CONTROLLI AUTOMATICI I modulo
Prova scritta del 15 luglio 2004

SOLUZIONE

Problema 1

Poiché il processo non ha poli a parte reale positiva, la specifica a) è garantita dalla d). La b) implica che il sistema di controllo deve avere almeno tipo 1. Questo conduce all'aggiunta di un polo nell'origine nel controllore; tale polo garantirà anche astatismo rispetto al disturbo costante sull'ingresso del processo. Resta quindi da garantire che l'errore a regime resti nel limite assegnato, cioè

$$|e_1| = \frac{1}{|K_F|} = \frac{1}{|K_P K_G|} = \frac{1}{|-0.1 \cdot K_G|} \leq \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \Longrightarrow \qquad |K_G| \geq 10\sqrt{10}$$

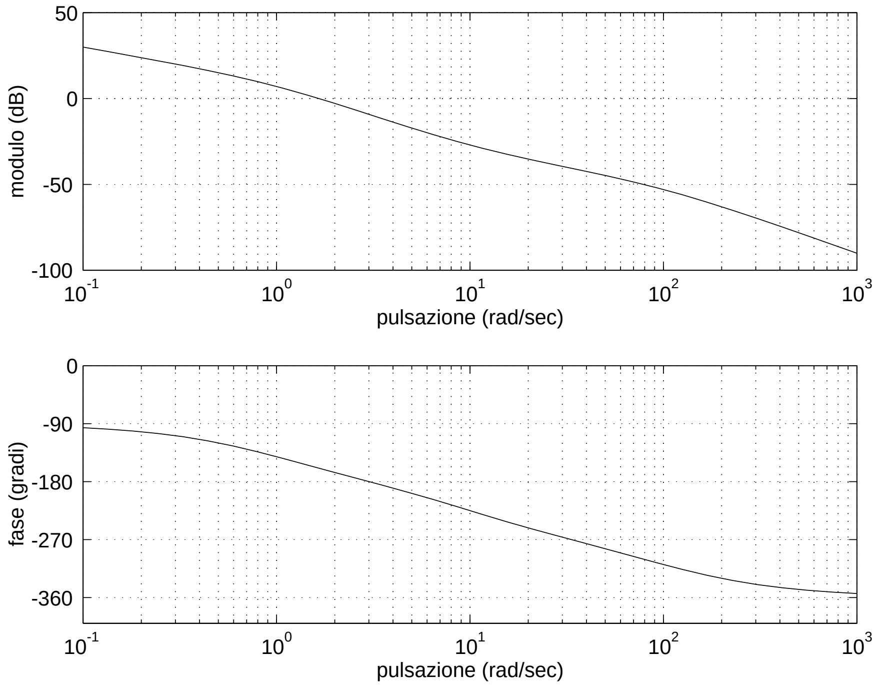
Si ponga $K_G = -10\sqrt{10}$ (si è scelto il segno *negativo* per rendere K_F positivo). Nel seguito della sintesi, non sarà possibile diminuire K_G, pena la violazione del limite sull'errore.

Si ha quindi

$$G(s) = \frac{K_G}{s} R(s) \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{F}(s) = \frac{K_G}{s} P(s) = \sqrt{10}\,\frac{1-0.1s}{s(1+s)(1+0.01s)}$$

I diagrammi di Bode di $\hat{F}(s)$ (vedi figura seguente) indicano che in corrispondenza alla pulsazione di attraversamento desiderata $\omega_t^* = 1$ si ha

