"Sapienza" Università di Roma - Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale

Totale Unimodularità

Docente: Renato Bruni

bruni@dis.uniroma1.it

Corso di: Ottimizzazione Combinatoria

Questa sezione è tratta dal materiale del prof. A. Sassano

Come vedere se la Formulazione è Ottima?

Problema di PL01: $z^* = \min \{c^T x : x \in S\}$

Abbiamo $P = \{x \in R^n : Dx \leq d\}$ formulazione di S

Sarà $P = P_S = \{x \in R^n : Ax \leq b\} = Conv(S)$??

Si può rispondere dimostrando che :

- Ogni disequazione del sistema $Ax \leq b$ è **implicata** dal sistema $Dx \leq d$;

$$
\begin{array}{rl}
 & 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 2 \\
(1/2) & 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 2 \\
\hline
 & 4x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_4 \leq 3
\end{array}
$$

- *Oppure che* $\operatorname{argmin} \{c^T x : x \in P\} \in S$ **per ogni** $c \in R^n$
- *Oppure che* ogni ***vertice*** di P ha **componenti 0-1**

Iniziamo da quest'ultimo caso ...

Definizioni di Unimodularità

Definizione 1: *Una matrice* ***A (m×n)*** *è detta* ***unimodulare*** *se e solo se, per ogni sotto-matrice quadrata* ***B (m×m)*** *di* ***A (base)*** *si ha* ***det(B)∈{0,1,-1}***

Definizione 2: *Una matrice* ***A (m×n)*** *di è detta* ***totalmente unimodulare*** *se e solo se, per ogni sotto-matrice quadrata di* ***A B (p×p)*** *con* ***p≥0 (=1,…,m)*** *si ha* ***det(B)∈{0,1,-1}***

3	2
1	1

unimodulare
det(A)=3x1-1x2=1
ma non
totalmente unimodulare
det(B)=3,2,1,1

1	1	0
0	1	1
1	0	1

Non ***unimodulare***
det(A)=1(1x1-0x1)
-0(1x1-0x0)
+1(1x1-1x0)=2)

0	1	1
1	0	1

unimodulare *e* ***totalmente unimodulare***
det(B)∈{0,1,-1}

Unimodularità e Interezza

TEOREMA 1: *Sia* A *una matrice a componenti intere con* $rank(A)=m$. *Allora le seguenti affermazioni sono* *equivalenti*:

1. A è **unimodulare;**
2. *I* ***vertici*** *di* $P = \{x \in R^n \colon Ax=b\ ,\ x \geq 0_n\}$ *sono* ***interi*** *per ogni vettore* $b \in Z^m$ ***(intero)***
3. *Ogni sotto-matrice quadrata* B $(m \times m)$ ***non-singolare*** *di* A *ha una* ***matrice inversa*** B^{-1} ***a componenti intere***

DIMOSTRAZIONE:

L'equivalenza si dimostra provando che:

$(1 \Rightarrow 2)$ $(2 \Rightarrow 3)$ $(3 \Rightarrow 1)$

Unimodularità e vertici interi $(1 \Rightarrow 2)$

A è **unimodulare** $\Rightarrow$ **Vertici** di P **interi** per $b \in Z^m$

DIMOSTRAZIONE: $x°$ **vertice** di $P = \{x \in R^n : Ax = b,\ x \geq 0_n\}$

$\Leftrightarrow$ $x°$ **SBA** (**Soluzione di Base Ammissibile**)

