Corso di Laurea Magistrale in
Scienze Riabilitative delle Professioni Sanitarie

# *Modulo: Ricerca Operativa*
# *Corso: Management Sanitario*

**Prof. Renato Bruni**

**bruni@diag.uniroma1.it**

*Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale (DIAG)*
*Università di Roma "Sapienza"*

# Struttura del Corso

Corso in **Managmente Sanitario** (6 crediti) diviso in 3 moduli

- **Ricerca Operativa** (2 crediti MAT09) prof. Renato Bruni
- **Scienze Infermieristiche e tecniche riabilitative Neuropsichiatriche** (2 crediti MED48) prof.ssa Donatella Valente
- **Scienze Infermieristiche Generali Cliniche e Pediatriche** (2 crediti MED45) prof. Santo Anastasi

- Il materiale didattico e tutte le informazioni sono distribuite dai docenti in modo **autonomo**

# Modulo Ricerca Operativa

Vedremo:

- Cosa vuol dire Ricerca Operativa e Ottimizzazione
- L'approccio modellistico alla risoluzione del problemi
- Vari tipi di modelli di Ottimizzazione, cioè modelli in cui si vuole massimizzare o minimizzare un obiettivo
- Come scrivere modelli di Ottimizzazione per problemi del mondo reale
- Come risolvere questi modelli di Ottimizzazione, cioè trovare la soluzione ottima tra le varie soluzioni ammissibili
- Come eventualmente ricavare altre informazioni oltre alla soluzione ottima per fornire metodi di supporto alle decisioni

# Materiale del corso

- Slide delle lezioni, disponibili sulla pagina web del docente (http://www.diag.uniroma1.it//~bruni/) andando alla sezione Didattica e poi, tra i vari corsi, alla sottosezione **Modulo Ricerca Operativa**

# Importante

- Per contattarmi usare email bruni@diag.uniroma1.it e inserire SEMPRE l'oggetto Modulo RO, altrimenti l'email potrebbe essere scambiata per spam e quindi ignorata
- Occorre assolutamente capire le cose che vedremo a lezione, non imparare a memoria fingendo di aver capito
- Le slide sulla mia pagina web potranno essere aggiornate durante il corso, quindi occorre assicurarsi di usare sempre la versione più recente

# Introduzione

- La gestione delle operazioni (**operations managment**) è quell'insieme di attività di direzione e di controllo che governano i processi di trasformazione dei diversi input (risorse di materiali, persone, macchinari, etc.) utilizzati da una azienda nella produzione di beni e/o servizi
- Rappresenta un insieme di metodologie, strumenti e approcci utilizzati per l'analisi ed il miglioramento dei processi che trasformano input in output
- Sovrintende l'intero sistema che produce un bene o fornisce un servizio facendo sì che sia **massimizzata l'efficacia del sistema complessivo** di produzione
- E' necessaria per tutti i tipi di aziende o organizzazioni!
- Si tratta di **PIANIFICARE** le operazioni: stabilire come utilizzare le risorse anche collocandole nell'orizzonte temporale di riferimento al fine di raggiungere l'obiettivo voluto

# Pianificazione dei processi

- La **pianificazione** (planning) richiede che sia noto come più processi di trasformazione (operazioni) sono tra loro **legati e mutuamente influenzati**
- L'influenza può riguardare sia l'asse **temporale** (contemporaneità e sequenzialità) che l'asse delle **risorse** (concorrenza sulle stesse risorse)
- Orizzonte temporale: lungo - medio - breve
- I concetti di lungo, medio e breve periodo sono **relativi al tipo di processo** e non assoluti (possono andare da diversi giorni a diverse settimane/mesi)
- Planning di natura **strategica** (obiettivi finali) o **tattica** (modalità per arrivarci) a seconda dell'orizzonte temporale

# Pianificazione e previsione

- **Pianificazione strategica**
- lungo - medio periodo (anni - mesi)
- orientata dalla mission aziendali (valori e norme)
- decisa dai più alti livelli aziendali

- **Pianificazione tattica e operativa**
- medio - breve periodo (mesi - settimane - giorni)
- volta ad ottimizzare il processo operativo con attività di progettazione, controllo e valutazione
- dirigenti intermedi supportati da tecnici

# Ricerca Operativa

- **Ricerca Operativa**: consiste nell'applicazione di strumenti matematici per supportare le decisioni o migliorare l'efficienza delle operazioni. Chiamata anche **Management Science**
- Il nome viene dalla "**Operational Research Section**" della **Royal Air Force** creata nel 1941 in UK per supportare decisioni militari con metodi scientifici
- Queste tecniche hanno avuto molto **successo**, altrimenti il nome non sarebbe stato ricordato
- Non sono affatto tecniche confinate all'ambito militare, anzi oggi sono applicate per risolvere moltissimi problemi di natura completamente diversa

# Utilizzo della Ricerca Operativa

- Attualmente viene applicata per risolvere problemi o supportare decisioni in **molti casi pratici provenienti da campi anche molto diversi tra loro**, per esempio:
  - Production planning
  - Investment selection
  - Portfolio optimization
  - Data mining
  - Sequence analysis
  - Personnel scheduling
  - Network design
  - …

# Problema delle competenze

- Come mai può essere applicata a problemi molto diversi tra loro? Perchè si tratta di **metodi matematici**, che per loro natura possono essere applicati a qualunque problema dove ho grandezze quantificabili, non di nozioni relative solo a qualche campo specifico
- Quindi l'esperto di Ricerca Operativa, pur non essendo un esperto di tutti i problemi specifici, può **risolvere** problemi provenienti da tutti i campi, ed è **necessario** in tutte le organizzazioni

# Ottimizzazione

- **Ottimizzazione**: la selezione del miglior elemento (rispetto a qualche criterio matematico) da un insieme di alternative ammissibili per il problema che affrontiamo
- Cerchiamo il **massimo** o il **minimo** (= **soluzioni ottime**) di una qualche **funzione obiettivo**, che è una funzione matematica che esprime il nostro criterio di preferenza per il problema che affrontiamo
- Normalmente vogliamo **minimizzare costi** o **massimizzare guadagni o performance**
- Esempio minimizzare costi: progettare un ponte che può far passare **100 macchine ogni ora** scegliendo la struttura, i materiali, etc. in modo da avere **costo minimo**
- Esempio massimizzare performance: progettare un ponte con un **budget di 10 MEuro** scegliendo la struttura, i materiali, etc. in modo da permettere il passaggio del **massimo numero di macchine**

# Perchè usare la Ricerca Operativa?

- Vediamo questo esempio, dovuto a George Dantzig (1914-2005), uno dei fondatori della Ricerca Operativa
- Abbiamo una azienda con **70 persone** e **70 lavori** che aspettano di essere svolti
- Per ogni assegnamento persona-lavoro abbiamo una **valutazione** di quanto è **buono** l'assegnamento
- Esempio: persona A → lavoro 1 è un assegnamento che vale 3,
- persona A → lavoro 2 è un assegnamento che vale 0.5,
- persona B → lavoro 1 è un assegnamento che vale 1, etc.
- Vogliamo **assegnare** ogni lavoro in modo che ogni persona ne abbia uno, e vogliamo **massimizzare il valore totale** dell'assegnamento

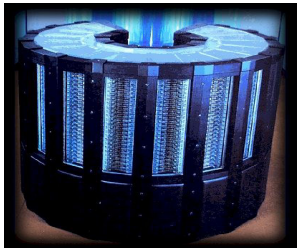
# Enumerazione Completa

- Problema: assegnare **70 persone** a **70 lavori**
- Sembra un problema facile; risolviamo con **enumerazione completa**: calcoliamo il valore di ogni possibile soluzione e scegliamo la migliore
- Facile, no?
- **Quante sono le soluzioni**? Per la prima persona scegliamo tra 70 lavori, per la seconda tra 69, e così via.
- Totale: 70 x 69 x … x 1 = **70!** (permutazioni di 70 elementi, $\approx 10^{100}$)
- Quanto tempo ci vuole a **calcolare tutte** le 70! soluzioni e **scegliere la migliore**?

# Esempio 70 x 70

- Proviamo con un **computer** capace di lavorare a 1MHz (ora obsoleto, all'epoca dell'esempio futuristico)

- Dopo diversi giorni di calcolo non ha finito e lo stoppiamo…
- Allora immaginiamo di dargli **più tempo**: diciamo che lo abbiamo fatto partire al momento della nascita dell'universo (big bang). Ad oggi avrebbe finito? La risposta è no!
- Allora prendiamo un computer **più veloce**: un supercomputer a 1Thz (forse ancora non esiste, ma prima o poi…)



- Immaginiamo di averlo fatto partire al momento del big bang. Ad oggi avrebbe finito? La risposta è ancora no!
- Allora di computer ne prendiamo tanti che lavorano **in parallelo**: tappezziamo le terra di computer di questo tipo che lavorano dal momento del big bang. Ad oggi avrebbe finito? La risposta è ancora no!

**Servono $10^{40}$ terre così equipaggiate per risolvere enumerando!**

# Allora come risolviamo?

- Il problema di 70 persone e 70 lavori è forse **troppo difficile** per essere risolto? Dobbiamo semplicemente abbandonare ogni speranza?
- **No**. Problemi simili sono risolti **molto facilmente** oggi, da molte organizzazioni
- Come riescono a farlo? Non usano l'enumerazione completa!
- Invece, usano i **modelli e gli algoritmi giusti**
- L'enumerazione completa non è computazionalmente praticabile, tranne che per problemi di dimensioni molto piccole …
- Impareremo come **scegliere** i modelli e gli algoritmi giusti
- Bisogna capire cosa è la complessità computazionale

# Algoritmi

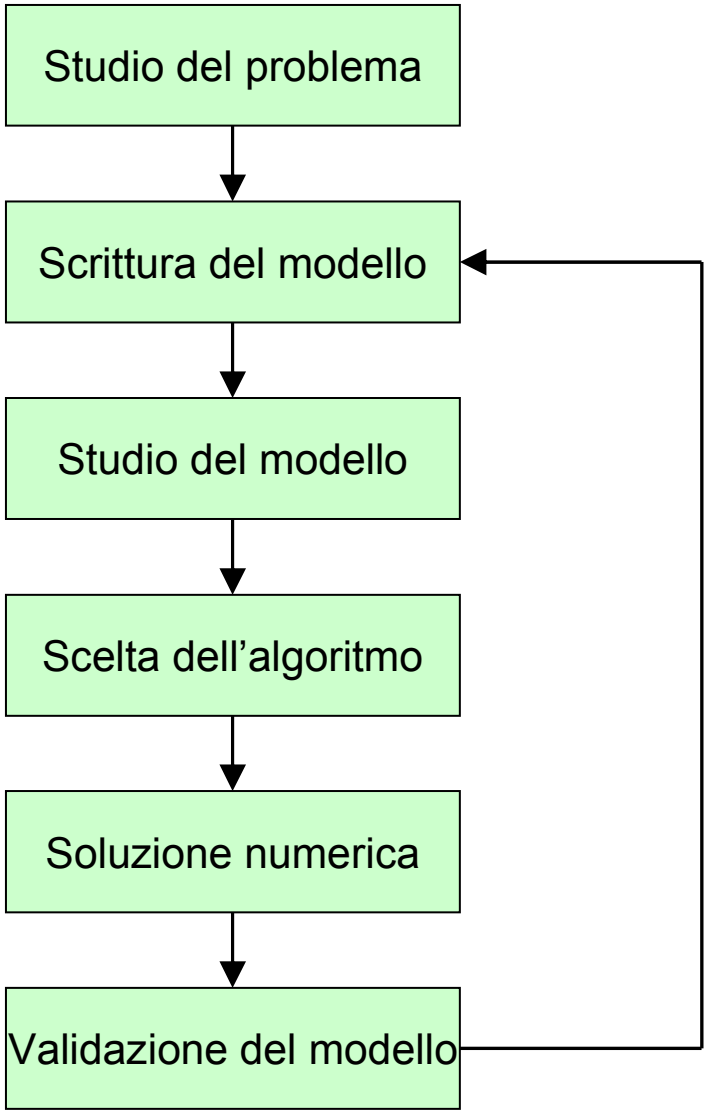
- Cosa è un **algoritmo**? Gli algoritmi sono ciò che rende possibile ai computer risolvere i problemi
- Una possibile definizione :
- "Un algoritmo è una procedura (un insieme finito di istruzioni ben definite) per eseguire un compito in modo da passare da un dato stato iniziale a un definito stato finale"
- Un algoritmo deve ovviamente essere **corretto** (= non dare risposte sbagliate)
- Ma deve anche essere **efficiente** (= non sprecare risorse computazionali, che nei computer sono **tempo** and **spazio** di memoria)
- In molti casi un algoritmo corretto ma inefficiente in pratica **non riesce** a risolvere il problema