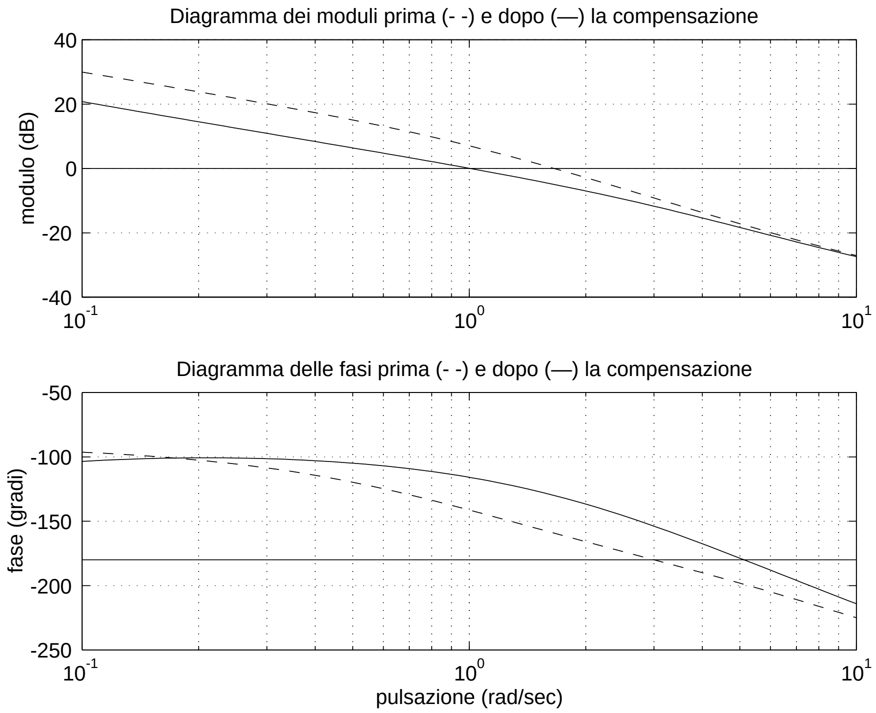
$$|\hat{F}(j1)| \approx 7\,\mathrm{dB} \qquad\qquad \angle F(j1) \approx -141^\circ$$



Per dedurre tali valori non è necessario un tracciamento accurato dei diagrammi: infatti, osservato che $\sqrt{10}|_{\mathrm{dB}} = 10$ dB, si ha $|\hat{F}(j1)| \approx 10 - 3$ dB (guadagno + correzione del diagramma asintotico del primo polo in corrispondenza alla sua pulsazione di rottura) e $\angle F(j1) \approx -90^\circ - 45^\circ - 6^\circ$ (polo nell'origine + contributo del primo polo in corrispondenza alla sua pulsazione di rottura + correzione del diagramma asintotico dello zero *a parte reale positiva* una decade prima della pulsazione di rottura). Si noti che si è trascurato il contributo del secondo polo, la cui pulsazione di rottura è 100.

Poiché la compensazione deve fornire un'attenuazione di 7 dB e un anticipo di almeno 16° in $\omega_t^* = 1$, è necessario usare in modo combinato la funzione anticipatrice e quella attenuatrice.

Dai diagrammi universali, una possibile scelta per la funzione anticipatrice è $m = 3$ in $\omega\tau = 1$ (e quindi $\tau = 1$), che in $\omega_t^* = 1$ fornisce all'incirca un anticipo di 26° e un'amplificazione di 2 dB. Per completare il progetto si può usare la funzione attenuatrice $m = 3$ in $\omega\tau = 100$ (e quindi $\tau = 100$); si ottiene così in $\omega_t^* = 1$ un anticipo netto di $26° - 1° = 25°$ e un'attenuazione netta di $2\text{dB} - 9\text{dB} = -7\text{dB}$. L'effetto della compensazione è evidente nella figura successiva.



In conclusione, il controllore progettato ha funzione di trasferimento

$$G(s) = -10\sqrt{10}\,\frac{1+s}{1+\dfrac{1}{3}s}\,\frac{1+\dfrac{100}{3}s}{1+100s}$$

Il valore effettivo di pulsazione di attraversamento e margine di fase (valutato ad esempio con l'istruzione `margin` di MATLAB) risulta essere rispettivamente di 1 rad/sec e 64°.

