“Sapienza” Università di Roma - Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale

Problemi di Localizzazione Impianti

Renato Bruni
bruni@dis.uniroma1.it

Il materiale presentato è derivato da quello dei proff. A. Sassano e C. Mannino

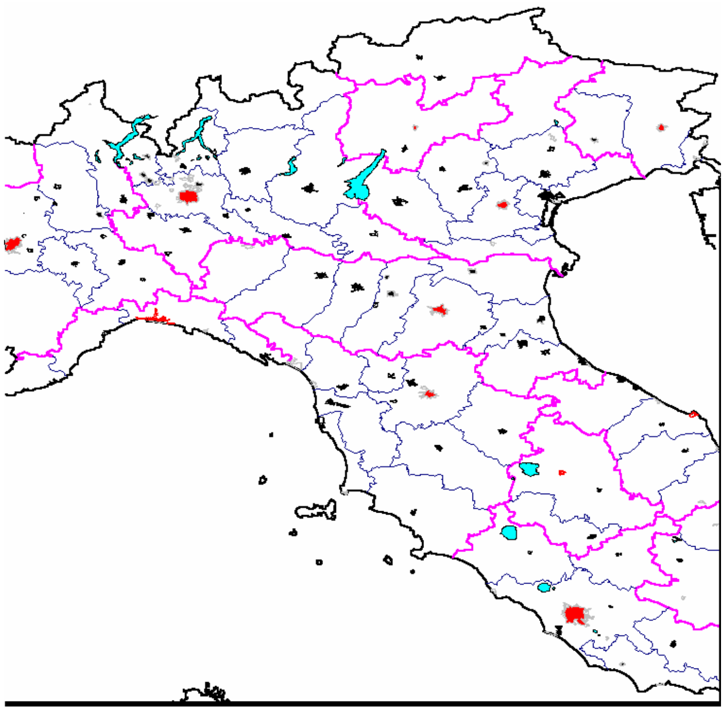
Problemi di Distribuzione

PROBLEMA GENERALE:

- Trasportare beni da una o più *origini* a una o più *destinazioni*
- Minimizzando dei costi di trasporto
- Rispettando una serie di vincoli:
  - vincoli di capacità dei veicoli
  - vincoli di raggiungibilità delle destinazioni

  …

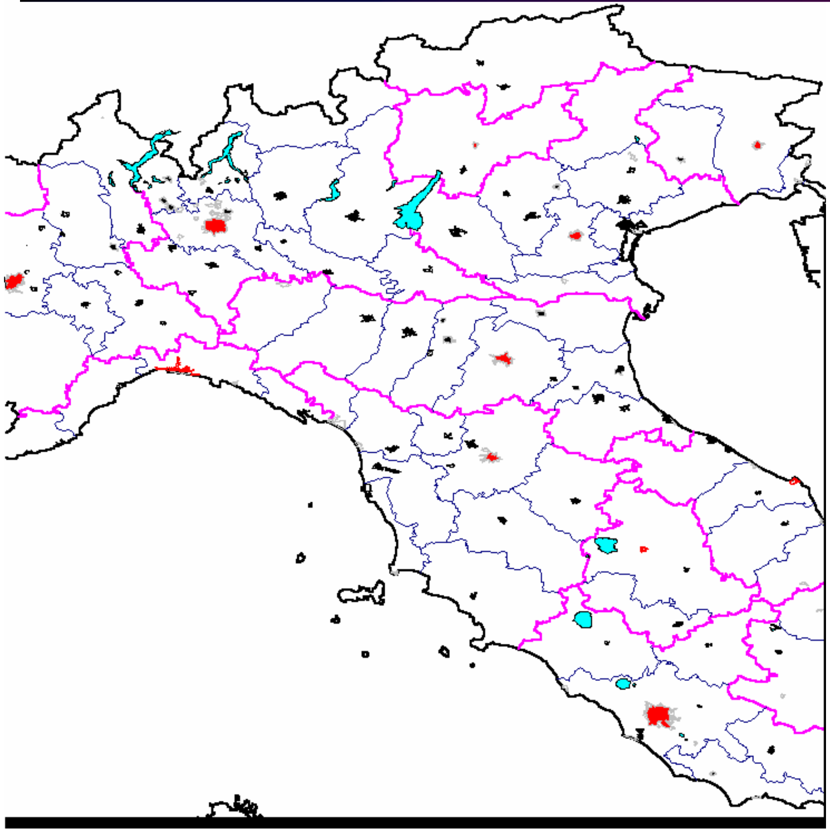
È un problema di grande rilevanza economica: la logistica costituisce in generale una spesa notevole