# Modelli di Ottimizzazione

- Quando abbiamo un problema, potremmo usare **2 possibili approcci**
- 1) studiare il problema specifico, diventare esperti di quello, inventare un algoritmo per il problema specifico e risolverlo
- 2) studiare il problema specifico, formulare un **modello** che rappresenta gli aspetti essenziali del problema ma trascura tutti gli aspetti non essenziali; **studiare il modello** ottenuto, **prendere un algoritmo già noto** per risolvere quel tipo di modelli e applicarlo
- Cosa è meglio? Se usiamo 1) dobbiamo **partire da zero** ogni volta che abbiamo un nuovo problema, e l'algoritmo che inventiamo potrebbe essere poco efficiente/evoluto
- Se usiamo 2) possiamo **sfruttare** il lavoro che hanno fatto molti scienziati prima di noi e usare algoritmi molto efficienti ed evoluti, magari già implementati in qualche linguaggio di programmazione

# Come formulare un modello ?

- Seguiamo questo approccio:
- Le relazioni tra le grandezze del mondo reale vanno convertite in **relazioni matematiche**
- L'algoritmo viene scelto tra quelli disponibili per quel tipo di modello
- Quando troviamo la soluzione numerica, bisogna **capire se è ragionevole**. Se non lo è, probabilmente abbiamo dimenticato qualche aspetto essenziale nella definizione del modello. Allora dobbiamo **tornare alla scrittura del modello** e risolvere di nuovo
- Esempio: troviamo un valore negativo per qualcosa che deve essere >=0? Abbiamo dimenticato di inserire non-negatività nel modello



# Vantaggi dell'approccio modellistico

- Usiamo il **potere della matematica** per risolvere
- Potremmo **scoprire importanti proprietà** per via matematica (per esempio, scoprire che una certa grandezza $a$ è sempre 3.5 $b$, e questo prima non era noto)
- Possiamo usare **simulazioni matematiche** (per esempio, non occorre costruire un ponte per vedere se crolla, lo simuliamo col computer)

- Esistono anche **critiche** all' uso dei modelli matematici:
- La qualità della soluzione dipende dalla **qualità dei dati** (garbage in, garbage out) ma questo è inevitabile
- Non tutto può essere **quantificato** (per esempio, valutazioni soggettive). Ma possiamo cercare di approssimarle in qualche modo..

# Modelli di Ottimizzazione

- La **forma generale** di un modello di ottimizzazione è $\begin{cases} \min f(x) \\ x \in S \end{cases}$

  $f$ è la **funzione obiettivo**, è una funzione $f: \mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}$ (cioè prende in imput $n$ numeri e restituisce un numero) e rappresenta ciò che vogliamo massimizzare o minimizzare

  $x$ è l'insieme delle **variabili di decisione** (tipicamente un vettore $x_1, \ldots, x_n$), e rappresenta ciò che noi dobbiamo decidere. Prima di risolvere il problema non sappiamo quanto devono valere queste variabili, dopo aver risolto abbiamo i valori delle variabili

  $S$ è un insieme nello spazio delle $x$ chiamato **insieme ammissibile**, e rappresenta l'insieme di tutte le decisioni (= tutti i punti $x$) che sono ammissibili, cioè soddisfano le richieste (= vincoli del problema)

- Scriviamo solo la forma min perchè ogni massimo può essere espresso come un minimo (e viceversa) :

$$\min f(x) = - \max( - f(x))$$

# Soluzione ottima

Dato $\begin{cases} \min f(x) \\ x \in S \end{cases}$

Ogni $x$ nell' insieme ammissibile $S$ è detta **soluzione ammissibile**

Se esiste almeno un $x^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n) \in S$ tale che $f(x^*) <= f(x)$ per tutti gli $x \in S$, allora:

$x^* = x^*_1, \ldots, x^*_n$ è il minimo globale ed è chiamato **soluzione ottima**

e $f^* = f(x^*)$ è il **valore della funzione obiettivo all'ottimo**

e si dice che il problema ha soluzione. In questo caso, può avere **solo una** soluzione ottima, oppure **più di una** soluzione ottima, che però daranno tutte lo stesso valore alla funzione obiettivo (per definizione)

# Esiste sempre l'ottimo ?

- Ci sono anche problemi **senza** soluzione ottima!

In questo caso il problema potrebbe essere:

- **inammissibile**: non c'è neppure una soluzione ammissibile, in altre parole l'insieme $S$ è vuoto! (esempio: vogliamo costruire un ponte che supporti almeno 100 macchine, e abbiamo un budget di 3 Euro. Ci sono soluzioni che rispettano queste richieste? Non credo)
- o **illimitato**: data una soluzione, è sempre possibile trovarne una migliore, e quindi non possiamo determinare una soluzione migliore di tutte (esempio: quanti soldi vogliamo farci regalare?)

# Esempio 1

- Una azienda produce 3 **prodotti** che chiamiamo P1, P2, P3
- Per ogni Kg di prodotto occorre una certa quantità di 2 **ingredienti**, chiamati M1 e M2, secondo questa tabella

| | **M1** | **M2** |
|---|---|---|
| **P1** | 2 | 4 |
| **P2** | 1 | 5 |
| **P3** | 3 | 4 |

- Per il materiale M1 sono **disponibili** non più di 50 kg a settimana, per M2 non più di 80 kg a settimana
- P1 viene **venduto** a 10 euro/Kg, P2 a 14 euro/Kg, P3 a 18 euro/Kg
- Vogliamo pianificare la produzione in modo da **massimizare il ricavo**
- E' un esempio **molto semplice** per capire facilmente, poi si potranno risolvere nello stesso modo anche problemi **molto più complessi**

# Costruzione del primo modello 1/3

- Come risolvere? Il primo passo è capire cosa possiamo decidere, cosa è sotto il nostro controllo
- Possiamo semplicemente alzare I prezzi a incassare di più? **No**, i prezzi sono fissati del mercato, se li alziamo semplicemente non vendiamo più!
- Possiamo **solo decidere** quanto produrre per ogni prodotto P1, P2, P3, quindi usiamo 3 variabili di decisione:
- $x_1 =$ Kg di P1 prodotti per settimana
- $x_2 =$ Kg di P2 prodotti per settimana
- $x_3 =$ Kg di P3 prodotti per settimana
- Usiamo Kg per settimana perché tutti i dati sono espressi in questo modo, oppure dobbiamo convertire tutto in qualche altra unità

# Costruzione del primo modello 2/3

- Ora possiamo scrivere il nostro obiettivo di **massimizzare il ricavo settimanale**, ma espresso come funzione dei valori (incogniti) della produzione

$$\max f(x) = \max (10\, x_1 + 14\, x_2 + 18\, x_3)$$

- In altre parole, **per ora non sappiamo** quanto incasseremo ogni settimana, perchè non sappiamo quanto produrremo per ogni prodotto, ma **possiamo scriverlo** usando le variabili di decisione

- Abbiamo finito il modello? Per rispondere a questa domanda ogni volta che stiamo scrivendo un modello, pensiamo cosa succederebbe se risolviamo il modello così come è ora. Che succederebbe? Il problema sembra illimitato. Ma nella realtà chiaramente non lo è: non possiamo produrre quanto ci pare. Bisogna considerare i **limiti** sui materiali

# Costruzione del primo modello 3/3

- Allora scriviamo che la quantità di M1 usata a settimana **non supera** 50 kg. Di nuovo, non sappiamo ora quanto M1 useremo, perchè non sappiamo quanto produrremo di ogni prodotto, ma **possiamo esprimerlo** usando le variabili di decisione

$$2\,x_1 + 1\,x_2 + 3\,x_3 \leq 50$$

- Similmente, scriviamo che la quantità di M2 usata a settimana **non supera** 80 kg

$$4\,x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_3 \leq 80$$

- Inoltre, dobbiamo dire che le veriabili di decisione sono in questo caso **numeri reali e non-negativi** (possiamo produrre frazioni di chilo, ma non valori negativi)

$$x_{\mathrm{i}} \geq 0 \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3 \qquad\qquad x_{\mathrm{i}} \in \mathrm{R} \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3$$

# Il nostro primo modello

- Usando tutti i pezzi otteniamo il **modello** del nostro problema

$$\begin{cases} \max \ 10\,x_1 + 14\,x_2 + 18\,x_3 \\ 2\,x_1 + 1\,x_2 + 3\,x_3 \le 50 \\ 4\,x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_3 \le 80 \\ x_i \ge 0 \quad \text{for} \quad i = 1, 2, 3 \\ x \in R^3 \end{cases}$$

- Le richieste che definiscono l'insieme ammissibile sono dette **vincoli**
- Sotto i vincoli scriviamo il **dominio** delle variabili (per esempio numeri reali, numeri interi, etc.)
- Quando il dominio sono semplicemente i numeri reali a volte si omette

- Da notare che questa non è ancora la soluzione; è solo la scrittura completa di tutti gli **elementi essenziali** del problema pratico
- Adesso possiamo scegliere un **algoritmo** per modelli di questo tipo (è un modello di programmazione lineare) e risolvere per trovare i valori di $x^*_1 \ x^*_2 \ x^*_3$ che danno il massimo ricavo

# Esempio 2

- Abbiamo un **budget** di 100.000 Euro dobbiamo investirlo
- Troviamo 4 possibili investimenti A, B, C, D, e per ognuno stimiamo il costo e il ricavo

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **costo** | 20.000 | 30.000 | 15.000 | 50.000 |
| **ricavo** | 35.000 | 40.000 | 40.000 | 70.000 |

- Ogni investimento può essere effettuato completamente oppure non effettuato, non può essere svolto parzialmente o più di una volta
- Vogliamo determinare quali investimenti fare per **massimizzare il ricavo**

