TEORIA DELLA STABILITÀ

Esercizi con soluzione

G. Oriolo
Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Università di Roma "La Sapienza"

Esercizio 1

Si consideri il sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - \sin x_1 - 2\,\mathrm{sat}(x_1 + x_2)\end{aligned}$$

dove $\mathrm{sat}(\cdot)$ è la funzione di saturazione, definita da

$$\mathrm{sat}(z) = \begin{cases} z & |z| \leq 1 \\ \mathrm{sign}(z) & |z| > 1 \end{cases}$$

Si dimostri che l'origine è l'unico punto di equilibrio del sistema, e che è asintoticamente stabile.

Soluzione

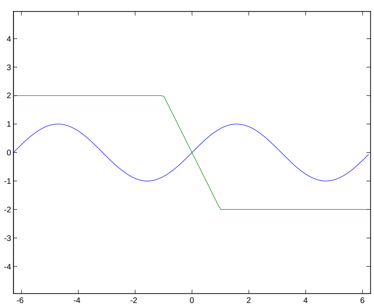
Per trovare l'insieme dei punti di equilibrio di questo sistema, uguagliamo a zero i secondi membri delle equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}x_2 &= 0 \\ -x_2 - \sin x_1 - 2\,\mathrm{sat}(x_1 + x_2) &= 0\end{aligned}$$

Dunque deve essere

$$-\sin x_1 - 2\,\mathrm{sat}(x_1) = 0$$

Per verificare che l'unica soluzione di questa equazione è $x_1 = 0$ intersechiamo graficamente le due curve $y = \sin x_1$ e $y = -2\,\mathrm{sat}(x_1)$



Come si vede l'unica intersezione tra queste due curve si ha per $x_1 = 0$. Se ne deduce che l'unico punto di equilibrio del sistema in analisi è l'origine $x = 0$.

Per eliminare l'effetto della saturazione, studiamo la stabilità dell'origine in un intorno circolare S contenuto nell'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x_1 + x_2| < 1\}$$

che contiene l'origine. In un tale intorno, le equazioni che descrivono il sistema diventano

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 3x_2 - \sin x_1\end{aligned}$$

Per applicare il criterio indiretto di Lyapunov, si calcola la Jacobiana di questo sistema nell'origine $x = 0$. Si ha

$$J(x)|_0 = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 - \cos x_1 & -3 \end{array} \right)\Big|_0 = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{array} \right)$$

E' facile verificare che questa è una matrice di Hurwitz, cioè ha tutti gli autovalori a parte reale negativa. Da ciò discende che l'origine del sistema è un punto di equilibrio asintoticamente stabile. Si noti come l'analisi condotta abbia validità puramente locale.

Esercizio 2

Si consideri il sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 - x_2\,\mathrm{sat}(x_2^2 - x_3^2) \\ \dot{x}_3 & = & x_3\,\mathrm{sat}(x_2^2 - x_3^2) \end{array}$$

1. Si dimostri che l'origine è un l'unico punto di equilibrio del sistema.
2. Usando il criterio diretto di Lyapunov, si dimostri che l'origine è globalmente asintoticamente stabile.

Soluzione

Uguagliando a zero la prima equazione si ricava $x_2 = 0$, e dunque dalla seconda anche $x_1 = 0$. Sostituendo $x_2 = 0$ nella terza equazione si ha $x_3 = 0$. Possiamo concludere che l'origine è l'unico punto di equilibrio del sistema.

Analizziamo la stabilità dell'origine con in il metodo indiretto di Lyapunov. Essendo

$$\begin{array}{rcl} J(x)|_0 & = & \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3x_2^2 + x_3^2 & -2x_2x_3 \\ 0 & 2x_2x_3 & -3x_3^2 \end{array} \right)\Bigg|_0 \\ & = & \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

La Jacobiana ha autovalori a parte reale nulla, e quindi siamo nel caso critico: non possiamo dedurre nulla sulla stabilità del punto di equilibrio.

Procediamo dunque con il metodo diretto di Lyapunov. Proviamo a considerare la semplice funzione quadratica $V = x^T x/2$ come candidata di Lyapunov[1]. Si ha che V è definita positiva e radialmente illimitata, mentre la sua derivata rispetto al tempo

$$\dot{V} = x_1x_2 - x_1x_2 - x_2^2\,\mathrm{sat}(x_2^2 - x_3^2) + x_3^2\,\mathrm{sat}(x_2^2 - x_3^2) = -(x_2^2 - x_3^2)\mathrm{sat}(x_2^2 - x_3^2)$$

[1]Quando si usa il metodo diretto di Lyapunov, è consigliabile usare come prima candidata di Lyapunov la funzione quadratica $V = \frac{1}{2}(x - x_e)^T(x - x_e)$, che è definita positiva in qualsiasi intorno di x_e e radialmente illimitata.

è semidefinita negativa in ogni intorno dell'origine, annullandosi per $x_2^2 = x_3^2$. Dunque, l'origine è stabile ma il criterio diretto di Lyapunov non consente di dedurre la stabilità asintotica.

Per approfondire l'analisi, si può applicare il teorema dell'insieme invariante usando ancora la stessa funzione V. L'insieme dei punti dove $\dot{V} = 0$ è $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_2^2 = x_3^2\}$. La dinamica residua nell'insieme P è

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \\ \dot{x}_3 &= 0 \end{aligned}$$

In questa situazione, se $x_1 \neq 0$, si avrebbe $\dot{x}_2 \neq 0$, e dunque x uscirebbe dall'insieme P (si noti che x_3 è costante in P). Da ciò si evince che il massimo insieme invariante contenuto in P è l'origine, che è dunque globalmente asintoticamente stabile.