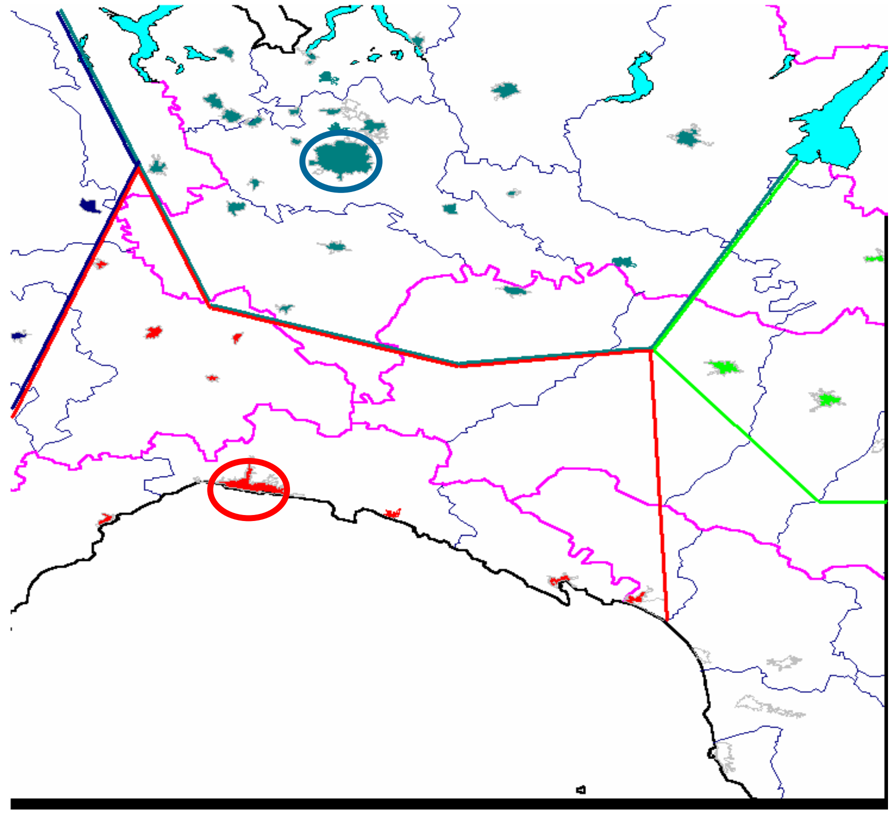
Dobbiamo conoscere aspetti relativi a:

1. *Localizzazione di origini e destinazioni (distanze, tempi, costi)*
2. *Domanda nelle destinazioni e caratteristiche dei mezzi di trasporto*

Localizzazione Origini (Centri di Distribuzione)



Localizzazione dei CD

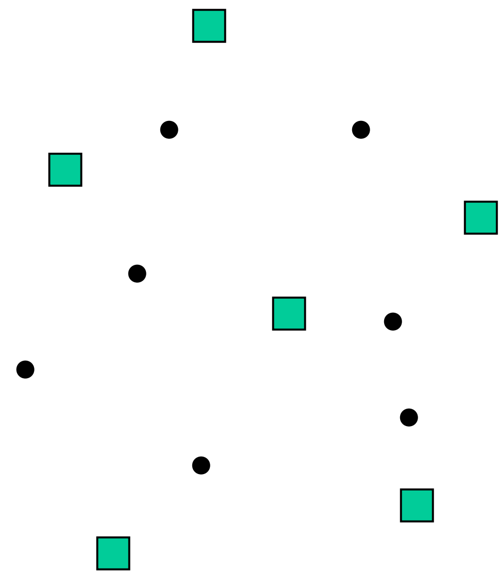


Assegnazione dei punti vendita ai CD

- Problema risolto come problema di *localizzazione di impianti*
- Decomposizione in problemi con singola origine (deposito)
- A ciascun deposito è associato un insieme di destinazioni (clienti)