# Costruz. del secondo modello 1/2

- Con soli 4 investimenti potremmo pensare di **esaminarli** semplicemente e scegliere i migliori
- Ma se abbiamo invece **400 investimenti** non possiamo fare così!
- Quindi dobbiamo nuovamente **formulare** un modello
- Quale è l'aspetto che possiamo **decidere**? Il ricavo di ogni investimento è quello, non possiamo pensare di aumentarlo
- Per ogni investimento, possiamo solo **scegliere** se **farlo** oppure **no**
- Le **variabili** del nostro modello saranno
- $x_i = \begin{cases} 1 & \text{se effettuiamo } \textbf{investimento } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- Queste variabili **non possono essere numeri reali**, devono essere **binarie**: valgono solamente 1 o 0

# Costruz. del secondo modello 2/2

- Ora scriviamo il nostro obiettivo di **massimizzare il ricavo complessivo**, espresso come al solito in funzione delle variabili

$$\max 35000\, x_A + 40000\, x_B + 40000\, x_C + 70000\, x_D$$

- Da notare che nella definizione delle variabili di solito scegliamo 1 per **azione svolta**, e 0 altrimenti, e non il contrario o per esempio +1 e -1, etc. Questo ci permette di scrivere la somma di prodotti vista sopra, **facilmente comprensibile**
- Ci sono **vincoli**? Si, dobbiamo dire che bisogna rispettare il budget: il costo totale degli investimenti fatti non può superare 100000

$$20000\, x_A + 30000\, x_B + 15000\, x_C + 50000\, x_D \leq 100000$$

# Il nostro secondo modello

- In conclusione, questo è il nostro secondo modello

$$\begin{cases} \max\ 35000\, x_A + 40000\, x_B + 40000\, x_C + 70000\, x_D \\ 20000\, x_A + 30000\, x_B + 15000\, x_C + 50000\, x_D \ \leq\ 100000 \\ x \in \{0,1\}^4 \end{cases}$$

Notare le variabili binarie! Questo dominio si può scrivere in più modi **equivalenti**

$x \in \mathrm{B}^4$ o $x_i \in \{0,1\}$ per $i = 1, 2, 3, 4$

- Questo tipo di modello è detto **programmazione lineare binaria** ed è un sottocaso della **programmazione lineare intera** (PLI)
- Questi tipi di modelli sono di solito molto più **computazionalmente difficili** rispetto ai corrispondenti di programmazione lineare (PL). Infatti richiedono appositi algoritmi più complessi

# Le Soluzioni

$$\begin{cases} \max\ 35000\, x_A + 40000\, x_B + 40000\, x_C + 70000\, x_D \\ 20000\, x_A + 30000\, x_B + 15000\, x_C + 50000\, x_D \ \leq\ 100000 \\ x \in \{0,1\}^4 \end{cases}$$

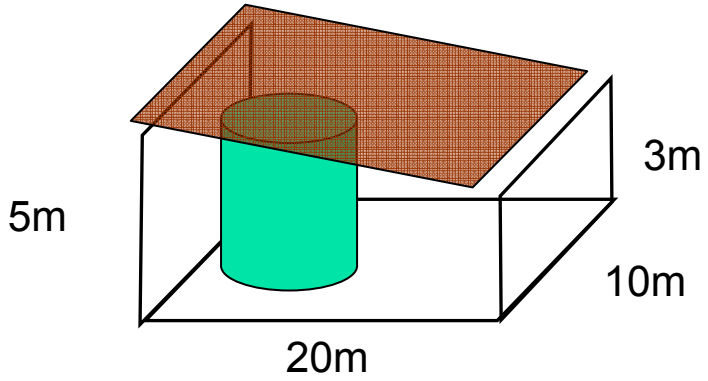
- Dato che questo modello è molto semplice, possiamo vedere quali sono le soluzioni **ammissibili** e quale è la soluzione **ottima**
- Ovviamente, **ciò non può essere fatto** per problemi del mondo reale, perché di solito sono **molto più grandi**
- L' **insieme ammissibile** $S$ è fatto di 15 punti binari (solo 1,1,1,1 non è ammiss.)

| | | |
|---|---|---|
| $x = (0,0,0,0)$ | $x = (0,1,0,1)$ | $x = (1,0,1,0)$ |
| $x = (0,0,0,1)$ | $x = (0,1,1,0)$ | $x = (1,0,1,1)$ |
| $x = (0,0,1,0)$ | $x = (0,1,1,1)$ | $x = (1,1,0,0)$ |
| $x = (0,0,1,1)$ | $x = (1,0,0,0)$ | $x = (1,1,0,1)$ |
| $x = (0,1,0,0)$ | $x = (1,0,0,1)$ | $x = (1,1,1,0)$ |

- Ha 1 **soluzione ottima**: $x^* = (0,1,1,1)$ cioè $x_A = 0;\ x_B = 1;\ x_C = 1;\ x_D = 1;$ ovvero facciamo gli invest. B,C,D.
- La soluzione $x^*$ ha valore $f(x^*) = 150000$

# Esempio 3

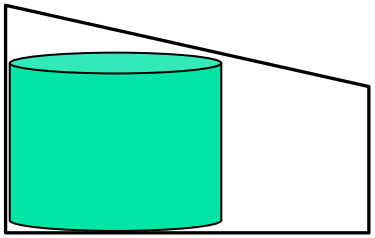
- Dobbiamo costruire un **silos** cilindrico che deve stare dentro una stanza rettangolare. La stanza è 10m x 20m e ha il tetto spiovente, alto 5m nella parte più alta e 3m nella più bassa, come in figura



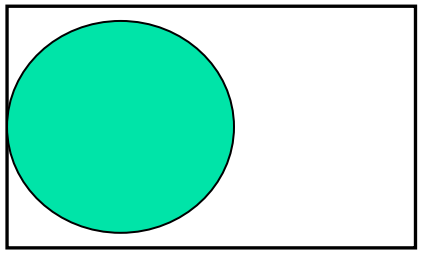

- Abbiamo 200 mq di materiale plastico piatto per costruire il silos
- Vogliamo costruirlo in modo da massimizzare la capacità

# Costruzione del terzo modello 1/4

- Come al solito, bisogna individuare quali sono le **decisioni** da prendere
- Intanto capiamo che per usare bene lo spazio il silos dovrà essere attaccato al muro di 10m



Vista laterale



Da sopra

- Quindi dobbiamo solo decidere il **raggio** $x$ della base e l' **altezza** $y$ del silos (in metri)
- Quindi abbiamo 2 sole variabili, $x$ e $y$, che possono assumere valori reali e non-negativi

# Costruzione del terzo modello 2/4

- Adesso possiamo scrivere l'obiettivo di **massimizzare il volume totale**, espresso come sempre in funzione delle variabili. Il volume è ovviamente dato da area di base per l'altezza, e la base è un cerchio di area $\pi x^2$

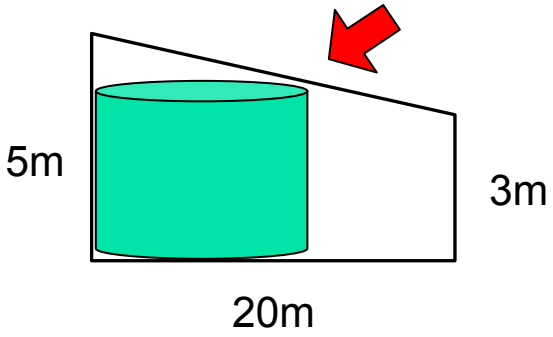
$$\max \pi x^2 y$$

- Ci sono **vincoli**? Si, di diversi tipi. Intanto dobbiamo dire che il silos deve essere contenuto nella stanza, quindi il diametro della base non può superare 10m

$$2x \leq 10$$

# Costruzione del terzo modello 3/4

- Poi dobbiamo dire che deve stare sotto il tetto. In realtà, basta dire che l' **angolo** del silos indicato dalla freccia **non può essere più alto** del tetto sopra di lui in quel punto




- Quanto è alto il **tetto**? Va da 5m a 3m in 20m, quindi scende 10cm per ogni metro orizzontale di distanza dal muro sinistro. La formula dell'altezza del tetto è allora $5 - 0.1\,(2\,x)$ quindi il vincolo è

$$y \leq 5 - 0.2\,x$$

# Costruzione del terzo modello 4/4

- Infine, l'area totale del silos non può superare 200 mq, perchè questo è tutto il materiale che abbiamo
- Calcoliamo l'area totale come: 2 volte **area di base** + **area laterale**
- Area di base è $\pi x^2$
- Area laterale è circonferenza moltiplicata per altezza : $2\pi x y$
- Quindi il vincolo è

$$2 \pi x^2 + 2\pi x y \leq 200$$

# Il nostro terzo modello

- Spostando tutte le variabili a sinistra e facendo alcune semplificazioni, il nostro **terzo modello** è

$$\begin{cases} \max \pi x^2 y \\ x \leq 5 \\ 0.2\, x + y \leq 5 \\ 2\,\pi\, x^2 + 2\pi\, x\, y \leq 200 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

- Questo modello è di **programmazione non lineare**: le variabili compaiono anche in espressioni non lineari (ci sono variabili moltiplicate tra loro, variabili alla seconda potenza, etc.)
- I modelli non lineari sono computazionalmente **difficili**, servono algoritmi specifici per risolverli
- Quando possibile, cerchiamo sempre di usare modelli lineari se gli effetti delle nonlinearità del problema reale sono piccoli e possono essere **trascurati**

# Molti tipi di Modelli

Per quanto riguarda le variabili possiamo distinguere in:

- **Ottimizzazione continua**: Le variabili possono assumere valori reali, a volte (ma non sempre) devono essere non-negative. Esempio: kg di beni da produrre, etc.
- **Ottimizzazione Discreta**: Le variabili possono assumere solo valori discreti. Di solito interi (0,1,2,3, …) oppure binari (solo 0,1). Esempi: numero di persone, scelta binaria tra fare o non fare una cosa, etc.
- **Ottimizzazione Mista**: Alcune variabili sono continue e altre sono discrete

# Molti tipi di Modelli

Per quanto riguarda la struttura del modello possiamo distinguere in:

- **Lineare** o **Non-lineare**: dipende dalle espressioni in cui compaiono le variabili: è lineare se le variabili sono moltiplicate solo per costanti (non per altre variabili) e/o sommate tra loro; è non lineare se le variabili compaiono anche in altri modi (es. moltiplicate tra loro, elevate a potenza, etc.)
- **Vincolato** o **Non Vincolato**: se ci sono vincoli oppure no
- **Singolo obiettivo** o **Multi-obiettivo**: se nel modello c'è una sola funzione obiettivo, oppure (più difficili) dobbiamo perseguire contemporaneamente più obiettivi, e quindi ci sono più funzioni che in qualche modo dobbiamo combinare o altrimenti trattare (esempio, bisogna minimizzare le spese ma contemporaneamente massimizzare la capacità – non vedremo in questo corso)

# Programmazione lineare (PL)

- Obiettivo e vincoli sono **lineari** se possono essere messi in questa forma, dove $c_i$ sono costanti (che possono anche avere espressioni complicate ma non devono contenere variabili)

$$c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

- In PL c'è un **singolo obiettivo lineare** e un **numero finito di vincoli lineari** in forma =, ≥, ≤ (equazioni o disequazioni non strette)
- Le variabili sono **continue** (cioè non sono discrete) e a volte possono essere non-negative
- Esempio

$$\begin{cases} \max \ 10 x_1 + 14 x_2 + 18 x_3 \\ 2 x_1 + 1 x_2 + 3 x_3 \leq 50 \\ 4 x_1 + 5 x_2 + 4 x_3 \leq 80 \\ x_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \\ x \in R^3 \end{cases}$$