$\Leftrightarrow$ Esiste B sotto-matrice $(m \times m)$ di A con $\det(B) \neq 0$

tale che, posto: $x = \begin{pmatrix} x_B \in R^m \\ x_N \in R^{n-m} \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}$ abbiamo:

$$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b$$

$$\boxed{x° = \begin{pmatrix} x^o_B \\ x^o_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix} \geq 0_n}$$

$$B^{-1} = \frac{B^+}{\det(B)}$$

matrice aggiunta (trasposta dei compl. alg.) di B

A **matrice** intera (a componenti intere) $\Rightarrow$ B^+ intera

A **matrice** unimodulare $\Rightarrow$ $|\det(B)| = 1$

$\Rightarrow$ $B^{-1}b \in Z^m$ **per ogni** $b \in Z^m$ $\Rightarrow$ $x° \in Z^n$ **per ogni** $b \in Z^m$

Vertici interi e interezza di B^{-1} $(2 \Rightarrow 3)$

Vertici di P interi per $b \in Z^m \Rightarrow B$ non-singolare ha B^{-1} intera

DIMOSTRAZIONE:

- Sia B una sotto-matrice $(m \times m)$ di A con $\det(B) \neq 0$

con $B^{-1} = [\pi_1 \mid \pi_2 \mid \pi_3 \mid \cdots \mid \pi_m]$ (π_k colonna di B^{-1})

Dimostriamo che una generica colonna π_k è **intera**:

- Sia t un **vettore intero** tale che $t+\pi_k \geq 0_m$

- Sia $b(t)= Bt+u_k$ (u_k k-esimo **vettore unitario**)

$$\begin{pmatrix} B^{-1}b(t) \\ 0_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}(Bt+u_k) \\ 0_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+B^{-1}u_k \\ 0_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+\pi_k \\ 0_{n-m} \end{pmatrix} \geq 0_n$$

$\Rightarrow$ **SBA** del sistema $Ax=b(t)$, $x \geq 0_n$

[per ipotesi]

$\Rightarrow$ **Vertice** di $P = \{x \in R^n: Ax=b(t) , x \geq 0_n\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $t+\pi_k$ un **vettore intero** $\Rightarrow$ π_k un **vettore intero**

[t è un vettore intero]

Interezza di B^{-1} e unimodularità ($3 \Rightarrow 1$)

B non-singolare ha B^{-1} intera $\Rightarrow$ A è unimodulare

DIMOSTRAZIONE:

- Sia B una sotto-matrice $(m \times m)$ di A con $\det(B) \neq 0$

$\Rightarrow$ B^{-1} ha tutte **componenti intere**

$\Rightarrow$ $|\det(B)|$ e $|\det(B^{-1})|$ **numeri interi**

ma $|\det(B)|\,|\det(B^{-1})| = |\det(BB^{-1})| = 1$

$\Rightarrow$ $|\det(B)| = |\det(B^{-1})| = 1$

$\Rightarrow$ A è **unimodulare**

Vertici, forma Standard e forma Generale

TEOREMA 2: *Il vettore* $x°$ *è un vertice del poliedro:*

$$P = \{x \in R^n : Ax \le b\ ,\ x \ge 0_n\}$$

se e solo se *il vettore:* $\begin{pmatrix} x° \in R^n \\ s° \in R^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x° \\ b - Ax° \end{pmatrix}$

è un **vertice** *del poliedro*

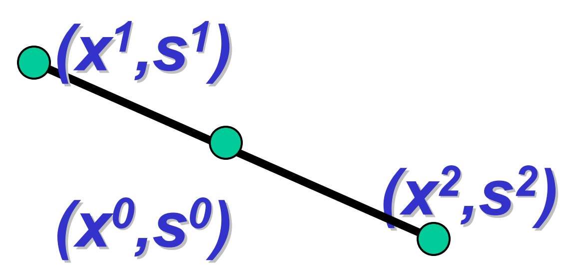
$$Q = \{(x,s) \in R^{n+m} :\ Ax + Is = b\ ,\ x \ge 0_n\ ,\ s \ge 0_m\}$$

Dimostiamo che $x°$ ***è un vertice di*** $P \Rightarrow (x°,s°)$ ***è un vertice di*** Q