Localizzazione di Impianti

- Abbiamo un insieme I di m **clienti da servire** e un insieme J di n **impianti che potrei attivare**
- L'impianto j costa f_j e
- Il collegamento ij costa c_{ij}
- Voglio minimizzare le spese



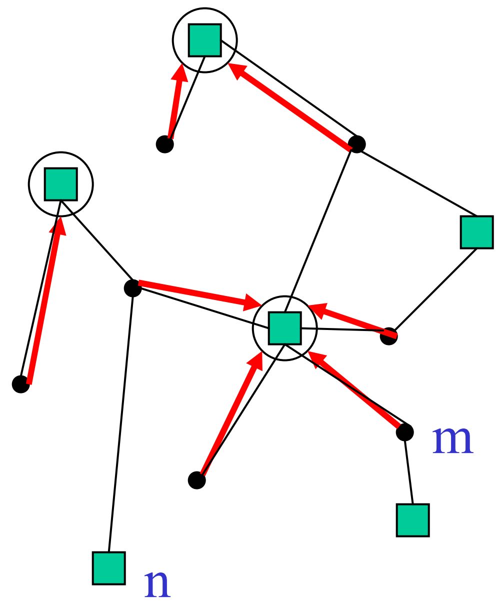
Scelte che devo fare: $\Rightarrow$ Variabili

\- *Impianto j attivato o non attivato* $\Rightarrow x_j \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

\- *Cliente i assegnato all'impianto j* $\Rightarrow y_{ij} \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

Soluzioni Ammissibili

- Una **soluzione ammissibile** è per esempio quella rappresentata accanto
- In altre parole, le variabili che abbiamo scelto devono rispettare dei **vincoli**:



- *Un cliente i può essere assegnato ad un impianto solo se esso è attivato* (vincoli di attivazione)

$$y_{ij} \leq x_j \qquad i \in I \qquad j \in J$$

- *Ogni cliente i deve essere assegnato ad uno e un solo impianto* (vincoli di servizio)

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \qquad i \in I$$

- Allora posso dare una **formulazione** al problema

Modello di PLB

$$\min \sum_{j \in J} f_j x_j + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} c_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \qquad i \in I$$

$$x_j - y_{ij} \geq 0 \qquad i \in I \quad j \in J$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \;\; x_j \in \{0,1\} \quad i \in I \quad j \in J$$

Piuttosto che **risolvere direttamente** questo problema binario (molto difficile, NP) si risolve il suo **rilassamento lineare** (più facile, P). Si ottiene così la cosiddetta **Formulazione Forte**

Formulazione Forte

$$\min \sum_{j \in J} f_j x_j + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} c_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \qquad i \in I$$

$$\boxed{x_j - y_{ij} \geq 0 \qquad i \in I \quad j \in J}$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad x_j \geq 0 \quad i \in I \quad j \in J$$

IN ALTERNATIVA

$$\boxed{\sum_{i \in I} y_{ij} \leq |I| x_j \quad j \in J}$$

Somma sui clienti dei vincoli di attivazione

Formulazione Debole

$$\min \sum_{j\in J} f_j x_j + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} c_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{j\in J} y_{ij} = 1 \qquad i\in I$$

$$\sum_{i\in I} y_{ij} \leq |I| x_j \quad j\in J \qquad (*)$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad x_j \geq 0 \quad i\in I \quad j\in J$$

TEOREMA:

Se $f_j > 0$ per ogni j allora ogni soluzione ottima del problema (di PL) soddisfa all'**uguaglianza** i vincoli $(*)$.

