Algoritmo del Simplesso

Renato Bruni
bruni@dis.uniroma1.it
Università di Roma "Sapienza"

Corso di Ricerca Operativa, Corso di Laurea Ingegneria dell'Informazione

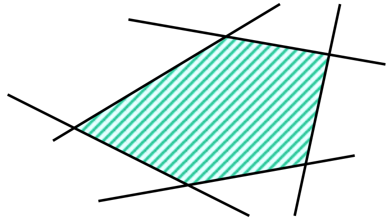
Vertici e Punti Estremi di un Poliedro

Un **poliedro** è intersezione di un numero finito di semispazi chiusi e iperpiani (quindi i vincoli di un problema di Programmazione Lineare definiscono un poliedro)

Algebricamente

$$P = \begin{cases} Ax \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{smallmatrix} b \\ x \in \mathrm{R}^n \end{cases}$$

Geometricamente



- $x \in P$ è **punto estremo** di P sse non esistono $x' \in P$ e $x'' \in P$ con $x \neq x'$, $x \neq x''$, $x' \neq x''$, tali che x appartiene al segmento di estremi x' e x''
- $x \in P$ è **vertice** di P sse esiste $c \in \mathrm{R}^n$ tale che $c^T x < c^T y$ per tutti i punti $y \in P$ diversi da x (cioè tutto P si trova da un lato di un iperpiano che passa per x)

In un poliedro, vertici e punti estremi sono concetti **equivalenti**

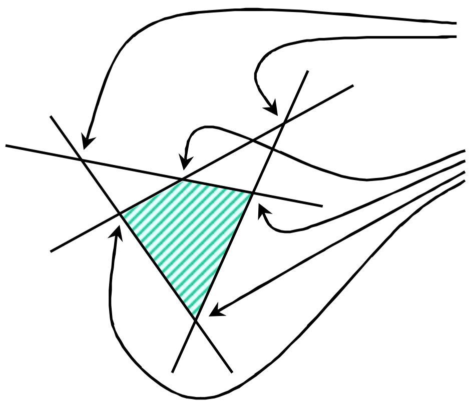
Ma queste definizioni sono geometriche, ce ne serve una algebrica.

Soluzioni di Base Ammissibili

Intuitivamente, un vertice è intersezione di più vincoli soddisfatti all'uguaglianza (cioè **attivi**). Tali vincoli devono individuare un'unica soluzione, e un sistema in n incognite ha soluzione unica sse ha n equazioni indipendenti

- x è **soluzione di base** di P sse rende attivi n vincoli indipendenti (cioè il rango della matrice dei vincoli attivi è n, e quindi i coefficienti di tali vincoli formano una base per R^n) – se inoltre x è ammissibile (cioè soddisfa tutti i vincoli) è soluzione di base **ammissibile** (S.B.A.)

Geometricamente



soluzioni di base non ammissibili

soluzioni di base ammissibili (=vertici, =punti estremi)

In un vertice il rango della matrice dei vincoli attivi è n

Forma Standard

- Per applicare l'algoritmo del simplesso il generico problema di PL deve essere messo in **forma standard**

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Qualsiasi PL si può mettere in tale forma. Esempio:

$$\begin{cases} \min 2x - y \\ 2x + 3y \geq 7 \\ 5x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min 2x - y \\ 2x + 3y - u = 7 \\ 5x + y + w = 3 \\ x \geq 0,\ u \geq 0,\ w \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min 2x - (y^+ - y^-) \\ 2x + 3(y^+ - y^-) - u = 7 \\ 5x + (y^+ - y^-) + w = 3 \\ x \geq 0,\ u \geq 0,\ w \geq 0 \\ y^+ \geq 0,\ y^- \geq 0 \end{cases}$$

per i vincoli non di uguale introduco u variabile **surplus**, w variabile di **slack**,

per la variabile **libera** y introduco y^+ e y^- **vincolate in segno**,

Vertici della Forma Standard

Nel poliedro in **forma standard** $P=\{x \in \mathrm{R}^n, Ax=b, x \geq 0\}$, dove supponiamo P non vuoto, A mxn con $n \geq m$ e $rango(A) = m$

- x è vertice di P sse le colonne di A relative a componenti positive sono linearmente **indipendenti** (quindi formano una base B per lo spazio delle colonne di A)

Infatti in un vertice il rango della matrice dei vincoli attivi deve essere n. Poichè le componenti nulle di x (siano h) corrispondono a vincoli ≥ 0 attivi, e devono esserci altri n-h vincoli attivi indipendenti (quindi di uguale). Inoltre, dato che le colonne indipendenti di A sono al più m, ci sono **almeno** altri n-m vincoli di ≥ 0 attivi, cioè almeno n-m componenti nulle.