# Notazione compatta

- Spesso si scrive il modello in forma compatta, chiamando $c$ il **vettore** dei coefficienti della funzione obiettivo, $A$ la **matrice dei vincoli** e $b$ il **termine noto** dei vincoli
- Il numero di **variabili** è chiamato $n$, il numero di **vincoli** $m$
- Possiamo scrivere i modello a sinistra in forma compatta (o matriciale) ottenendo il modello a destra

$$\begin{cases} \max \ 10\,x_1 + 14\,x_2 + 18\,x_3 \\ 2\,x_1 + 1\,x_2 + 3\,x_3 \le 50 \\ 4\,x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_3 \le 80 \\ x_i \ge 0 \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \\ x \in R^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max \ c'x \\ A\,x \le b \\ x \ge 0^n \\ x \in R^n \end{cases}$$

con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad b = (50 \ \ 80)^T$

$c = (10 \ \ 14 \ \ 18)^T \quad x = (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)^T$

# Esempio più avanzato

- Un impianto produce liquore usando 5 possibili ingredienti: **Alcol 90°, Estratto di frutta, Aroma1, Aroma2, Aroma3**. I prezzi e il contenuto alcolico di ogni ingrediente sono i seguenti

| | Alcol | Estratto | A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Gradazione** | 90° | 0° | 15° | 20° | 11° |
| **Costo al litro** | 2 | 10 | 190 | 250 | 220 |

- Si vuole produrre 100 Kg di liquore a settimana. Un litro pesa 0.91 kg. Il contenuto alcolico del liquore deve essere tra 30° e 33° gradi. Per manenere il gusto, l'estratto di frutta deve essere almeno il 15% dell'alcol, gli aromi devono essere almeno il 3% del totale, e A1 non può superare 1/3 della somma di A2 e A3. Vogliamo minimizzare la spesa totale per gli ingredienti

# Costruzione del modello 1/4

- Cosa possiamo decidere? Quanto pagare ogni ingrediente? No, quello non lo possiamo decidere. Decidiamo quanto usare per ogni ingrediente, in litri a settimana

  $x_i$ = litri di ingrediente $i$ usati a settimana,
  con $i$ = Alcol 90°, Estratto di frutta, Aroma1, Aroma2, Aroma3

- Obiettivo: minimizzare **spesa totale** per gli ingredienti

$$\min 2\,x_1 + 10\,x_2 + 190\,x_3 + 250\,x_4 + 220\,x_5$$

- Poi analizziamo ogni singola richiesta e scriviamo il vincolo (o il gruppo di vincoli) corrispondente

- Vogliamo produrre 100 kg a settimana ≈ 110 litri

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 110$$

# Costruzione del modello 2/4

- La **gradazione alcolica** del liquore deve essere tra 30° e 33°. Per scrivere questo vincolo, pensiamo cosa succede se mescoliamo 1 litro di alcol 90° e 1 litro di acqua. Otteniamo una gradazione di 45° calcolata da 90+0 / 2. Cosa è 2? È la quantità di miscela complessiva, 1+1, **NON** il numero di ingredienti. Se invece mescoliamo 1 litro di alcol 90° e 9 litri di acqua abbiamo 90+0 / 10 = 9°
- Quindi, quando mescoliamo i nostri 5 ingredienti, la gradazione sarà

$$\frac{90\,x_1 + 0\,x_2 + 15\,x_3 + 20\,x_4 + 11\,x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}$$

- Questo deve essere tra 30 e 33

$$30 \leq \frac{90\,x_1 + 0\,x_2 + 15\,x_3 + 20\,x_4 + 11\,x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 33$$

# Costruzione del modello 3/4

- Da notare che se invece scrivessimo semplicemente

$$30 \leq \quad 90\,x_1 + 0\,x_2 + 15\,x_3 + 20\,x_4 + 11\,x_5 \;\leq\; 33$$

- sarebbe **molto sbagliato**!! Verrebbero confrontati il volume totale di alcol nella miscela con 30 e 33, che sono gradazioni, cioè percentuali. Dobbiamo confrontare quantità omogenee!
- Un altro **grave errore** sarebbe prendere la tabella e scrivere semplicemente tutti i numeri, ognuno moltiplicato per una x, senza capire nulla di cosa si sta scrivendo. In questo campo bisogna sempre avere capito chiaramente quali informazioni si stanno usando e cosa si vuole esprimere

# Costruzione del modello 4/4

- L'estratto di frutta deve essere almeno il 15% dell'alcol

$$x_2 \geq 0.15\, x_1$$

- Gli aromi devono essere almeno il 3% del totale

$$x_3 + x_4 + x_5 \geq 0.03\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

- A1 non può superare 1/3 della somma di A2 e A3

$$x_3 \leq 0.33\,(x_4 + x_5)$$

- Infine, tutte le variabili sono **reali** e **non-negative**. Ricordare sempre: se nel problema reale è implicitamente richiesta la non-negatività, non possiamo semplicemente ometterla, altrimenti potremmo trovare soluzioni negative, di nessun valore pratico

$$x_i \geq 0 \qquad\qquad x_i \in \mathrm{R}$$

# Modello completo

$$
\begin{cases}
\min 2\,x_1 + 10\,x_2 + 190\,x_3 + 250\,x_4 + 220\,x_5 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \;\geq\; 110 \\
90\,x_1 + 0\,x_2 + 15\,x_3 + 20\,x_4 + 11\,x_5 \;\leq\; 33(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \\
90\,x_1 + 0\,x_2 + 15\,x_3 + 20\,x_4 + 11\,x_5 \;\geq 30(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \\
x_2 \;\geq\; 0.15\,x_1 \\
x_3 + x_4 + x_5 \;\geq\; 0.03\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \\
x_3 \;\leq\; 0.33\,(x_4 + x_5) \\
x_{\mathrm{i}} \geq 0 \\
x_{\mathrm{i}} \in \mathrm{R}
\end{cases}
$$

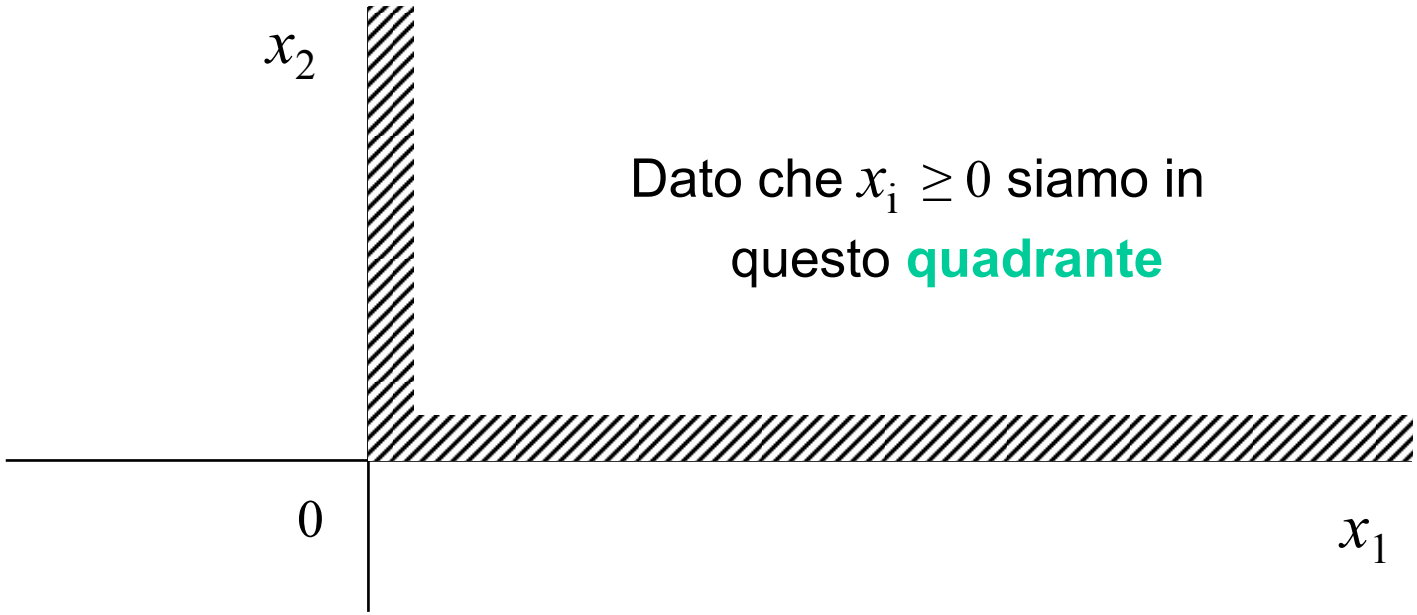
- Sta diventando complesso.. Nei problemi del mondo reale abbiamo facilmente centinaia di variabili e vincoli. Servono algoritmi di soluzione **efficienti!**

# Geometria della prog. lineare

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 10\,x_2 \\ 10\,x_1 + 5\,x_2 \le 25 \\ 4\,x_1 + 10\,x_2 \le 20 \\ x_1 + 1.5\,x_2 \le 4.5 \\ x_i \ge 0 \\ x_i \in \mathrm{R} \end{cases}$$

nel caso della PL il dominio reale può essere implicito

- Vediamo cosa vuol dire dal punto di vista **geometrico**




Dato che $x_i \ge 0$ siamo in questo **quadrante**

# Geometria della prog. lineare

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 10\,x_2 \\ 10\,x_1 + 5\,x_2 \le 25 \\ 4\,x_1 + 10\,x_2 \le 20 \\ x_1 + 1.5\,x_2 \le 4.5 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