Sostituzione

- Allora possiamo scrivere i vincoli $(*)$ come:

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = |I| x_j \quad j \in J$$

- e porre: $$x_j = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} y_{ij} \quad j \in J$$

che possiamo **sostituire** nella formulazione debole vista eliminando così le x_j

Formulazione Debole Finale

$$\min \sum_{j \in J} f_j \left(1/|I| \sum_{i \in I} y_{ij}\right) + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} c_{ij} y_{ij}$$

$$= \min \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \left(c_{ij} + f_j / |I|\right) y_{ij}$$

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \qquad i \in I$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad i \in I \quad j \in J$$

Soluzione:

Per ogni cliente $i \in I$ abbiamo:

$$y^*_{ij} = 1 \iff c_{ij} + f_j / |I| = \min_{k \in J} \{c_{ik} + f_k / |I|\}$$

cioè è assegnato all'impianto $j \in J$ più conveniente

Confronto Formulazioni per Localizzazione

- Formulazione **forte**: è una formulazione di **migliore qualità** (più stringente, anche se non ottima) quindi fornisce soluzioni che costituiscono bound migliori ma ha molti vincoli di attivazione (**più difficile**, potrebbe essere troppo grande per risolverla)
- Formulazione **debole**: si risolve **molto semplicemente** ma è una formulazione di **qualità peggiore** e quindi la soluzione è peggiore (cioè meno vicina a quella del problema intero)
- Per risolvere la formulazione forte senza scrivere tutti i vincoli di attivazione si usa un approccio di generazione di vincoli detto **simplesso dinamico**

Simplesso Dinamico

Risolve un problema di Programmazione Lineare:

$$\min c^T x : \; x \in P = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \leq b, \; 1_n \geq x \geq 0_n\}$$

Due ingredienti:

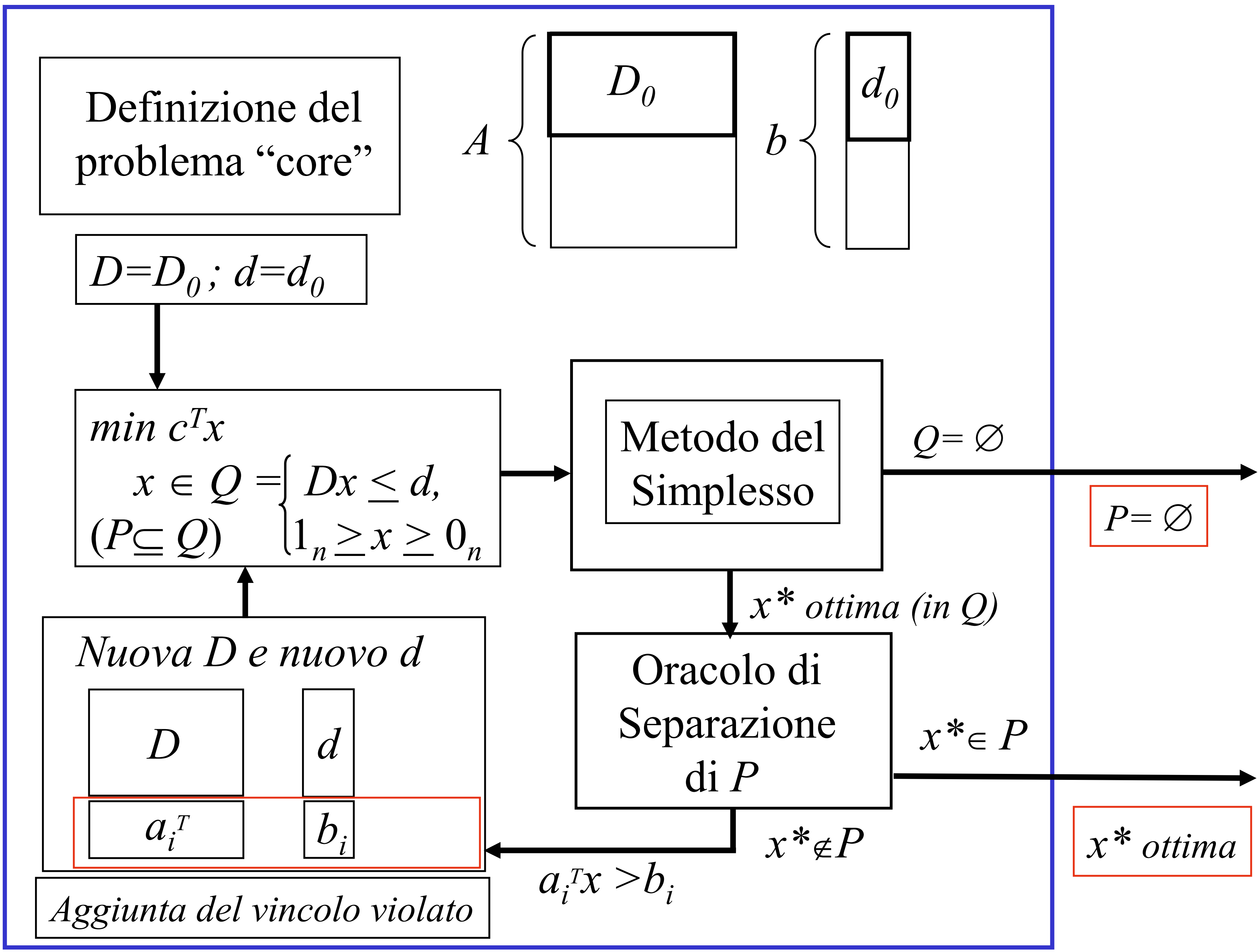
$\hat{x} \in \mathbf{R}^n$ → Oracolo di Separazione di P → $\hat{x} \in P$

