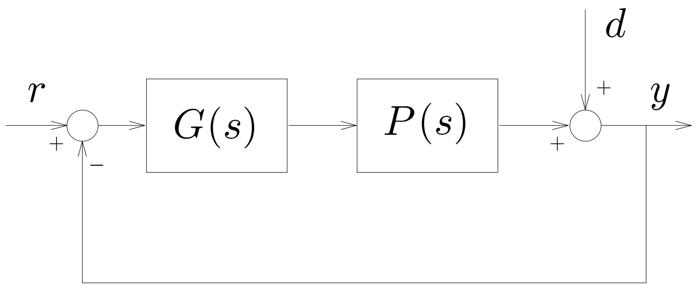
Problema 1

Il sistema di controllo avrà la struttura mostrata in figura.



La prima specifica equivale a richiedere un sistema di tipo ≥ 0, ed è quindi automaticamente soddisfatta se il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente. Per quanto riguarda la seconda specifica, si osservi innanzitutto che per $\omega = 0$ il disturbo è costante; per avere astatismo in questo caso è dunque necessario introdurre nella funzione di trasferimento del controllore $G(s)$ un polo nell'origine. Si pone allora

$$G(s) = \frac{K_G}{s} R(s)$$

Venendo alla seconda parte della seconda specifica, essa richiede che si abbia

$$|W_d(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + F(j\omega)} \right| \leq 0.1 \qquad \omega \in [0, 1]$$

dove $F(s) = G(s)P(s)$ è la funzione di trasferimento del ramo diretto. Nella banda suddetta, si deve dunque avere $|1 + F(j\omega)| \geq 10$. Essendo $|1 + F(j\omega)| \geq |F(j\omega)| - 1$, la precedente disequazione è certamente soddisfatta se

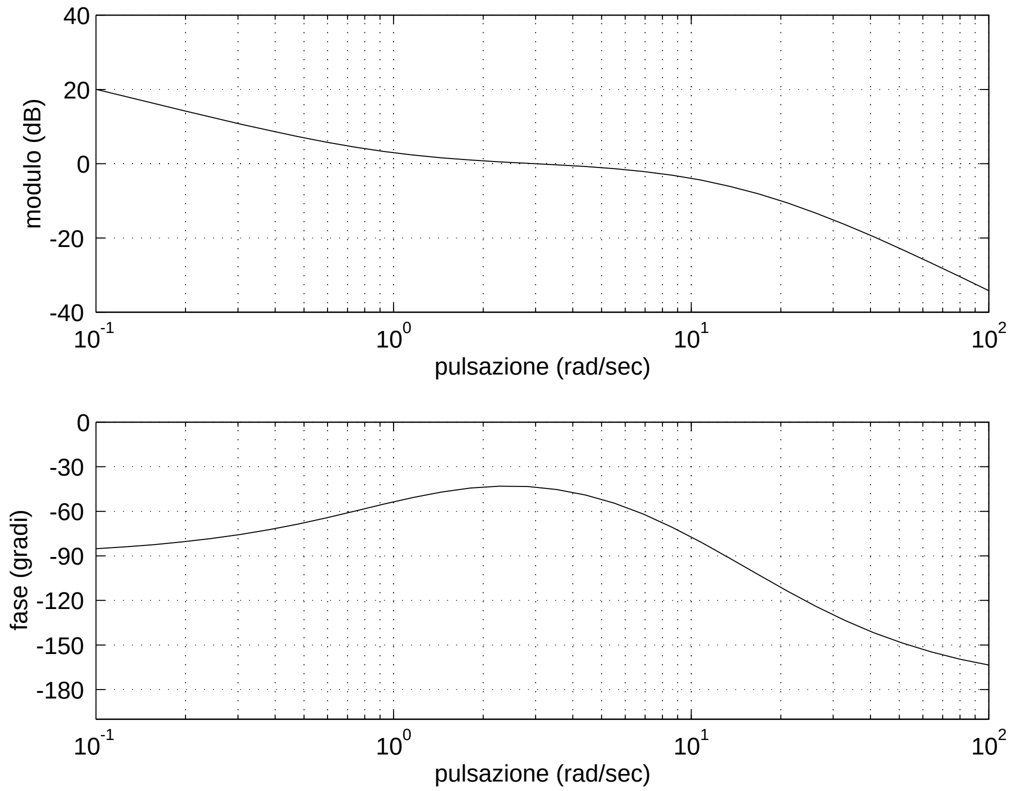
$$|F(j\omega)| - 1 \geq 10 \qquad \text{cioè se} \qquad |F(j\omega)| \geq 11 \approx 21\text{dB} \qquad \omega \in [0, 1]$$

Conviene a questo punto tracciare i diagrammi di Bode (pagina seguente) di

$$\hat{F}(j\omega) = \frac{K_G}{s} P(s) = 200 \, \frac{s + 1}{s(s + 10)(s + 20)}$$

L'analisi dei diagramma delle fasi rivela che queste ultime si mantengono sempre al di sopra dei 180°; di conseguenza, è possibile risolvere il problema con un semplice guadagno K_G (che innalzi il diagramma dei moduli abbastanza da soddisfare la specifica nella banda di interesse) e senza alcuna azione di compensazione ($R(s) = 1$). Poiché $|\hat{F}(j1)| \approx 3$ dB, si può porre ad esempio $K_G = 20$ dB $= 10$. Il controllore risultante è pertanto

$$G(s) = \frac{10}{s}$$



Problema 2

a) Essendo

$$A^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & -\epsilon k(-1)^k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$$

si trova facilmente

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k = \begin{pmatrix} e^{-t} & \epsilon\, t\, e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \qquad W(t) = C\Phi(t)B = e^{-t}$$

b) Nel dominio di s, la risposta forzata è

$$y(s) = W(s)u(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{\alpha}{s+1} = \frac{\alpha}{(s+1)^2}.$$

Antitrasformando si ha

$$y(t) = \alpha\, t\, e^{-t}$$

e quindi, imponendo il valore desiderato di y per $t = 1$ si trova

$$\alpha = \frac{e}{1-e}.$$