- Supponi che $(x°,s°)$ ***non sia un vertice*** **di** Q

$\Rightarrow$ **esistono in** Q **due vettori** $(x^1,s^1) \neq (x^2,s^2)$ ***tali che:***

$(x°,s°) = \alpha\ (x^1,s^1) + (1-\alpha)\ (x^2,s^2) \quad 1 > \alpha > 0$



$\Rightarrow\ x° = \alpha\ x^1 + (1-\alpha)\ x^2 \quad 1 > \alpha > 0$

$\Rightarrow\ x^1 = x^2$ [$x°$ *è un vertice di* P]

$\Rightarrow\ s^1 = b - Ax^1 = b - Ax^2 = s^2$ **CONTRADDIZIONE**

Vertici, forma Standard e forma Generale

Dimostriamo che $(x°,s°)$ è un vertice di $Q \Rightarrow x°$ è un vertice di P

-***Supponi che $x°$ non sia un vertice di P***

$\Rightarrow$ ***esistono in P due vettori $x^1 \neq x^2$ tali che:***

$$\boxed{x° = \alpha\, x^1 + (1-\alpha)\, x^2 \qquad 1 > \alpha > 0}$$

$\Rightarrow$ $s^1 = b - Ax^1 \neq b - Ax^2 = s^2$

$$\boxed{\begin{aligned} s° &= b - Ax° = b - A(\alpha\, x^1 + (1-\alpha)\, x^2) = \\ &= \alpha\,(b - Ax^1) + (1-\alpha)\,(b - Ax^2) = \alpha\, s^1 + (1-\alpha)\, s^2 \end{aligned}}$$

$\Rightarrow (x°,s°) = \alpha\,(x^1,s^1) + (1-\alpha)\,(x^2,s^2) \qquad 1 > \alpha > 0$

con $(x^1,s^1) \neq (x^2,s^2)$ ***CONTRADDIZIONE***

Totale Unimodularità e Interezza

TEOREMA: *Sia* $\boldsymbol{A}$ *una matrice a componenti intere con* *rank(A)=m. Allora I* ***vertici*** *di* $\boldsymbol{P = \{x \in R^n : Ax \leq b\ ,\ x \geq 0_n\}}$ *sono* ***interi*** *per ogni vettore* $\boldsymbol{b \in Z^m}$ ***(intero)*** *se e solo se la* ***matrice A*** è ***totalmente unimodulare.***

DIMOSTRAZIONE: [**Teorema 2**] $\boldsymbol{x° \in R^n}$ *è un vertice del poliedro:*

$$P = \{x \in R^n : Ax \leq b\ ,\ x \geq 0_n\}$$

se e solo se *il vettore:* $\begin{pmatrix} x° \in R^n \\ s° \in R^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x° \\ b - Ax° \end{pmatrix}$

è un ***vertice*** *del poliedro:*

$$Q = \{(x,s) \in R^{n+m} : Ax + Is = b\ ,\ x \geq 0_n\ ,\ s \geq 0_m\}$$

I vertici di $\boldsymbol{Q}$ *hanno componenti intere* ***se e solo*** *se la matrice* $\boldsymbol{(A\ I_m)}$ è ***unimodulare*** [**Teorema 1**]

Dim Unimodularità - Totale Unimodularità 1/2

Dobbiamo dimostrare che:

$(A\ I_m)$ **unimodulare** $\Leftrightarrow$ A **totalmente unimodulare**

$$\begin{bmatrix} A & I_m \end{bmatrix} = \left[a^1 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; a^n \;\middle|\; u^1 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; u^m \right]$$

[solo se] A **totalmente unimodulare** $\Rightarrow$ $(A\ I_m)$ **unimodulare**

Sia B *una sotto-matrice* $(m\times m)$ *di* $(A\ I_m)$ *con* $\det(B)\neq 0$

$$B = \left[a^{j_1} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; a^{j_r} \;\middle|\; u^{j_r+1} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; u^{j_m} \right]$$

$$B = \begin{array}{c c} \left[\begin{array}{c|c} F & 0 \\ \hline F_1 & I_{m-r} \end{array}\right] & \begin{array}{c} j_1 \\ \vdots \\ j_r \\ j_{r+1} \\ \vdots \\ j_m \end{array} \end{array}$$