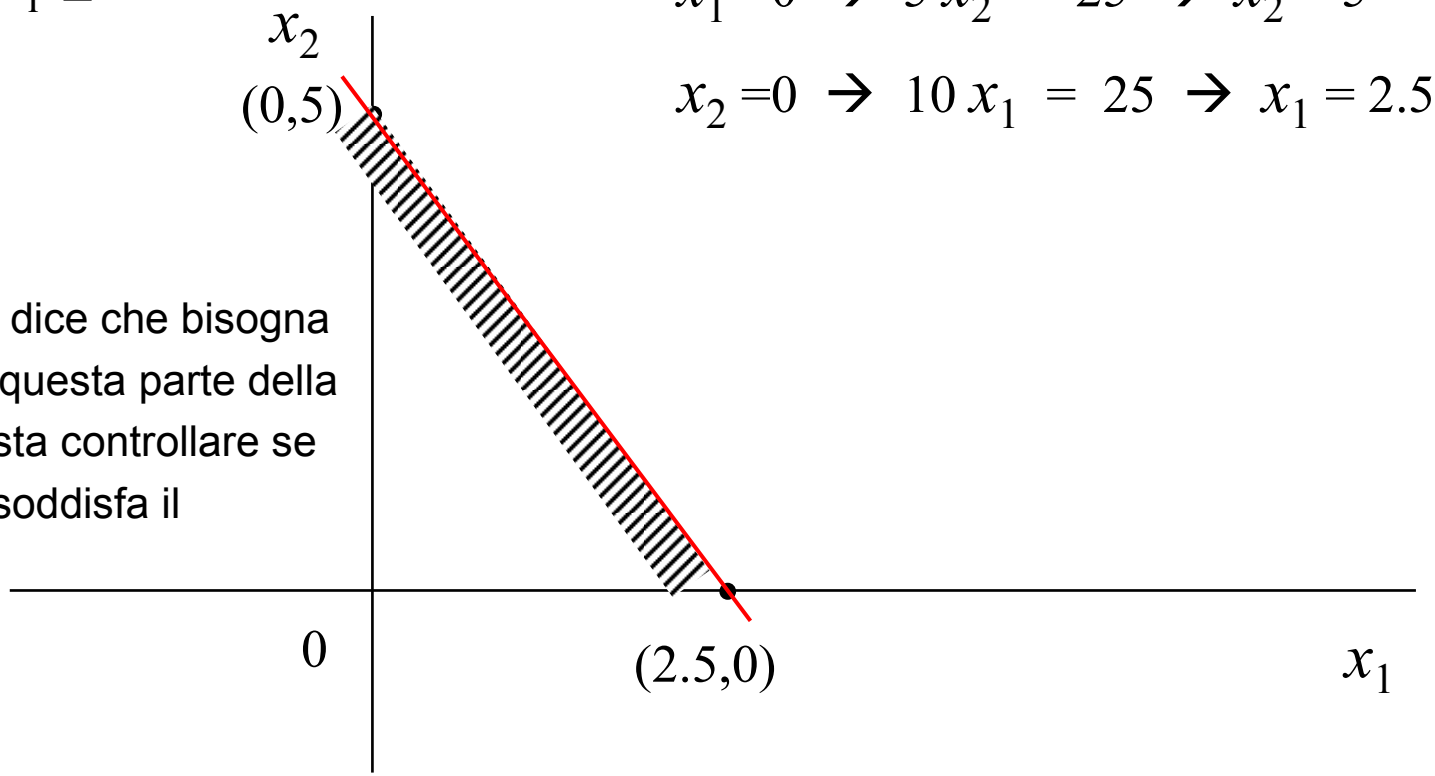
- Primo vincolo: consideriamo la retta associata

$$10\,x_1 + 5\,x_2 = 25$$

$$x_1 = 0 \rightarrow 5\,x_2 = 25 \rightarrow x_2 = 5$$

$$x_2 = 0 \rightarrow 10\,x_1 = 25 \rightarrow x_1 = 2.5$$

Il vincolo dice che bisogna stare da questa parte della retta (basta controllare se l'origine soddisfa il vincolo)



# Geometria della prog. lineare

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 10\,x_2 \\ 10\,x_1 + 5\,x_2 \le 25 \\ 4\,x_1 + 10\,x_2 \le 20 \\ x_1 + 1.5\,x_2 \le 4.5 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

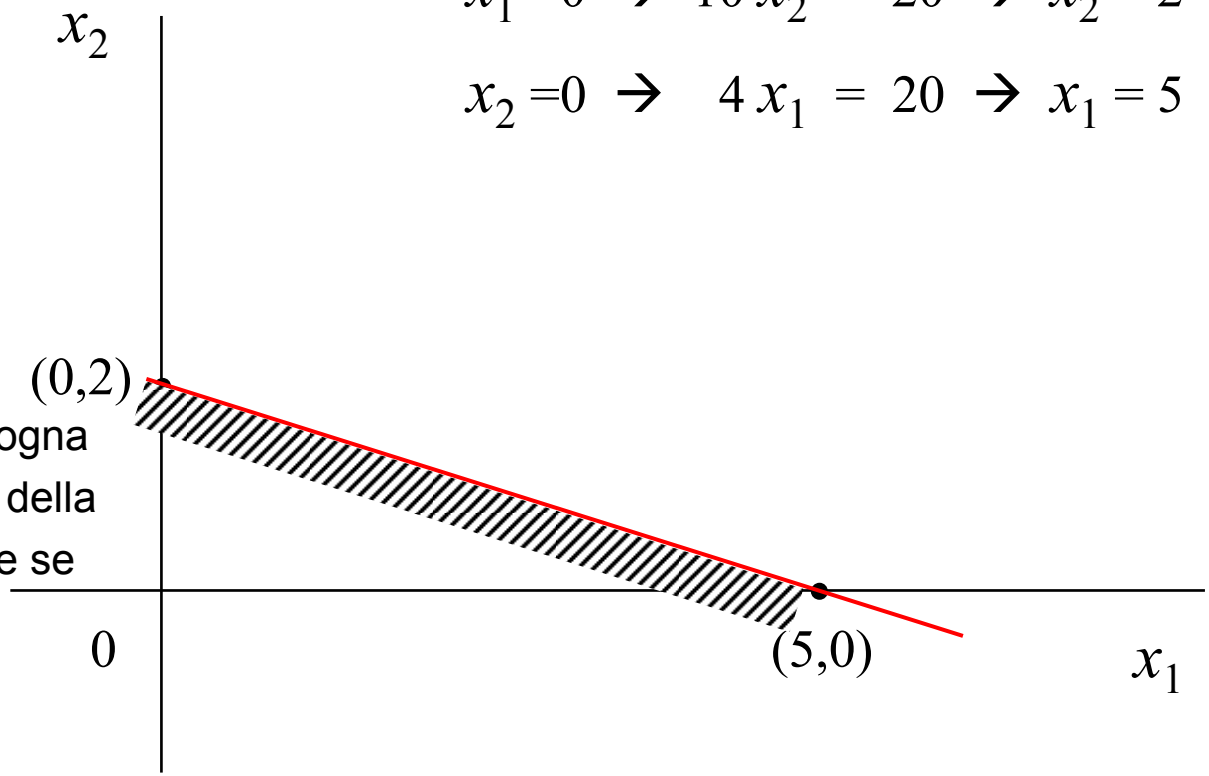
- Secondo vincolo: consideriamo la retta associata

$$4\,x_1 + 10\,x_2 = 20$$

$$x_1 = 0 \rightarrow 10\,x_2 = 20 \rightarrow x_2 = 2$$

$$x_2 = 0 \rightarrow 4\,x_1 = 20 \rightarrow x_1 = 5$$

Il vincolo dice che bisogna stare da questa parte della retta (basta controllare se l'origine soddisfa il vincolo)



# Geometria della prog. lineare

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 10\,x_2 \\ 10\,x_1 + 5\,x_2 \le 25 \\ 4\,x_1 + 10\,x_2 \le 20 \\ x_1 + 1.5\,x_2 \le 4.5 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

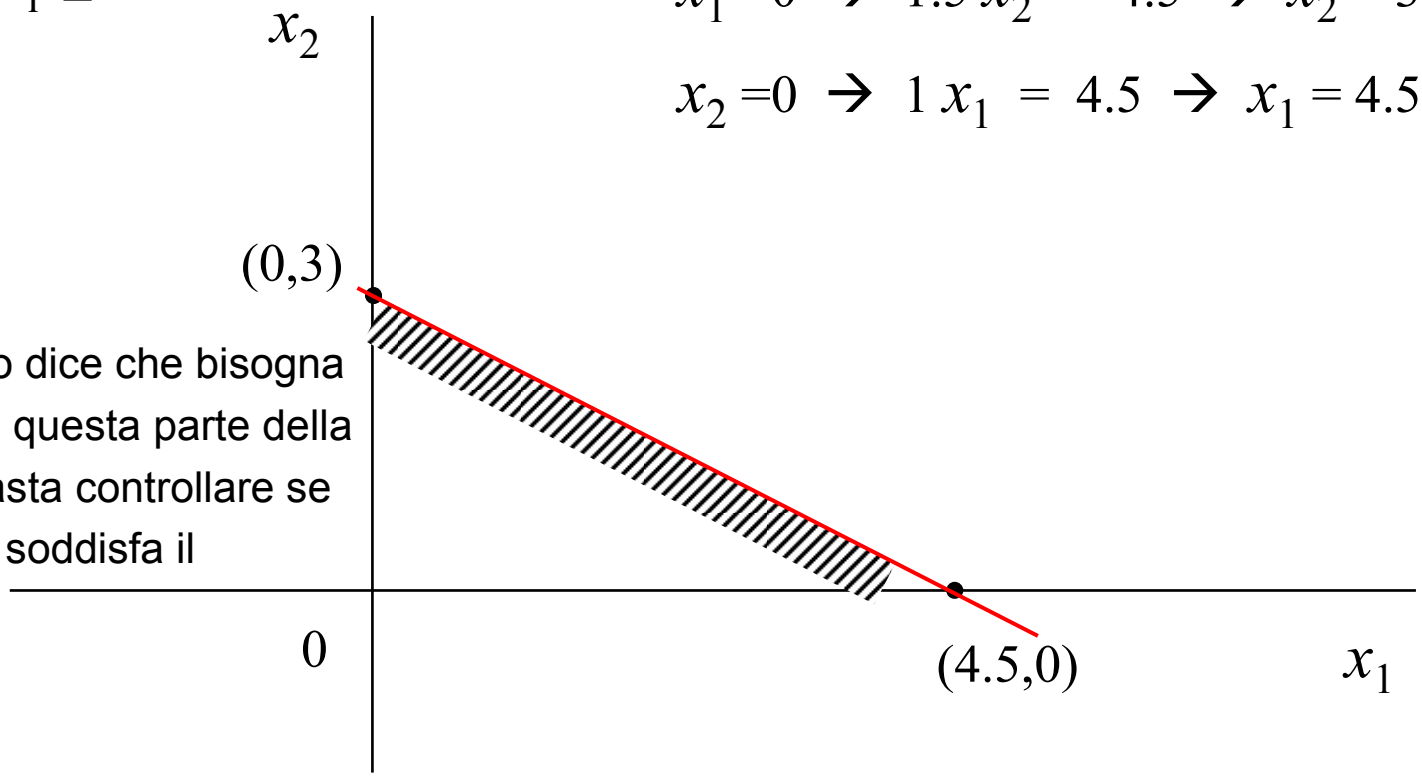
- Terzo vincolo: consideriamo la retta associata