Problema 2

Gli autovalori della matrice A sono chiaramente $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$. La risposta libera è

$$y(t) = Ce^{At}x_0 = C\sum_{i=1}^{3} e^{\lambda_i t} c_i v_i$$

dove c_i indica la i-sima componente dello stato iniziale x_0 lungo l'autovettore v_i $(i = 1, 2, 3)$. Si trova

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Essendo $Cv_1 = 0$, la risposta libera non contiene mai l'esponenziale e^t, che è dunque inosservabile; di conseguenza *non* esistono stati iniziali cui corrisponda un'uscita libera illimitata.

La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Si noti che, come indicato dall'analisi precedente, l'autovalore λ_1 è nascosto.

La risposta forzata richiesta è dunque

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3/2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{3/2}{s+2}\right] = \left(\frac{3}{2} - 3e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\right)\delta_{-1}(t)$$

Problema 3

- Si consideri un sistema lineare avente funzione di trasferimento $W(s) = s/(s^2+1)$. Allora:

  ○ il sistema è instabile;
  FALSO: Il sistema ha due poli immaginari, quindi almeno esternamente è semplicemente stabile. Potrebbe essere instabile se vi fossero degli autovalori nascosti a parte reale positiva, il che però non è deducibile dalla sola $W(s)$.

  ○ la risposta a regime permanente per un qualsiasi ingresso costante è nulla;
  FALSO: E' vero che $W(s)$ contiene uno zero nell'origine, ma il sistema non ammette regime permanente poiché non è asintoticamente stabile. Di conseguenza, né l'evoluzione libera né quella forzata convergono in generale a un valore limite.

  ○ la risposta per un qualsiasi ingresso costante è nulla;
  FALSO: Vedi risposta precedente.

  ○ ci sono infinite condizioni iniziali per cui l'evoluzione libera nello stato è una traiettoria periodica;
  VERO: Tutte quelle contenute nel piano individuato da v_a e v_b, dove $v_{1,2} = v_a \pm jv_b$ sono gli autovettori associati agli autovalori $\lambda_{1,2} = \pm j$. Se poi il sistema non ha autovalori nascosti, tale piano coincide con lo spazio di stato.

  ○ il sistema è completamente raggiungibile e osservabile;
  FALSO: Impossibile dedurlo dalla sola $W(s)$.

- Si consideri il sistema ottenuto chiudendo in retroazione negativa unitaria un sistema privo di autovalori nascosti e avente funzione di trasferimento $F(s) = k(s+z)/(s-p_1)(s+p_2)$, con $k, z, p_1, p_2 > 0$. Allora:

  ○ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per k positivo e sufficientemente grande;
  VERO: Si deduce dal diagramma di Nyquist di $F(j\omega)$ (attenzione: si osservi che $n_F^+ = 1$, e che $K_F = -kz/p_1p_2 < 0$), o più direttamente dal denominatore della funzione di trasferimento del sistema retroazionato:

  $$D_W(s) = D_F(s) + N_F(s) = s^2 + (k + p_2 - p_1)s + kz - p_1p_2$$

  che ha tutti i coefficienti positivi (e quindi due radici a parte reale negativa) per k positivo e sufficientemente grande,

  ○ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per k negativo e sufficientemente grande;
  FALSO: Vedi risposta precedente.

  ○ il diagramma di Nyquist di $F(j\omega)$ per $\omega > 0$ è tutto contenuto nel primo quadrante;
  FALSO: Ad esempio, se la pulsazione di rottura di p_2 precede quella di p_1 e di z, il diagramma di Bode delle fasi di $F(j\omega)$ scende sotto l'asse a 0° prima di risalire; in questo caso, il corrispondente diagramma di Nyquist ha un tratto contenuto nel quarto quadrante.

  ○ i poli del sistema ad anello chiuso sono certamente reali;
  FALSO: Basta calcolare il discriminante di $D_W(s)$:

  $$\Delta = (k + p_2 - p_1)^2 - 4(kz - p_1p_2)$$

  che diventa certamente negativo per z sufficientemente grande. In questo caso, $D_W(s)$ ha radici complesse coniugate.

  ○ è possibile scegliere k in modo che l'evoluzione libera nello stato del sistema retroazionato converga per qualsiasi condizione iniziale.
  VERO: Basta scegliere k in modo che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile.