Esonero di FONDAMENTI di RICERCA OPERATIVA

16 Feb. 2004

Nome e Cognome:

1. Un'industria metallurgica dispone di due impianti per la produzione di chiodi e molle. La tabella che segue riporta per ciascuno dei due impianti (A e B) le capacità produttive giornaliere (in Kg) dei macchinari in dotazione degli impianti e i prezzi di vendita (in euro/Kg) dei due prodotti finiti.

Impianto	A		B	
Prodotto	Molle	Chiodi	Molle	Chiodi
Capacità	400	650	355	610
Prezzo	0,20	0,30	0,20	0,30

a) (3 punti) I macchinari degli impianti vengono fatti funzionare da una squadra di operai (una squadra diversa per ogni impianto) e sono necessari 75 minuti di lavoro per produrre 100 Kg. di molle o chiodi; in ogni impianto la squadra dell' impianto non può lavorare per più di 8 ore al giorno.
Supponendo che l'industria disponga giornalmente di soli 1200 Kg di ferro e che si vogliano produrre almeno 500 Kg di chiodi e 500 Kg di molle, formulare un problema di PL che consenta di programmare la produzione in modo da massimizzare il profitto giornaliero complessivo.

b) (2 punti) Modificare la formulazione precedente in modo da garantire che nell'impianto A vengono prodotti o chiodi o molle ma non tutti e due i prodotti contemporaneamente.

Soluzione a) Si introducono le seguenti variabili. Conviene calcolare le quantità in quintali.

x_{MA} = quantità in quintali di molle prodotta giornalmente nello stabilimento A
x_{CA} = quantità in quintali di chiodi prodotta giornalmente nello stabilimento A
x_{MB} = quantità in quintali di molle prodotta giornalmente nello stabilimento B
x_{CB} = quantità in quintali di chiodi prodotta giornalmente nello stabilimento B

Le 8 ore lavorative corrispondono a 480 minuti. I vincoli sulla durata del lavoro nei due impianti sono quindi:

$$75\,(x_{MA} + x_{CA}) \leq 480$$
$$75\,(x_{MB} + x_{CB}) \leq 480$$

Il vincolo sulla quantità di ferro disponibile è:

$$x_{MA} + x_{CA} + x_{MB} + x_{CB} \leq 12$$

Il vincolo sulla produzione minima richiesta è:

$$x_{MA} + x_{MB} \geq 5$$
$$x_{CA} + x_{CB} \geq 5$$

I vincoli sulle capacità produttive giornaliere sono:

$$x_{MA} \leq 4 \qquad x_{CA} \leq 6.5 \qquad x_{MB} \leq 3.55 \qquad x_{CB} \leq 6.1$$

La massimizzazione del profitto giornaliero complessivo corrisponde a:

$$\max 20(x_{MA} + x_{MB}) + 30(x_{CA} + x_{CB})$$

Il modello lineare complessivo è quindi:

$$\begin{cases} \max 20\,(x_{MA} + x_{MB}) + 30\,(x_{CA} + x_{CB}) \\ \\ 75\,(x_{MA} + x_{CA}) \leq 480 \\ 75\,(x_{MB} + x_{CB}) \leq 480 \\ x_{MA} + x_{CA} + x_{MB} + x_{CB} \leq 12 \\ x_{MA} + x_{MB} \geq 5 \\ x_{CA} + x_{CB} \geq 5 \\ x_{MA} \leq 4 \quad x_{CA} \leq 6.5 \quad x_{MB} \leq 3.55 \quad x_{CB} \leq 6.1 \\ \\ x_{MA}, x_{CA}, x_{MB}, x_{CB} \geq 0 \\ x_{MA}, x_{CA}, x_{MB}, x_{CB} \in R \end{cases}$$