Esempio 1

Consideriamo questo poliedro in **forma standard** con $n=4$ e $m=2$

Un vertice avrà almeno n-$m=2$ zeri

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ x \geq 0_4 \end{cases}$$

La soluzione $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile e le colonne di A relative a componenti positive sono la I e la II, cioè $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ che sono indipend. quindi è vertice

La soluzione $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è ammissibile e le colonne di A relative a componenti positive sono solo la IV, cioè $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ che è indipendente quindi è vertice

Partizione in Base e fuori Base

- Data una base B, possiamo **riscrivere** in problema distinguendo

$$\begin{cases} \min\ c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ B x_B + N x_N = b \quad \rightarrow \quad x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ x_B \geq 0_m \quad x_N \geq 0_{n-m} \end{cases}$$

- e possiamo individuare una soluzione di base

$x_B = B^{-1}b$ (se $\geq 0_m$ è ammissibile, e quindi è S.B.A. = vertice)
$x_N = 0_{n-m}$

- Le S.B.A. sono al più $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$, che sono tutti i gruppi di m colonne di A
- Da essi dobbiamo escludere: quelli che non sono una base e quelli che corrispondono a una soluzione di base non ammissibile. Inoltre, più basi possono dare una stessa S.B.A. se $B^{-1}b$ contiene zeri (sol. degenere)

Esempio 2

Consideriamo questo poliedro in **forma standard**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ \qquad\; x_2 + x_3 \qquad\;\; = 1 \\ x \geq 0_4 \end{cases}$$

Consideriamo tutte le $\binom{4}{2} = 6$ possibili coppie di colonne ($rango(A) = m = 2$ quindi le basi di A sono di 2 colonne) e vediamo se sono una base, quale soluzione di base forniscono, se tale soluzione è ammissibile, se è degenere

indici colonne	base	soluzione di base	ammissibile	degenere
{1,2}	si	(-1 1 0 0)	no	-
{1,3}	si	(0 0 1 0)	si	si
{1,4}	no	-	-	-
{2,3}	si	(0 0 1 0)	si	si
{2,4}	si	(0 1 0 1)	si	no
{3,4}	si	(0 0 1 0)	si	si

$$x_B = B^{-1}b$$
$$x_N = 0_{n-m}$$

Problema Ridotto

- Abbiamo un problema non vuoto, con $rango(A) = m$ e abbiamo B.

Poichè $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$, lo scriviamo in forma canonica rispetto a B:

$$\begin{cases} \min c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \\ x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_B \geq 0_m \quad x_N \geq 0_{n-m} \end{cases}$$

- Definendo i **costi ridotti** $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N$ ed eliminando x_B ho il problema ridotto, che ha $n\text{-}m$ variabili

$$\begin{cases} \min c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \\ B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \geq 0_m \\ x_N \geq 0_{n-m} \end{cases}$$

Test Ottimalità e Illimitatezza

- Se i costi ridotti $\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B$ sono tutti non negativi, la S.B.A. corrispondente a B è **ottima**, e se sono tutti positivi è ottimo unico
- Se invece esiste un $\gamma_i < 0$ e la colonna i-esima di $B^{-1}N$ è tutta non positiva, allora il problema è **illimitato** inferiormente
- Questi test sono solo sufficienti, non necessari!
- Se i due test falliscono, cerchiamo una **nuova** S.B.A. migliore (o almeno non peggiore) della precedente facendo entrare in base una componente che non vi era ed uscire dalla base una che vi era, finché non è soddisfatto uno dei due test (ciò si chiama in realtà **Fase 2**)
- Indichiamo con π la matrice $B^{-1}N$, e le sue colonne con $(\pi_1 \dots \pi_{n-m})$