$\Rightarrow\ |\det(B)|=|\det(F)|=1$

Dim Unimodularità - Totale Unimodularità 2/2

[se] $(A\ I_m)$ unimodulare $\Rightarrow$ A totalmente unimodulare

Sia F una sotto-matrice $(p\times p)$ di A con $p>0$ e $\det(F)\neq 0$

Siano $\{ j_1,\ldots, j_p \}$ gli indici delle colonne di F

Definisci la seguente base B $(m\times m)$ di (A, I_m)

$$B = \Big[\, \underbrace{a^{j_1} \mid \cdots \mid a^{j_p}} \;\Big|\; \underbrace{u^{j_p+1} \mid \cdots \mid u^{j_m}} \,\Big]$$

$$\begin{array}{c} \\ B = \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} F & 0 \\ \hline F_1 & I_{m-p} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} j_1 \\ \vdots \\ j_p \\ j_{p+1} \\ \vdots \\ j_m \end{array}$$

$\Rightarrow |\det(F)| = |\det(B)| = 1$

Come verificare la Totale Unimodularità?

TEOREMA: *Sia* ***A*** *una matrice a componenti* ***{0,1,-1}****. Allora* ***A*** *è* ***totalmente unimodulare (TUM) se:***

(1) *ogni colonna contiene al più due coefficienti diversi da zero;*

(2) *le righe di* ***A*** *sono partizionabili in due insiemi* Q_1 *e* Q_2 ***tali che:***

(2a) *Se una colonna* ***j*** *contiene due elementi* $a_{ij} \neq 0$ **e** $a_{hj} \neq 0$ *aventi lo* ***stesso segno*** *allora* $i \in Q_1$ *e* $h \in Q_2$

(2b) *Se una colonna* ***j*** *contiene due elementi* $a_{ij} \neq 0$ **e** $a_{hj} \neq 0$ *aventi lo* ***segno diverso*** *allora* $i,h \in Q_1$ *oppure* $i,h \in Q_2$

È una condizione sufficiente: se verificata è TUM, se non verificata potrebbe esserlo o no!

Criterio Sufficiente (esempi)

TEOREMA: *Sia **A** una matrice a componenti* ***{0,1,-1}****.*

*Allora **A** è **totalmente unimodulare (TUM)** **se:***

(1) *ogni colonna contiene al più due coefficienti diversi da zero;*

(2) *le righe di **A** sono partizionabili in due insiemi Q_1 e Q_2 **tali che:***

*(2a) Se una colonna **j** contiene due elementi $a_{ij} \neq 0$ e $a_{hj} \neq 0$ aventi lo **stesso segno** allora $i \in Q_1$ e $h \in Q_2$*

*(2b) Se una colonna **j** contiene due elementi $a_{ij} \neq 0$ e $a_{hj} \neq 0$ aventi lo **segno diverso** allora $i,h \in Q_1$ oppure $i,h \in Q_2$*

$$
\begin{array}{c}
Q_1 \\ \\ \\ Q_2 \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc}
0 & -1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

Criterio OK $\Rightarrow$ TUM

Criterio fallito

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Non TUM

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

TUM

Matrici Totalmente Unimodulari

1. Se ***A*** *è* ***totalmente unimodulare****, anche*

$$A^T \quad \begin{bmatrix} A \\ I_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I_n \end{bmatrix}$$

sono ***totalmente unimodulari***

2. La ***matrice di incidenza*** *nodi archi* ***M*** *di un grafo orientato è* ***totalmente unimodulare*** *(vedremo)*

DIMOSTRAZIONI: (a cura dello studente)