Soluzione b) Dato che le variabili del problema sono reali, per esprimere la mutua esclusività occorre introdurre una variabile binaria

$$y = \begin{cases} 1 & \text{se nell'impianto A vengono prodotte solo molle} \\ 0 & \text{se nell'impianto A vengono prodotti solo chiodi} \end{cases}$$

i vincoli da aggiungere al modello sono allora, con M costante più grande di ogni possibile valore di x_{MA} e x_{CA} :

$$x_{MA} \leq My \qquad\qquad x_{CA} \leq M(1-y)$$

2. Si considerino i seguenti possibili progetti di investimento. Flussi di cassa corrispondenti a spese sono indicati con segno positivo, flussi di cassa corrispondenti a ricavi sono indicati con segno negativo.

Progetti	Periodo 1	Periodo 2	Periodo 3	Periodo 4	Periodo 5	Periodo 6
progetto 1	30	40	50	20	-80	-100
progetto 2	90	-90	150	-150	0	0
progetto 3	50	50	50	0	0	-200
progetto 4	55	-25	-25	-25	-25	30
progetto 5	25	110	-50	50	-60	-60
Budget	120	100	80	70	30	0

a) (3 punti) Scrivere un modello di programmazione lineare intera per risolvere il problema di pianificazione degli investimenti (capital budgeting) in modo da massimizzare i guadagni rispettando il budget. Il progetto 1 può essere attivato fino a 5 volte, gli altri al massimo una volta.

b) (3 punti) Modificare il modello trovato in modo da rispettare le seguenti condizioni:

- almeno uno tra i progetti 4 e 5 deve essere attivato
- i progetti 2 e 3 sono alternativi: al più uno può essere attivato
- il progetto 5 può essere attivato solo se è stato attivato il progetto 1 (almeno una volta)
- il progetto 3 può essere attivato solo se sono stati attivati i progetti 4 e 5 contemporaneamente

Soluzione a) Per i progetti attivabili al massimo una volta si introducono le seguenti variabili binarie:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se il progetto i-esimo è attivato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per il progetto 1, attivabile fino a 5 volte, conviene introdurre un variabile intera $x_1 \in \{0,1,2,3,4,5\}$.
Il guadagno ottenibile per ogni progetto è dato dalla somma dei ricavi meno la somma delle spese:

progetto 1:	180 – 140 = 40
progetto 2:	240 – 240 = 0
progetto 3:	200 – 150 = 50
progetto 4:	100 – 85 = 15
progetto 5:	170 – 185 = -15

La funzione obiettivo è quindi:

$$\max\ 40x_1 + 50x_3 + 15x_4 - 15x_5$$

mentre i vincoli del rispetto di budget sono:

$$\begin{array}{rrrrrcr}
30x_1 & +90x_2 & +50x_3 & +55x_4 & +25x_5 & \le & 120 \\
40x_1 & -90x_2 & +50x_3 & -25x_4 & +110x_5 & \le & 100 \\
50x_1 & +150x_2 & +50x_3 & -25x_4 & -50x_5 & \le & 80 \\
20x_1 & -150x_2 & & -25x_4 & +50x_5 & \le & 70 \\
-80x_1 & & & -25x_4 & -60x_5 & \le & 30 \\
-100x_1 & & -200x_3 & +30x_4 & -60x_5 & \le & 0
\end{array}$$

Il modello complessivo di programmazione lineare intera è:

$$\begin{cases}
\max\ 40x_1 + 50x_3 + 15x_4 - 15x_5 \\
\\
\begin{array}{rrrrrcr}
30x_1 & +90x_2 & +50x_3 & +55x_4 & +25x_5 & \le & 120 \\
40x_1 & -90x_2 & +50x_3 & -25x_4 & +110x_5 & \le & 100 \\
50x_1 & +150x_2 & +50x_3 & -25x_4 & -50x_5 & \le & 80 \\
20x_1 & -150x_2 & & -25x_4 & +50x_5 & \le & 70 \\
-80x_1 & & & -25x_4 & -60x_5 & \le & 30 \\
-100x_1 & & -200x_3 & +30x_4 & -60x_5 & \le & 0
\end{array} \\
\\
x_1 \in \{0,1,2,3,4,5\} \\
x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\}
\end{cases}$$

Soluzione b) Dato che le variabili sono intere (e non possono quindi assumere valori frazionari), vincoli di natura logica sono esprimibile direttamente senza introdurre ulteriori variabili binarie.