Cambio di Base

- Troviamo l'indice $h \in \{1, \ldots, n\text{-}m\}$ che **entra** in base in corrispondenza al costo ridotto più negativo $\gamma_h < 0$
- Troviamo l'indice $k \in \{1, \ldots, m\}$ che **esce** dalla base in corrispondenza al minimo del rapporto

$$\min_{\substack{i=1\ldots m \\ (\pi_h)_i > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\}$$

vari elementi della h-esima colonna di $B^{-1}N$

- Osservazione: se ho S.B.A. degenere, cambiando base potrei riottenere la stessa soluzione (iterazione degenere)
- Se non ripeto mai la stessa base, convergo sicuramente. Altrimenti potrei ciclare e serve una regola anticiclaggio. Es.: scelgo sempre, tra quelli adatti, gli indici minori

Operazione di Pivot

- Per calcolare i nuovi $B^{-1}N$ e $B^{-1}b$ cerchiamo di ottenerli dai precedenti attraverso una matrice T data dall'identità tranne la k-esima colonna che è ottenuta dagli elementi della h-esima colonna di $B^{-1}b$

- Per **calcolare** i nuovi $B^{-1}N$ e $B^{-1}b$ nella pratica costruiamo

$$M = (\pi_h \mid \pi_1 \ldots \quad \ldots \pi_{n-m} \mid B^{-1}b\,)$$

(i π_i sono le colonne di $B^{-1}N$) ma come h-esimo metto e_k (colonna k-esima dell'identità)

- Poi divido la k-esima riga per $(\pi_h)_k$ (l'elemento che si trova all'inizio di quella riga) e il risultato lo sommo, moltiplicato per -$(\pi_h)_i$ (l'elemento che si trova all'inizio di ogni altra riga i) ad ogni altra riga i (è come se avessi premoltiplicato per T), ottenendo

$$(e_k \mid \underbrace{B^{-1}N} \mid \underbrace{B^{-1}b}\,)$$

quelli nuovi!

Esempio 3 parte I

Consideriamo questo poliedro in **forma standard**

con n=6 e m=3

$$\begin{cases} \min\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ x \geq 0_6 \end{cases}$$

Fortunatamente le ultime tre colonne di A formano già una base, e allora:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad x_{B_0} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad x_{N_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_0^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B_0^{-1}N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolo i costi ridotti $\gamma_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Test ottimo? Non verificato perché non tutti $\gamma \geq 0$

Test illimitato? Non verificato perché le colonne di π relative ai γ negativi non sono non positive

Esempio 3 parte II

Serve allora **cambio di base**. La colonna col costo ridotto minore entra in base, quindi $h=1$

Quella che esce dalla base è invece quella che da il $\min\limits_{\substack{i=1\ldots3 \\ (\pi_1)_i>0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \left\{ \frac{3}{1} \; \frac{2}{2} \; \frac{1}{1} \right\}$ quindi $k=2$

Allora scambio la II in base con la I fuori base

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad x_{B_1} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Per calcolare $B_1^{-1}N_1$ e $B_1^{-1}b$ formo la matrice M

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1 & e_2 & \pi_2 & \pi_3 & B_0^{-1}b \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Divido la seconda riga per 2 (cioè $(\pi_1)_2$) e poi sommo il risultato moltiplicato -1 (cioè $-(\pi_1)_1$) alla prima riga e moltiplicato -1 (cioè $-(\pi_1)_3$) alla terza riga

$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} 0 & -1/2 & 5/2 & 11/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & 3/2 & 0 \end{array}\right]$$
$$\qquad\qquad B_1^{-1}N_1 \qquad B_1^{-1}b$$

Esempio 3 parte III

Calcolo i costi ridotti $\gamma_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -5/2 & -7/2 \end{bmatrix}$

Test ottimo? Non verificato perché non tutti $\gamma \geq 0$

Test illimitato? Non verificato perché le colonne di π relative ai γ negativi non sono non positive

Serve allora **cambio di base**. La colonna col costo ridotto minore entra in base, quindi $h=3$