$$1\,x_1 + 1.5\,x_2 = 4.5$$

$$x_1 = 0 \rightarrow 1.5\,x_2 = 4.5 \rightarrow x_2 = 3$$

$$x_2 = 0 \rightarrow 1\,x_1 = 4.5 \rightarrow x_1 = 4.5$$

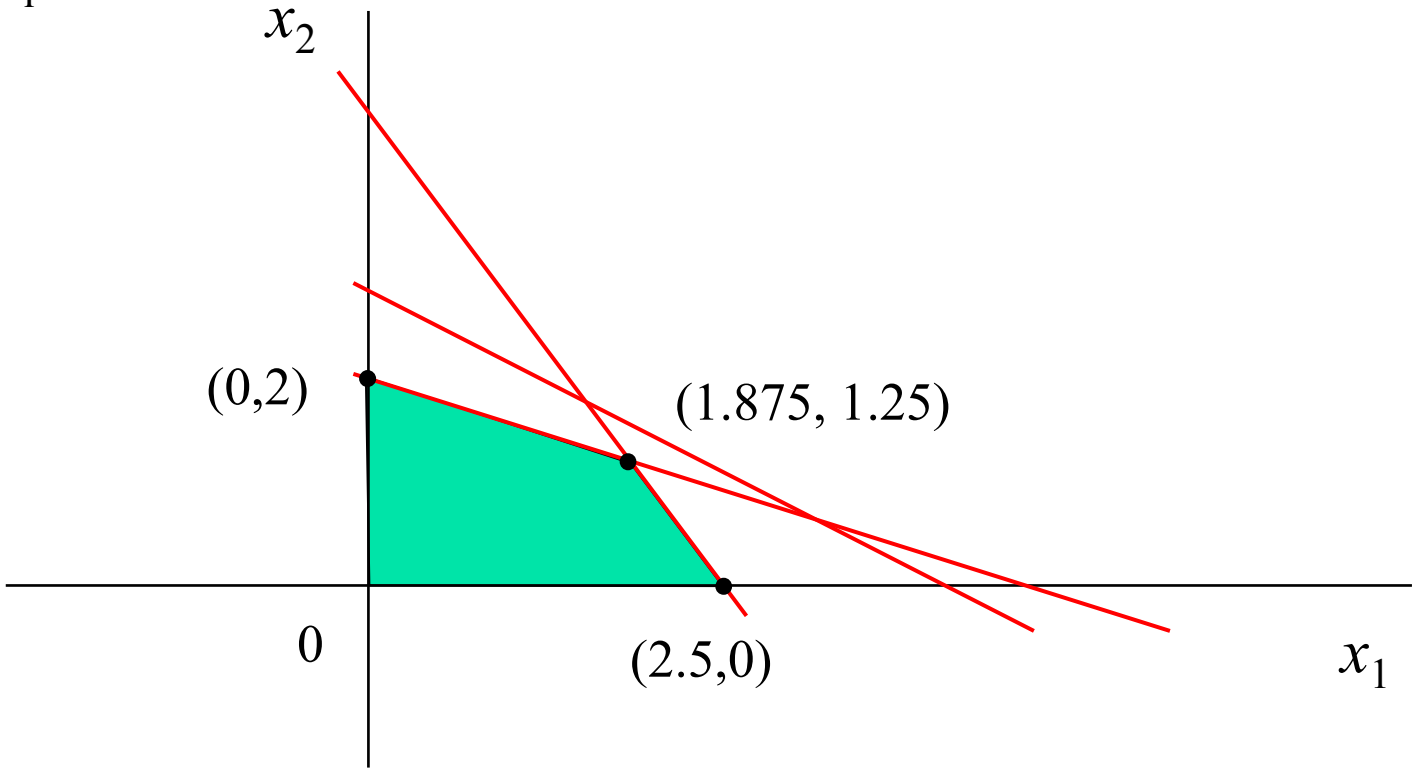
Il vincolo dice che bisogna stare da questa parte della retta (basta controllare se l'origine soddisfa il vincolo)



# Geometria della prog. lineare

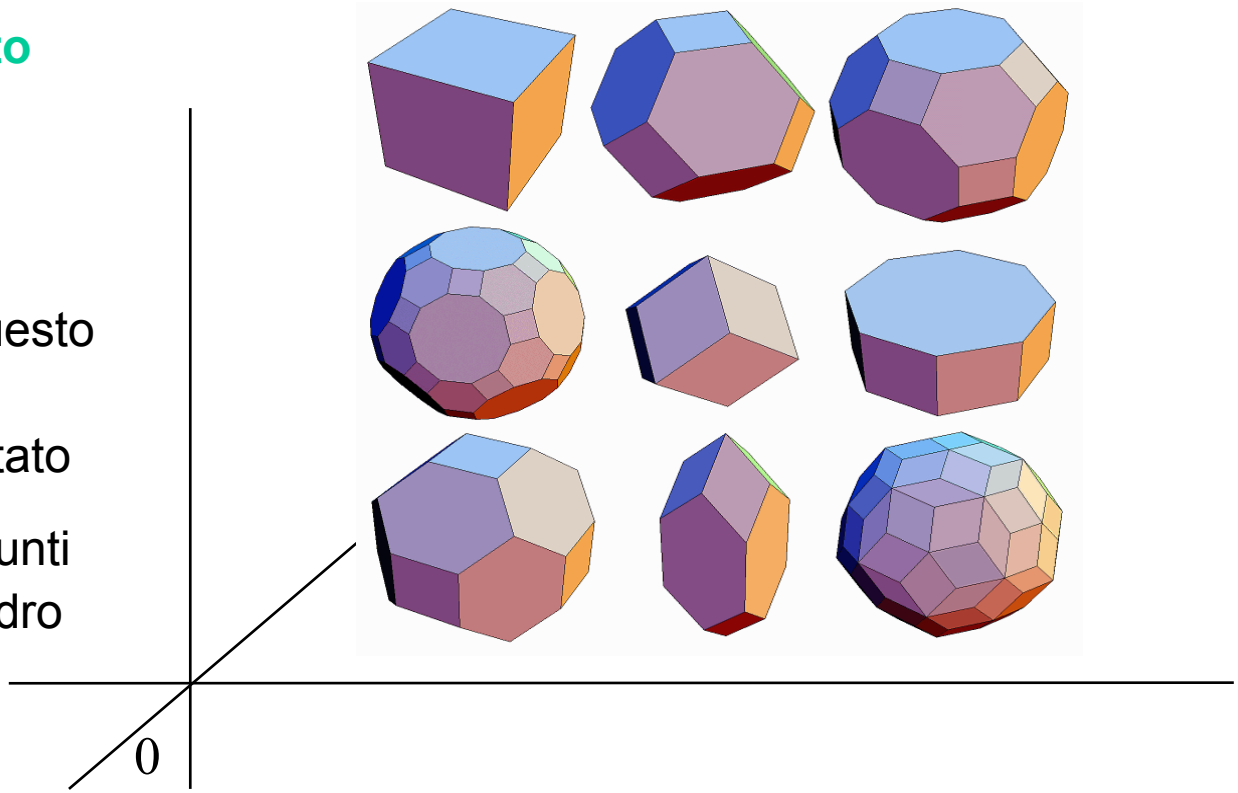
$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 10\,x_2 \\ 10\,x_1 + 5\,x_2 \le 25 \\ 4\,x_1 + 10\,x_2 \le 20 \\ x_1 + 1.5\,x_2 \le 4.5 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

- Tutti i vincoli devono essere soddisfatti contemporaneamente
- L' **insieme ammissibile** è:



# Geometria della prog. lineare

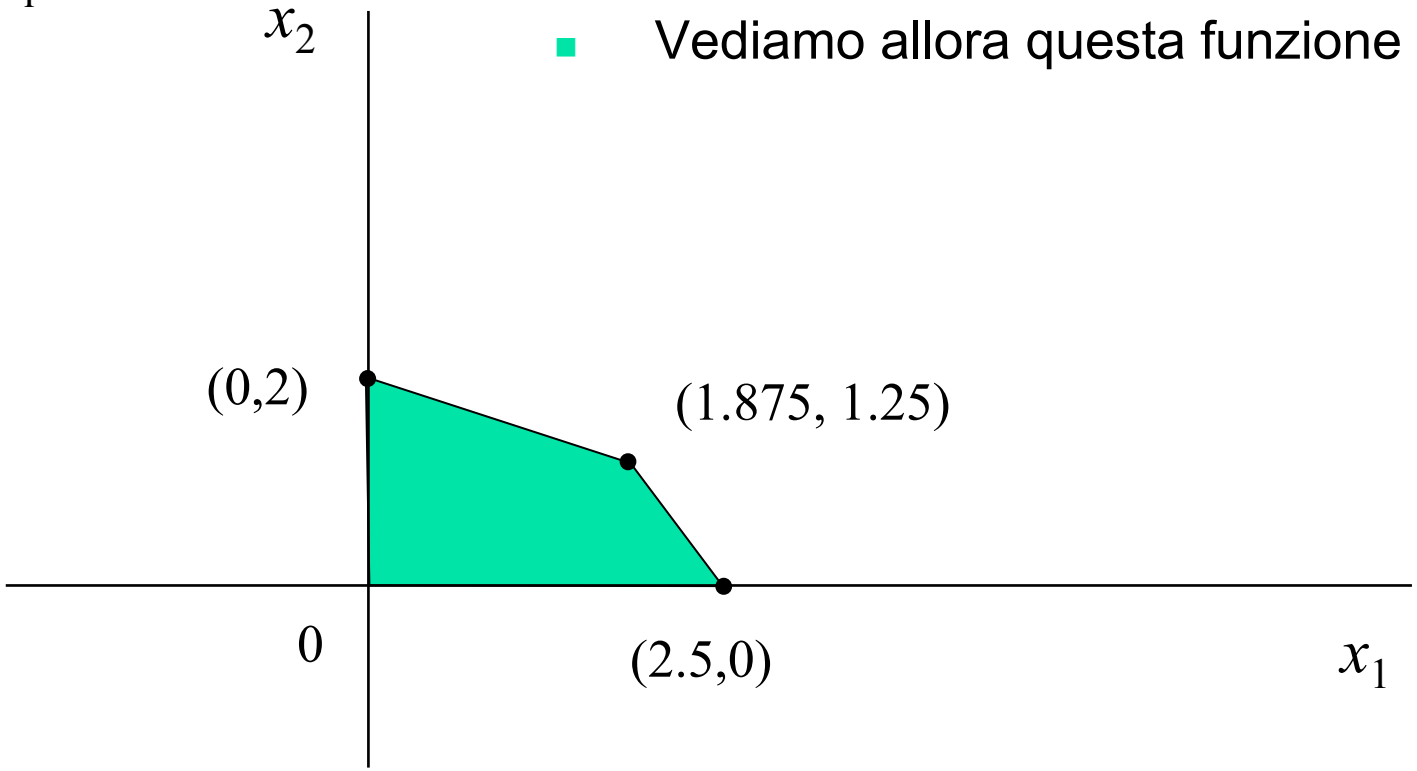
- In generale, l'insieme ammissibile è un **poliedro**: **intersezione** di un numero **finito** di **iperpiani** (dati dei vincoli di ugalianza) e **semizpazi chiusi** (dati dai vincoli di disugualianza non stretta)
- Insieme convesso: senza buchi o rientranze
- Può essere **vuoto** (problema inammissibile)
- Può **andare all'infinito**. In questo caso a volte il problema è illimitato
- I **vertici** sono i punti estremi del poliedro



# Geometria della prog. lineare

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 10\,x_2 \\ 10\,x_1 + 5\,x_2 \le 25 \\ 4\,x_1 + 10\,x_2 \le 20 \\ x_1 + 1.5\,x_2 \le 4.5 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

- All'interno dell'insieme ammissibile verde vogliamo trovare il punto che rende **massima** la funzione obiettivo
- Vediamo allora questa funzione