→ $\hat{x} \notin P$, $a_i \hat{x} > b_i$

$\min c^T x$, $Ax \leq b$, $1_n \geq x \geq 0_n$ → Metodo del Simplesso → x^* soluzione ottima

→ ~~problema illimitato~~

→ nessuna soluzione ($P = \emptyset$)



Definizione del problema "core"
A
D0
b
d0
D=D0 ; d=d0
min c^T x
x ∈ Q = { Dx ≤ d, 1n ≥ x ≥ 0n
(P ⊆ Q)
Metodo del Simplesso
Q= ∅
P= ∅
x* ottima (in Q)
Oracolo di Separazione di P
x* ∈ P
x* ottima
x* ∉ P
a_i^T x > b_i
Nuova D e nuovo d
D
d
a_i^T
b_i
Aggiunta del vincolo violato

Esempio

Consideriamo questo problema di Localizzazione Impianti (con 5 impianti e 6 clienti, completamente definito dai dati riportati sotto) e risolviamolo (col solutore Cplex) usando:

- Formulazione **Forte**
- Formulazione **Debole**
- Formulazione Forte con **Generazione Vincoli**

$$f = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 13 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 10 & 8 \\ 8 & 0 & 5 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Formulazione Forte dell'Esempio 1/2

Min 12 y(1,1) + 13 y(1,2) + 6 y(1,3) + y(1,5) + 8 y(2,1) + 4 y(2,2)
+ 9 y(2,3) + y(2,4) + 2 y(2,5) + 2 y(3,1) + 6 y(3,2) + 6 y(3,3) + y(3,5)
+ 3 y(4,1) + 5 y(4,2) + 2 y(4,3) + 10 y(4,4) + 8 y(4,5) + 8 y(5,1)
+ 5 y(5,3) + 10 y(5,4) + 8 y(5,5) + 2 y(6,1) + 3 y(6,3) + 4 y(6,4)
+ y(6,5) + 4 x(1) + 3 x(2) + x(3) + 4 x(4) + 7 x(5)