Quella che esce dalla base è quella per cui ho il $\min\limits_{\substack{i=1\ldots3 \\ (\pi_3)_i > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_3)_i} \right\} = \left\{ \frac{2}{11/2} \; \frac{0}{3/2} \right\}$ quindi $k=3$

Allora scambio la III in base con la III fuori base

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad x_{B_2} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_{N_2} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Esempio 3 parte IV

Per calcolare $B_2^{-1}N_2$ e $B_2^{-1}b$ formo la matrice M

$$\begin{array}{ccccc} \pi_3 & \pi_1 & \pi_2 & e_3 & B_1^{-1}b \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 11/2 & -1/2 & 5/2 & 0 & 2 \\ -5/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & 5/2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Divido la terza riga per $3/2$ (cioè $(\pi_3)_3$) e poi sommo il risultato moltiplicato $-11/2$ (cioè $-(\pi_3)_1$) alla prima riga e moltiplicato $-5/2$ (cioè $-(\pi_3)_2$) alla terza riga

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 4/3 & -20/3 & -11/3 & 2 \\ 0 & -1/3 & 11/3 & 5/3 & 1 \\ 1 & -1/3 & 5/3 & 2/3 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{cc} B_2^{-1}N_1 & B_2^{-1}b \end{array}$$

Calcolo i costi ridotti $\gamma_2^T = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \left(\begin{array}{ccc} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{ccc} 1/3 & 10/3 & 7/2 \end{array}\right]$

Test ottimo? **Finalmente verificato** perché tutti $\gamma \geq 0$

Allora calcolo la soluzione di base: $B_2^{-1}b$ da i valori ottimi per le variabili in base (x_4, x_1, x_3), mentre quelle fuori (x_5, x_2, x_6) sono tutte 0

$$x^* = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

Fase 1 del Simplesso

- Per vedere se il PL è ammissibile e se $rango(A) = m$ (o altrimenti eliminare i vincoli ridondanti) e trovare la prima base B e quindi $B^{-1}b$ e $B^{-1}N$
- Ci sono più modi di farlo, uso quello delle **variabili artificiali**. Il problema è

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \quad \text{con } b \geq 0_m \text{ altrimenti cambio segno} \\ x \geq 0_n \end{cases}$$

- Introduco $\alpha_1 \dots \alpha_m$ (o meno se ho già delle colonne dell'identità) e ho il problema ausiliario che ha base ammissibile I_m con S.B.A. $\begin{pmatrix} \alpha = b \\ x = 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \min \Sigma\, \alpha_i \quad \text{e il problema di partenza è ammissibile sse } \alpha^* = 0 \\ Ax + I_m \alpha = b \\ \alpha \geq 0_m \;\; x \geq 0_n \end{cases}$$

Soluzione del Problema Ausiliario

- Lavorando come nella Fase 2 già vista (tranne test illimitatezza) sul problema ausiliario trovo la sua soluzione ottima $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$
- Se $\Sigma\, \alpha_i > 0$ allora il problema originario è inammissibile, stop. Altrimenti:
- Se nessuna variabile artificiale è ancora in base, ho una base fatta da sole colonne del problema originario e posso partire con **Fase 2** su esso
- Se ho ancora variabili artificiali in base, le tolgo tutte:
  - o riesco ad eliminarle tramite scambi degeneri (rimane la stessa soluzione) e cancellarle
  - oppure corrispondono a righe di $B^{-1}N$ nulle, cioè vincoli ridondanti del problema originale, che quindi posso cancellare insieme alla corrispondenti variabili artificiali

Algoritmo Complessivo

- A questo punto, algoritmo del **Simplesso due fasi** è fatto da Fase 1 seguita da Fase 2
- Se il problema è inammissibile lo scopro in Fase 1
- Dopodichè uso Fase 2 fino a verificare un test di ottimalità o di illimitatezza (prima o poi converge: se mi accorgo di ciclare proseguo introducendo una regola anticiclaggio)
- Teoricamente si direbbe esponenziale ma **buon comportamento** pratico, molto usato per problemi reali
- Veloce perché effettua tutte operazioni computazionalmente semplici – ovviamente dipende da quanti vertici occorre visitare
- Esistono altre varianti dell'algoritmo: Simplesso tabellare, etc.