# Geometria della prog. lineare

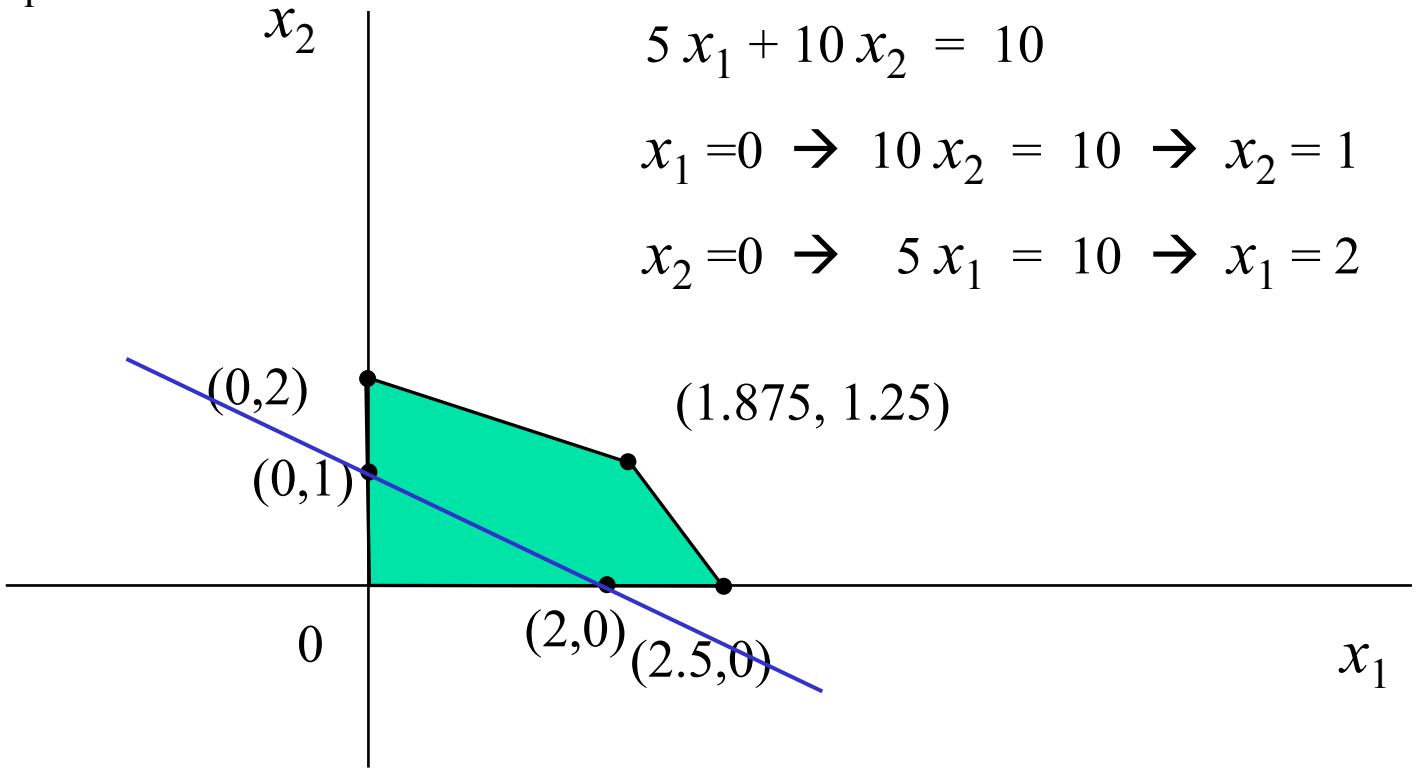
$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 10\,x_2 \\ 10\,x_1 + 5\,x_2 \le 25 \\ 4\,x_1 + 10\,x_2 \le 20 \\ x_1 + 1.5\,x_2 \le 4.5 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

- Un obiettivo lineare è **costante** su delle linee rette
- Per esempio vediamo la retta per cui questo obiettivo vale 10

$$5\,x_1 + 10\,x_2 = 10$$

$$x_1 = 0 \rightarrow 10\,x_2 = 10 \rightarrow x_2 = 1$$

$$x_2 = 0 \rightarrow 5\,x_1 = 10 \rightarrow x_1 = 2$$



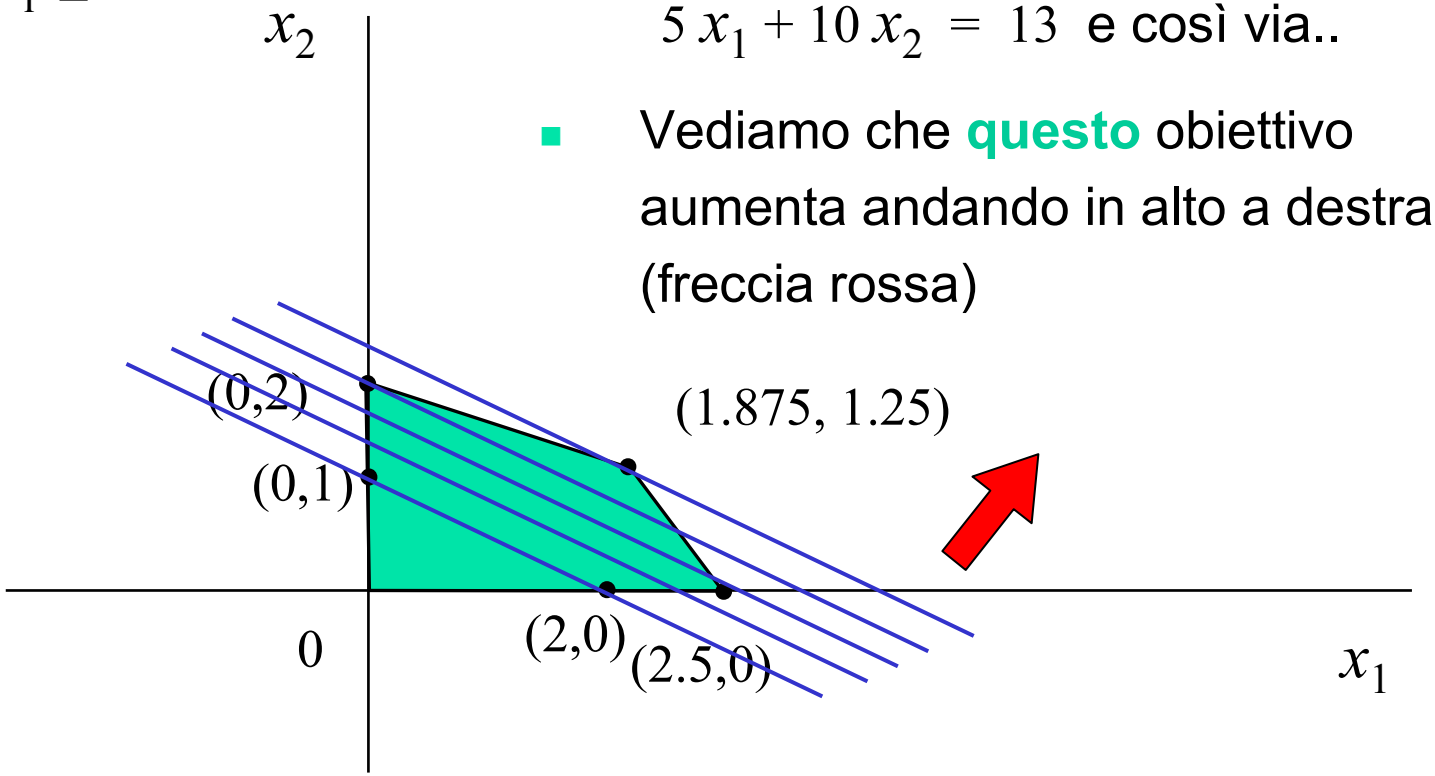
# Geometria della prog. lineare

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 10\,x_2 \\ 10\,x_1 + 5\,x_2 \le 25 \\ 4\,x_1 + 10\,x_2 \le 20 \\ x_1 + 1.5\,x_2 \le 4.5 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

- Nello stesso modo possiamo vedere le rette per cui

$$5\,x_1 + 10\,x_2 = 11$$
$$5\,x_1 + 10\,x_2 = 12$$
$$5\,x_1 + 10\,x_2 = 13$$ e così via..

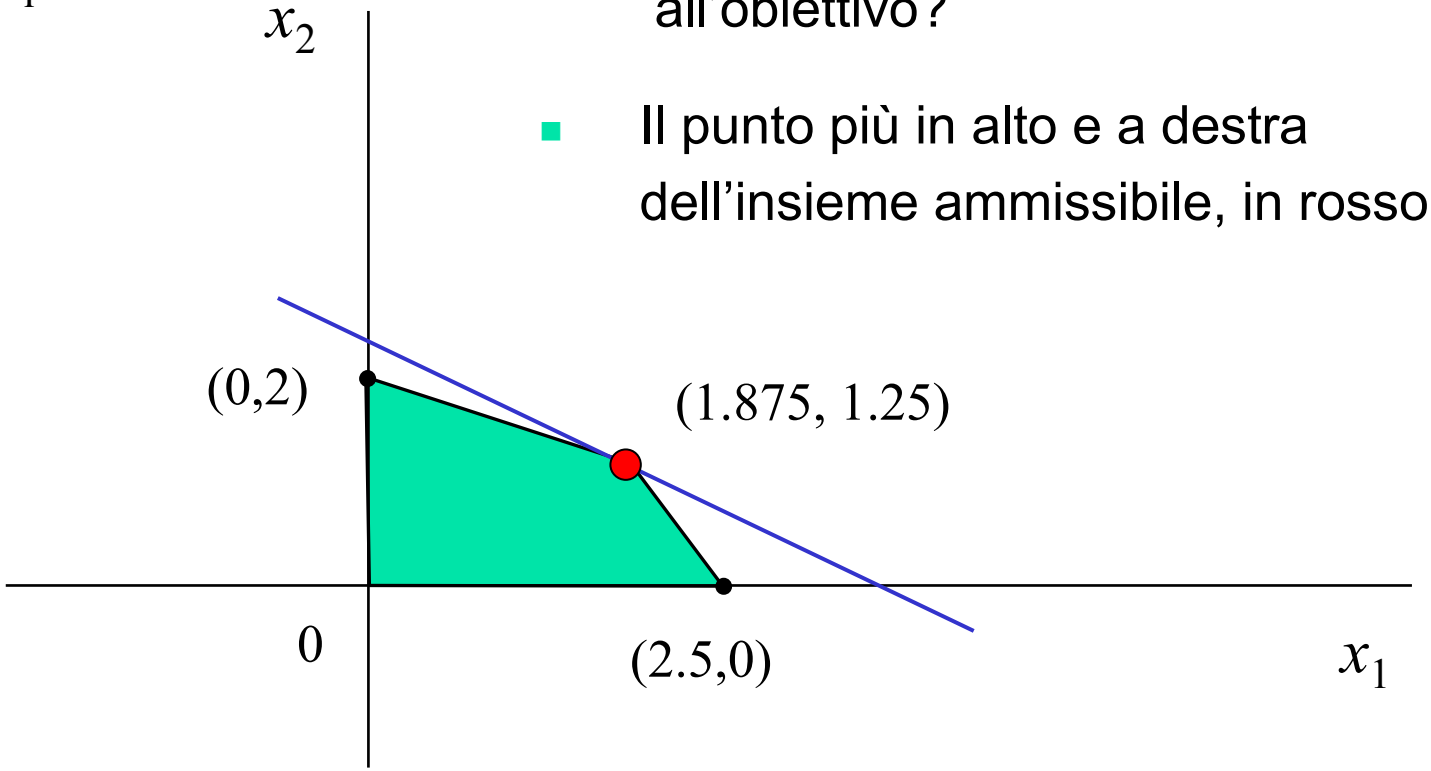
- Vediamo che **questo** obiettivo aumenta andando in alto a destra (freccia rossa)