Subject To
servizio(1): y(1,1) + y(1,2) + y(1,3) + y(1,4) + y(1,5) = 1
servizio(2): y(2,1) + y(2,2) + y(2,3) + y(2,4) + y(2,5) = 1
servizio(3): y(3,1) + y(3,2) + y(3,3) + y(3,4) + y(3,5) = 1
servizio(4): y(4,1) + y(4,2) + y(4,3) + y(4,4) + y(4,5) = 1
servizio(5): y(5,1) + y(5,2) + y(5,3) + y(5,4) + y(5,5) = 1
servizio(6): y(6,1) + y(6,2) + y(6,3) + y(6,4) + y(6,5) = 1
attivaz(01): x(1) – y(1,1) >= 0
attivaz(02): x(1) – y(2,1) >= 0
attivaz(03): x(1) – y(3,1) >= 0
attivaz(04): x(1) – y(4,1) >= 0
attivaz(05): x(1) – y(5,1) >= 0
attivaz(06): x(1) – y(6,1) >= 0

[continua]

Formulazione Forte dell’Esempio 2/2

[continua]

attivaz(07): x(2) – y(1,2) >= 0
attivaz(08): x(2) – y(2,2) >= 0
attivaz(09): x(2) – y(3,2) >= 0
attivaz(10): x(2) – y(4,2) >= 0
attivaz(11): x(2) – y(5,2) >= 0
attivaz(12): x(2) – y(6,2) >= 0

attivaz(13): x(3) – y(1,3) >= 0
attivaz(14): x(3) – y(2,3) >= 0
attivaz(15): x(3) – y(3,3) >= 0
attivaz(16): x(3) – y(4,3) >= 0
attivaz(17): x(3) – y(5,3) >= 0
attivaz(18): x(3) – y(6,3) >= 0

attivaz(19): x(4) – y(1,4) >= 0
attivaz(20): x(4) – y(2,4) >= 0
attivaz(21): x(4) – y(3,4) >= 0
attivaz(22): x(4) – y(4,4) >= 0
attivaz(23): x(4) – y(5,4) >= 0
attivaz(24): x(4) – y(6,4) >= 0

attivaz(25): x(5) – y(1,5) >= 0
attivaz(26): x(5) – y(2,5) >= 0
attivaz(27): x(5) – y(3,5) >= 0
attivaz(28): x(5) – y(4,5) >= 0
attivaz(29): x(5) – y(5,5) >= 0
attivaz(30): x(5) – y(6,5) >= 0

Soluzione Formulazione Forte

CPLEX 11.2.0: optimal solution; objective 11
9 dual simplex iterations (0 in phase I)

Le variabili valgono:

```
x [*] :=
1  0
2  1
3  1
4  1
5  0;

y [*,*]
:   1   2   3   4   5    :=
1   0   0   0   1   0
2   0   0   0   1   0
3   0   0   0   1   0
4   0   0   1   0   0
5   0   1   0   0   0
6   0   1   0   0   0;
```

Il costo totale e': 11 (lower bound buono: in questo caso è l'ottimo intero, ma non è detto che sia sempre così)

Risolto con Formulazione Debole

$$c = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 13 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 10 & 8 \\ 8 & 0 & 5 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$f = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$[\ c_{ik} + f_k / |I|\ ]$$

$$\min_{k \in J} \{c_{ik} + f_k / |I|\}$$

$$\begin{bmatrix} 12+4/6 & 13+3/6 & 6+1/6 & \boxed{0+4/6} & 1+7/6 \\ 8+4/6 & 4+3/6 & 9+1/6 & \boxed{1+4/6} & 2+7/6 \\ 2+4/6 & 6+3/6 & 6+1/6 & \boxed{0+4/6} & 1+7/6 \\ 3+4/6 & 5+3/6 & \boxed{2+1/6} & 10+4/6 & 8+7/6 \\ 8+4/6 & \boxed{0+3/6} & 5+1/6 & 10+4/6 & 8+7/6 \\ 2+4/6 & \boxed{0+3/6} & 3+1/6 & 4+4/6 & 1+7/6 \end{bmatrix}$$

$$y^*_{14} = y^*_{24} = y^*_{34} = y^*_{43} = y^*_{52} = y^*_{62} = 1$$

$$\sum \sum (c_{ij} + f_j / |I|)\, y^*_{ij} = 2/3+5/3+2/3+13/6+1 = 6+1/6$$

Soluzione Formulazione Debole

Le variabili valgono:

```
x [*] :=
1  0
2  0.333333
3  0.166667
4  0.5
5  0;

y [*,*]
:   1   2   3   4   5    :=
1   0   0   0   1   0
2   0   0   0   1   0
3   0   0   0   1   0
4   0   0   1   0   0
5   0   1   0   0   0
6   0   1   0   0   0;
```