- almeno uno tra i progetti 4 e 5 deve essere attivato: $x_4 + x_5 \ge 1$
- i progetti 2 e 3 sono alternativi: al più uno può essere attivato: $x_2 + x_3 \le 1$
- il progetto 5 può essere attivato solo se è stato attivato il progetto 1: $x_5 \le x_1$
- il progetto 3 può essere attivato solo se
  sono stati attivati i progetti 4 e 5 contemporaneamente : $x_3 \le (x_4 + x_5)/2$

3. (5 punti) Una azienda è in grado di produrre 4 prodotti {p1,p2,p3,p4} che possono essere venduti sul mercato ai prezzi indicati nella seguente tabelle. La produzione di tali prodotti necessita inoltre del quantitativo di materia prima indicato nella seguente tabella.

	p1	p2	p3	p4
Prezzo (in Euro al Kg)	3	2	1	2
Materia Prima (in Kg per Kg di prodotto)	2	1	1	2

L'obiettivo dell'azienda è la massimizzazione del profitto. La quantità di materia prima disponibile giornalmente è 5 Kg. La pianificazione della produzione giornaliera è perciò rappresentabile col seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \le 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Determinare, usando la teoria della dualità, quale scelta produttiva produce il massimo profitto, ed il prezzo massimo fino al quale risulta conveniente acquistare un ulteriore Kg di materia prima.

Soluzione Il primo passo consiste nella costruzione del duale, che avrà una variabile y e quattro vincoli:

$$\begin{cases} \min 5y \\ 2y \ge 3 \\ y \ge 2 \\ y \ge 1 \\ 2y \ge 2 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Questo problema è immediatamente risolubile a occhio: per rispettare i vincoli y deve valere almeno 2, e dato che il problema è di minimo, $y=2$ è la soluzione ottima.
A questo punto, per trovare la soluzione ottima primale, occorre scrivere le condizioni di complementarità:

$x_1 (2y - 3) = 0$ da cui, dato che $y=2$, deve essere $x_1 = 0$

$x_2 (y - 2) = 0$ che è già verificata ponendo $y=2$. Quindi nulla viene imposto su x_2

$x_3 (y - 1) = 0$ da cui, dato che $y=2$, deve essere $x_3 = 0$

$x_4 (2y - 2) = 0$ da cui, dato che $y=2$, deve essere $x_4 = 0$

$y (5 - 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4) = 0$ da cui, dato che $y=2$, deve essere $5 - 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$

Sostituendo nell'ultima equazione i valori trovati per x_1, x_3, x_4 otteniamo $x_2 = 5$. Quindi la soluzione ottima del primale, ovvero la scelta produttiva che produce il massimo profitto, è $\{p_1 = 0, p_2 = 5, p_3 = 0, p_4 = 0\}$. In altre parole, conviene usare tutta la materia prima per produrre solo prodotto p_2

Acquistando un ulteriore Kg di materia prima, e quindi incrementando di una unità il termine noto del problema primale (da 5 a 6), è possibile ottenere un aumento del valore della funzione obiettivo pari al valore ottimo della variabile duale (2). Questo vuol dire un aumento del profitto di 2 Euro.
Il prezzo massimo fino al quale risulta conveniente acquistare un ulteriore Kg di materia prima è allora l'importo immediatamente inferiore a 2 Euro, ad esempio 1.99 Euro. Si noti che acquistando invece tale ulteriore Kg per 2 Euro, dato che l'aumento di profitto ottenuto è anch'esso di 2 Euro, non vi è né convenienza né perdita.