# Geometria della prog. lineare

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 10\,x_2 \\ 10\,x_1 + 5\,x_2 \le 25 \\ 4\,x_1 + 10\,x_2 \le 20 \\ x_1 + 1.5\,x_2 \le 4.5 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

- Allora quale punto ammissibile interseca la retta col **valore maggiore**? In altre parole, quale punto da il valore massimo all'obiettivo?
- Il punto più in alto e a destra dell'insieme ammissibile, in rosso



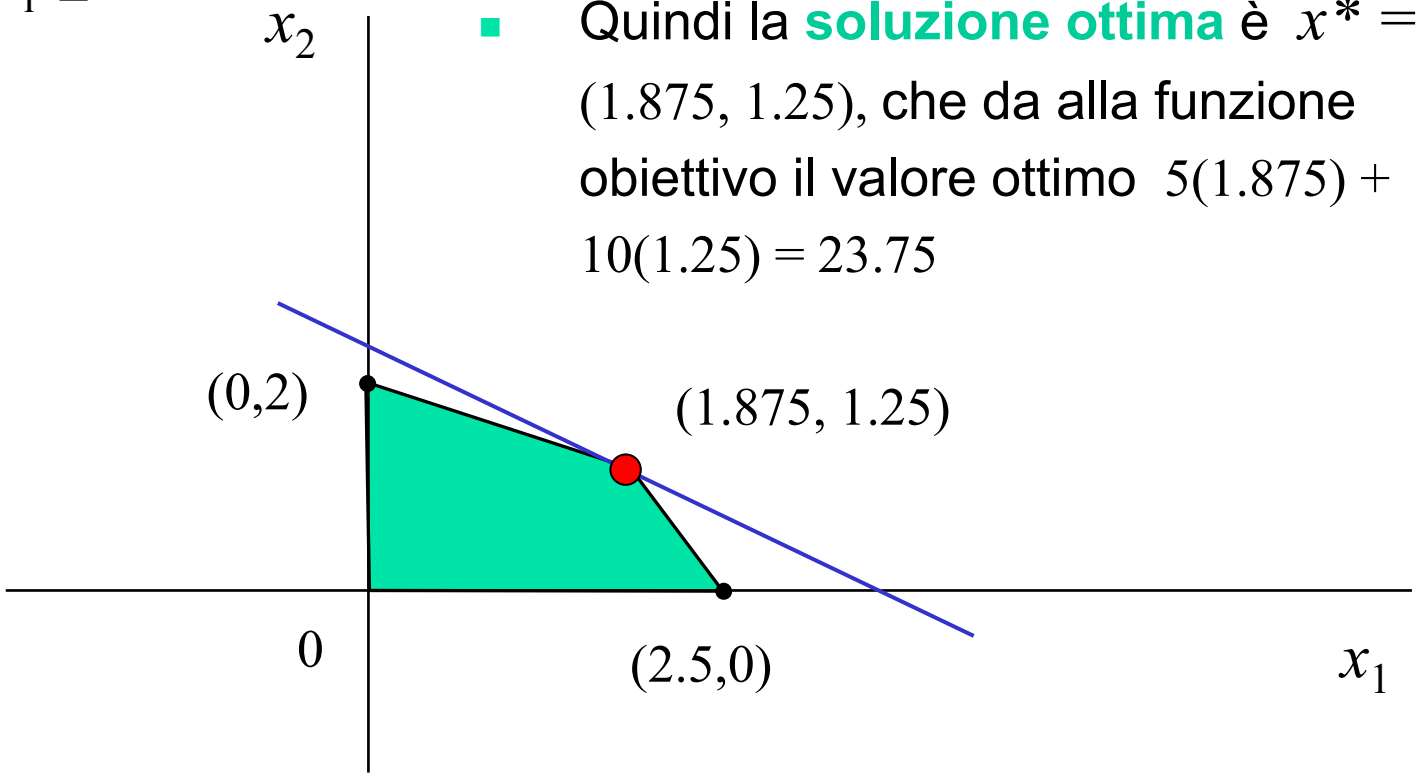
# Geometria della prog. lineare

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 10\,x_2 \\ 10\,x_1 + 5\,x_2 \le 25 \\ 4\,x_1 + 10\,x_2 \le 20 \\ x_1 + 1.5\,x_2 \le 4.5 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

- Le coordinate del punto rosso sono calcolabili come **intersezione** tra due rette, se calcoliamo otteniamo

  $x_1 = 1.875, \quad x_2 = 1.25$

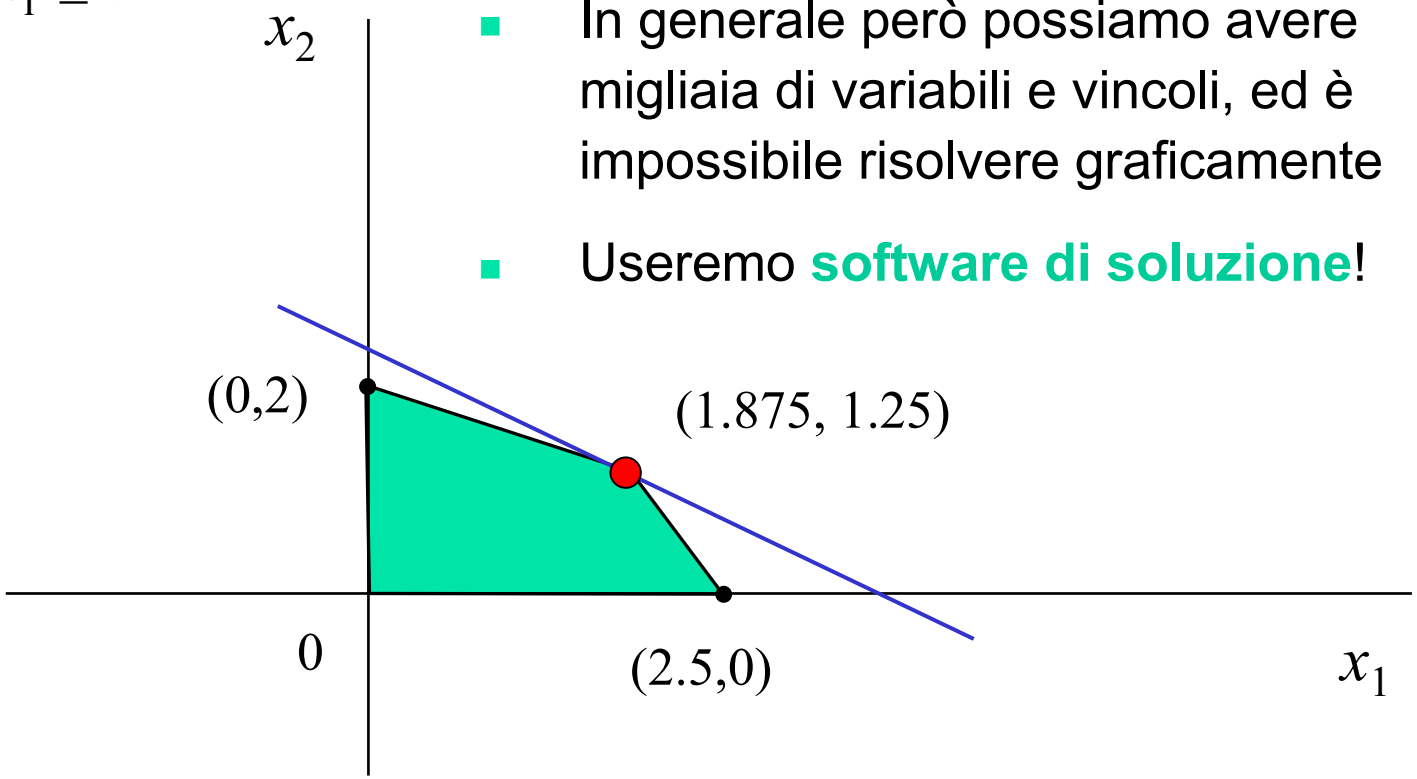
- Quindi la **soluzione ottima** è $x^* = (1.875, 1.25)$, che da alla funzione obiettivo il valore ottimo $5(1.875) + 10(1.25) = 23.75$

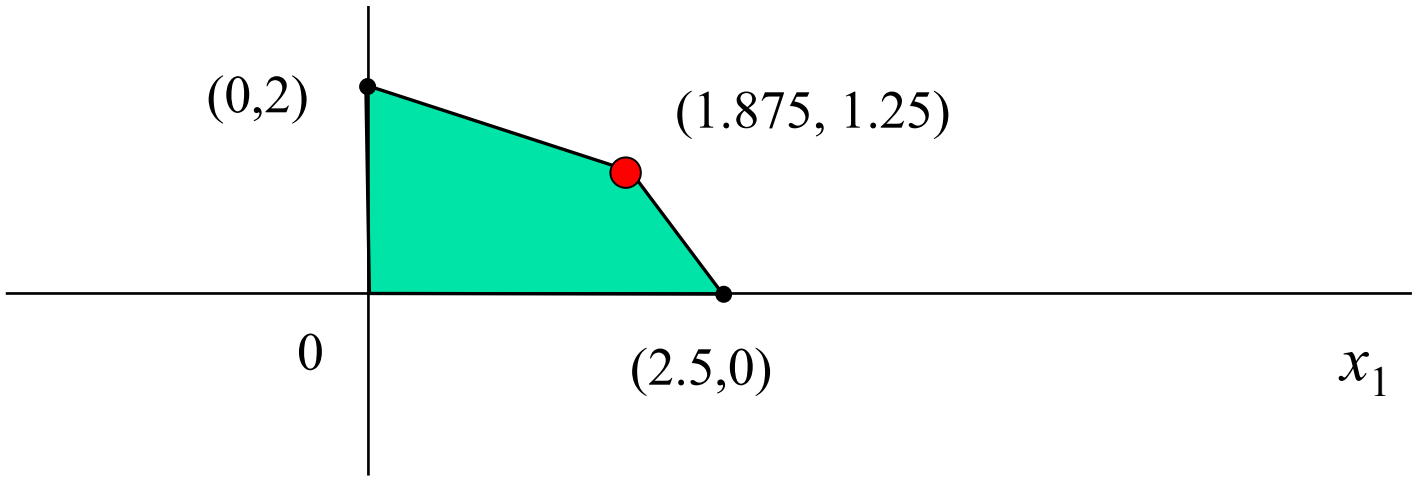


# Geometria della prog. lineare

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 10\,x_2 \\ 10\,x_1 + 5\,x_2 \le 25 \\ 4\,x_1 + 10\,x_2 \le 20 \\ x_1 + 1.5\,x_2 \le 4.5 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

- Questo problema è stato risolto **graficamente**
- È stato possibile perchè ha solo 2 variabili ed è molto semplice
- In generale però possiamo avere migliaia di variabili e vincoli, ed è impossibile risolvere graficamente
- Useremo **software di soluzione**!



# Geometria della prog. lineare

- Quando il problema non è inammissibile o illimitato, esiste **una** (o più di una) **soluzione ottima**
- Date che l'obiettivo è lineare, le soluzioni ottime devo essere sulla frontiera del poliedro, non all'interno
- Se l'insieme ammissibile ha **vertici** (la maggior parte dei casi) e l problema ha soluzione ottima, allora esiste almeno un **vertice ottimo**
- Quindi, ci basta cercare **un vertice ottimo** (le altre soluzioni ottime, se ci sono, non possono comunque essere meglio, per definizione)