Il costo totale e': 6.166667 (lower bound di qualità peggiore)

Generazione Vincoli per l'Esempio

Si risolve inizialmente

Min 12 y(1,1) + 13 y(1,2) + 6 y(1,3) + y(1,5) + 8 y(2,1) + 4 y(2,2)
+ 9 y(2,3) + y(2,4) + 2 y(2,5) + 2 y(3,1) + 6 y(3,2) + 6 y(3,3) + y(3,5)
+ 3 y(4,1) + 5 y(4,2) + 2 y(4,3) + 10 y(4,4) + 8 y(4,5) + 8 y(5,1)
+ 5 y(5,3) + 10 y(5,4) + 8 y(5,5) + 2 y(6,1) + 3 y(6,3) + 4 y(6,4)
+ y(6,5) + 4 x(1) + 3 x(2) + x(3) + 4 x(4) + 7 x(5)

Con vincoli

1) y(1,1) + y(1,2) + y(1,3) + y(1,4) + y(1,5) = 1
2) y(2,1) + y(2,2) + y(2,3) + y(2,4) + y(2,5) = 1
3) y(3,1) + y(3,2) + y(3,3) + y(3,4) + y(3,5) = 1
4) y(4,1) + y(4,2) + y(4,3) + y(4,4) + y(4,5) = 1
5) y(5,1) + y(5,2) + y(5,3) + y(5,4) + y(5,5) = 1
6) y(6,1) + y(6,2) + y(6,3) + y(6,4) + y(6,5) = 1

Soluzione Generazione Vincoli

Risolvo e trovo sol:
y(1,4), y(2,4), y(3,4), y(4,3), y(5,2), y(6,2) =1, tutto il resto 0

Da essa genero vincolo: **- y(5,2) + x(2) >= 0**

Risolvo e trovo sol:
x(2), y(1,4), y(2,4), y(3,4), y(4,3), y(5,2), y(6,2) =1, tutto il resto 0

Da essa genero vincolo: **- y(4,3) + x(3) >= 0**

Risolvo e trovo sol:
x(2), y(1,4), y(2,4), y(3,4), y(4,1), y(5,2), y(6,2) =1, tutto il resto 0

Da essa genero vincolo: **- y(4,1) + x(1) >= 0**

Risolvo e trovo sol:
x(2), x(3), y(1,4), y(2,4), y(3,4), y(4,3), y(5,2), y(6,2) =1, tutto il resto 0

Da essa genero vincolo: **- y(1,4) + x(4) >= 0**

Risolvo e trovo sol:
x(2), x(3), y(1,5), y(2,4), y(3,4), y(4,1), y(5,2), y(6,2) =1, tutto il resto 0

Da essa genero vincolo: **- y(2,4) + x(4) >= 0**

Soluzione Generazione Vincoli

Risolvo e trovo sol:
x(2), x(3), y(1,5), y(2,5), y(3,4), y(4,3), y(5,2), y(6,2) =1, tutto il resto 0

Da essa genero vincolo: **- y(3,4) + x(4) >= 0**

Risolvo e trovo sol:
x(2), x(3), y(1,5), y(2,5), y(3,5), y(4,3), y(5,2), y(6,2) =1, tutto il resto 0

Da essa genero vincolo: **- y(1,5) + x(5) >= 0**

Risolvo e trovo sol:
x(2), x(3), x(4), y(1,4), y(2,4), y(3,4), y(4,3), y(5,2), y(6,2) =1, tutto il resto 0

A questo punto, dopo aver generato 7 vincoli di attivazione invece dei 30 visti prima, l'oracolo dice che non ci sono più vincoli di attivazione violati.

Allora ho trovato la soluzione della Formulazione Forte (in questo caso è la **Soluzione ottima**).

Per problemi più grandi fa la differenza tra risolvere o no.