosa rappresenta la soluzione duale ? :

$$\begin{cases} z_u^o = 0 & u \in X \\ z_u^o = 1 & u \in \overline{X} \\ y_{uv}^o = 1 & u \in X, v \in \overline{X} \\ y_{uv}^o = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} z_s^o = z_1^o = z_2^o = 0 \\ z_3^o = z_4^o = z_t^o = 1 \\ y_{14}^o = y_{23}^o = 1 \\ y_{uv}^o = 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$



TAGLIO s-t di (*G*,*c*)
- Taglio che **"separa" s** da **t**
- ***z*** vettore di incidenza di ***X***
- ***y*** vettore di incidenza di $\delta^+(X)$

.. e cosa rappresenta la funzione obiettivo duale ? : $c^T y^o = \sum_{uv \in A: u \in X, v \in \overline{X}} c_{uv}$

La somma delle capacità degli archi di $\delta^+(X)$
CAPACITA' del TAGLIO s-t $\delta^+(X)$ *di* **(*G*,*c*)**

Massimo Flusso e Minimo Taglio

Abbiamo dimostrato due cose:

1. *Per **ogni TAGLIO s-t** $\delta^+(X)$ la soluzione:* $\begin{cases} z_u = 0 & u \in X \\ z_u = 1 & u \in \overline{X} \\ y_{uv} = 1 & u \in X, v \in \overline{X} \\ y_{uv} = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

   è ***ammissibile*** per il duale ***ed ha valore*** $c^T y = \sum_{uv \in A: u \in X, v \in \overline{X}} c_{uv}$

   *pari alla **somma delle capacità degli archi del taglio***

FLUSSO MASSIMO f* $\leq$ Capacità di ogni taglio s-t

dualità debole

2. *La soluzione **ottima** del problema duale ha valore pari alla **capacità di un particolare taglio s-t:** $\delta^+(X^*)$*

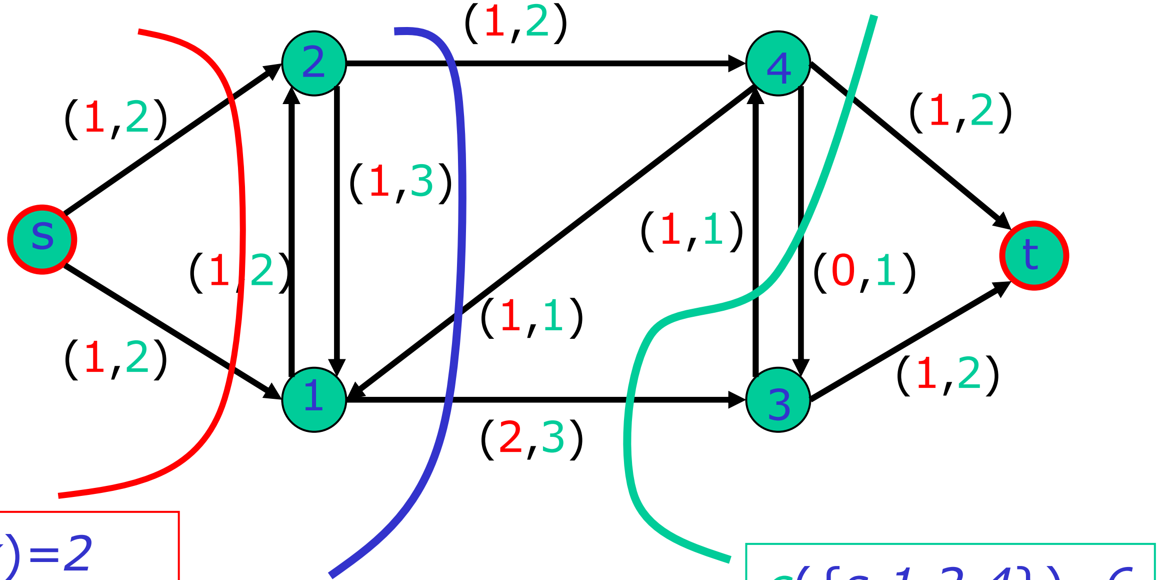
$$\mathbf{c}^T \mathbf{y}^* = \sum_{uv \in A: u \in X^*, v \in \overline{X}^*} \mathbf{c}_{uv}$$

FLUSSO MASSIMO f* = capacità minima di un taglio s-t

dualità forte ***detto Max-Flow-Min-Cut Theorem***

Esempi

Flusso x

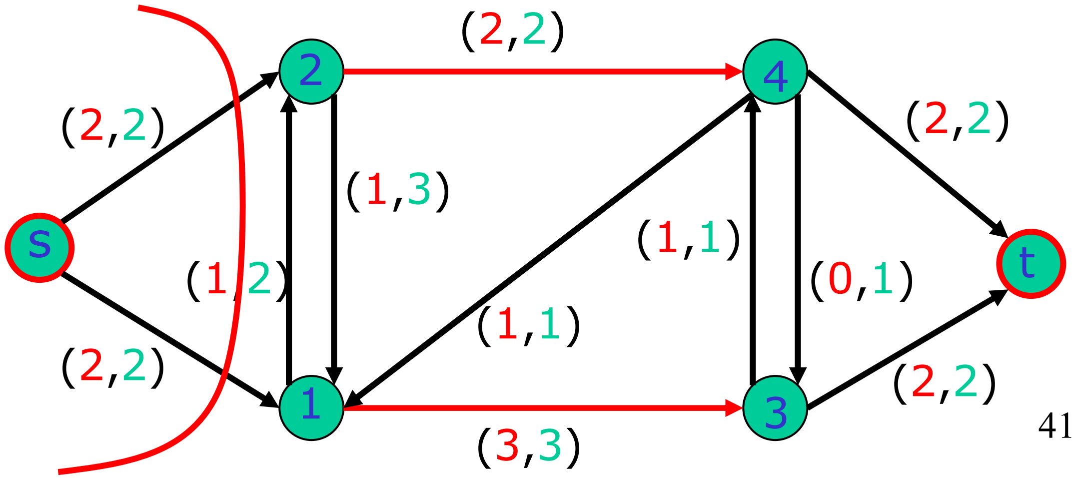


$f(x)=2$
$c(\{s\})=4$

$c(\{s,1,2\})=5$

$c(\{s,1,2,4\})=6$

Flusso x′



$f(x')=4$
$c(\{s\})=4$

$f(x')$ è massimo !