CONTROLLI AUTOMATICI I modulo
Prova Intermedia di Autovalutazione – Aprile 2000
Traccia di Soluzione

Problema 1

Le equazioni del sistema sono

$$\begin{aligned} J\ddot{\phi}_1 &= \tau - K(\phi_1 - \phi_2) \\ J\ddot{\phi}_2 &= Mgr - K(\phi_2 - \phi_1) - D\dot{\phi}_2 \end{aligned}$$

con ϕ_1, ϕ_2 positive nello stesso verso di di τ e tali che per $\phi_1 = \phi_2$ la molla è indeformata. Ponendo

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \phi_2 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} \qquad u = \tau \qquad d = Mgr \qquad y = \phi_2$$

si ottiene la seguente rappresentazione lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K}{J}x_1 + \frac{K}{J}x_3 + \frac{1}{J}u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{K}{J}x_1 - \frac{K}{J}x_3 - \frac{D}{J}x_4 + d \\ y &= x_3 \end{aligned}$$

in cui $d = Mgr$ è da considerarsi un disturbo costante.

Problema 2

Gli autovalori del sistema sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 2$, con i corrispondenti autovettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Posto $x_0 = \sum_{i=1}^{3} c_i v_i$, ed essendo $Cv_1 = 0$, l'uscita in evoluzione libera è data da

$$y(t) = Ce^{At}x_0 = \sum_{i=1}^{3} Ce^{\lambda_i t}c_i v_i = e^{-t}c_2 Cv_2 + e^{2t}c_3 Cv_3$$

In conclusione, y si mantiene limitata se e solo se $c_3 = 0$, cioè a partire da stati iniziali

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{con } c_1, c_2 \text{ arbitrari}$$

Problema 3

L'uscita è

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(y(s)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+a+jb} + \frac{B^*}{s+a-jb}\right)$$

in cui si trova $a = 1.5$, $b = \sqrt{27}/2$ e, attraverso le formule dei residui, $A = 1/9$ e $B = c + jd = -1/18 - j7\sqrt{3}/54$. Si ha quindi

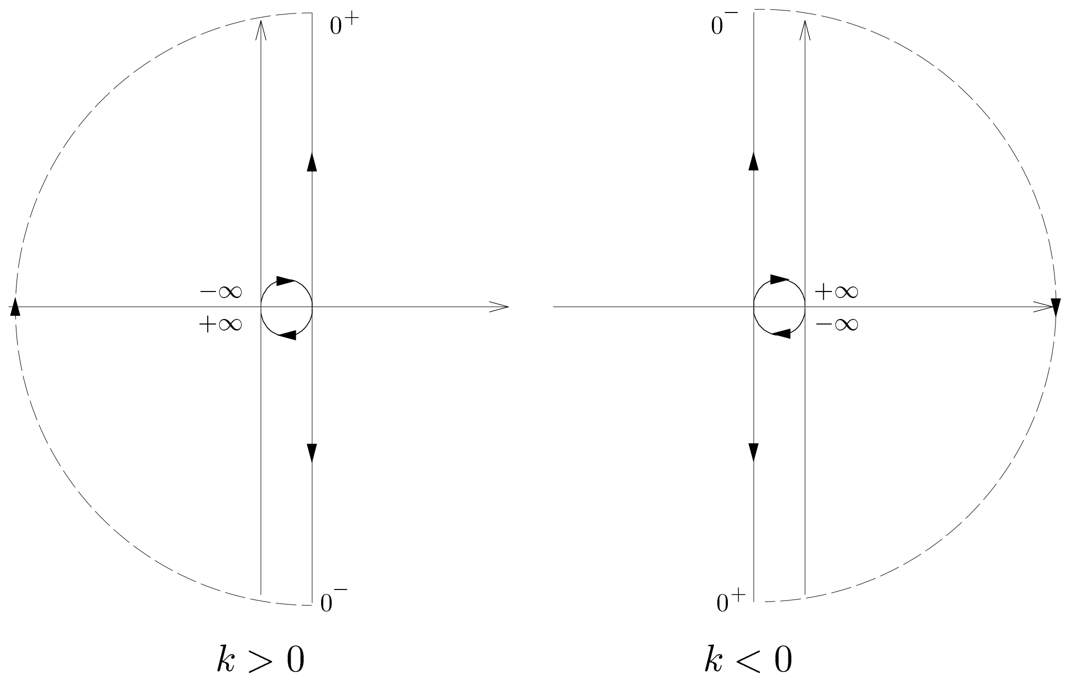
$$y(t) = A\delta_{-1}(t) + e^{-at}\left(Be^{-jbt} + B^*e^{jbt}\right)\delta_{-1}(t) = A\delta_{-1}(t) + 2e^{-at}(c\cos bt + d\sin bt)\delta_{-1}(t)$$

in cui si è utilizzata la formula di Eulero. Il valore dell'uscita per $t = 0$ e $t \to \infty$ si può ricavare da quest'ultima espressione oppure utilizzando i teoremi del valore iniziale e finale. Si trova

$$y(0) = 0 \qquad\qquad y(\infty) = 1/9.$$

Problema 4

Si hanno i seguenti diagrammi qualitativi di Nyquist.



Se ne deduce che il sistema retroazionato è instabile per $k > 0$, è stabile asintoticamente per $k^* < k < 0$, ed è ancora instabile per $k < k^*$. Essendo inoltre il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso pari a

$$D_W(s) = N_P(s) + D_P(s) = s^2 + (a+k)s - ak$$

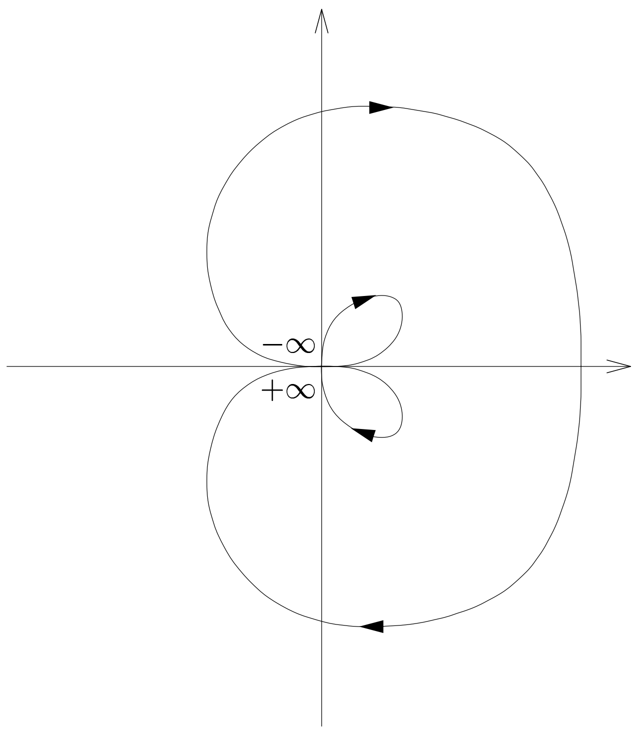
si trova immediatamente $k^* = -a$. Per $k = 0$ e $k = -a$, il sistema retroazionato è semplicemente stabile.

Problema 5

L'ispezione del diagramma di Bode ricavato sperimentalmente suggerisce

$$P(s) = \frac{s^2 + 100}{(s+1)^2(s+100)}$$

Il diagramma di Nyquist qualitativo è il seguente.



Infine, la risposta a regime richiesta vale

$$y_r(t) = 2P(0) = 2$$