Esercizio 3

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= kx_1 + x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 - x_1^2x_2 \end{aligned}$$

con $k \neq 0$. Si individuino tutti i punti di equilibrio del sistema, e se ne studi la stabilità al variare di k positivo o negativo.

Soluzione

Uguagliando a zero la prima equazione si ha

$$kx_1 + x_1x_2^2 = x_1(x_2^2 + k) = 0$$

e dunque $x_1 = 0$ oppure $x_2 = \pm\sqrt{k}$. Uguagliando a zero anche la seconda equazione si ottiene

$$-x_2^3 - x_1^2x_2 = -x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

Se $x_1 = 0$ si ricava immediatamente $x_2 = 0$. Se $x_1 \neq 0$ si ricava ancora $x_2 = 0$, essendo $x_1^2 + x_2^2$ sempre positivo al di fuori dell'origine. Quindi, poiché $k \neq 0$, si deduce che l'origine è l'unico punto di equilibrio.

Studiamo la stabilità dell'origine con il criterio indiretto di Lyapunov:

$$J(x_e) = \left. \begin{pmatrix} k + x_2^2 & 2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & -3x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix} \right|_{x=x_e} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $k \leq 0$ il criterio non è conclusivo (caso critico); se $k > 0$ possiamo inferire l'instabilità del sistema data la presenza dell'autovalore positivo $\lambda = k$.

Cerchiamo allora di applicare il criterio diretto: scegliamo $V = x^T x/2$, che è definita positiva e radialmente illimitata. Si ha $\dot{V} = x^T\dot{x} = kx_1^2 + x_1^2x_2^2 - x_2^4 - x_1^2x_2^2 = kx_1^2 - x_2^4$. Si ha che $\dot{V}$ è definita negativa se $k < 0$, indefinita se $k > 0$.

Si può concludere che l'origine è globalmente asintoticamente stabile se $k < 0$, mentre dall'analisi con il metodo indiretto sappiamo già che è instabile se $k > 0$.

Il teorema di Cetaev conferma l'instabilità per $k > 0$: posto infatti $V = x_1^2/2$, che è positiva in qualunque intorno dell'origine, si ha che $\dot{V} = x_1\dot{x}_1 = kx_1^2 + x_1^2x_2^2$ è definita positiva nello stesso intorno.

Esercizio 4

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{1}{1+x_3} - x_1 \\
\dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 \\
\dot{x}_3 &= x_2 - 3x_3
\end{aligned}$$

a) Si mostri che nella regione $R = \{x : x_i > 0, i = 1, 2, 3\}$ esiste un unico punto di equilibrio x_e.

b) Si studi la stabilità di x_e mediante il criterio indiretto di Lyapunov.

b) E' possibile escludere che x_e sia globalmente asintoticamente stabile?

Soluzione

Uguagliando a zero le equazioni, si ricava:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{1+x_3} \\
x_1 &= 2x_2 \\
x_2 &= 3x_3
\end{aligned}$$

sostituendo la terza equazione nella seconda, si ottiene $x_1 = 6x_3$; sostituendo quest'ultima relazione nella prima equazione si ha

$$6x_3 = \frac{1}{1+x_3} \Rightarrow 6x_3^2 + 6x_3 - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono $x_{3,1} = -1.1455$ e $x_{3,2} = 0.1455$. Poiché siamo interessati a trovare i punti di equilibrio nell'insieme R, consideriamo solo la soluzione $x_{3,2} = 0.1455$ a cui corrisponde il punto di equilibrio $x_e = (0.8730, 0.4365, 0.1455)$. Si noti che esiste un altro punto di equilibrio in corrispondenza a $x_{3,1}$.

Applichiamo il criterio indiretto di Lyapunov. La Jacobiana del sistema calcolato nel punto x_e risulta essere

$$J(x_e) = \left.\begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{-1}{(1+x_3)^2} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\right|_{x_e} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -0.7621 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Si può facilmente verificare che gli autovalori di questa matrice sono $\lambda_{1,2} = -1.3671 \pm\ j0.4490$ e $\lambda_3 = -3.2657$. Essendo questi autovalori tutti a parte reale negativa, si ha che x_e è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Poiché il sistema ammette un altro punto di equilibrio, si può certamente affermare che x_e non è globalmente asintoticamente stabile.

Esercizio 5

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 2x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\
\dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2(x_1^2 + x_2^2)
\end{aligned}
$$

e si consideri il punto di equilibrio $x_e = 0$. Allora:

a) Studiare la stabilità di x_e attraverso il criterio indiretto di Lyapunov.

b) Studiare la stabilità di x_e attraverso il criterio diretto di Lyapunov, determinando l'eventuale dominio di attrazione.

c) Determinare, se esistono, gli altri punti di equilibrio del sistema.

Soluzione

a) Calcoliamo la Jacobiana nell'origine

$$
J(x_e) = \left.\begin{pmatrix} -3x_1^2 - x_2^2 & 2 - 2x_1x_2 \\ -1 - 4x_1x_2 & -2x_1^2 - 6x_2^2 \end{pmatrix}\right|_{x_e} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Gli autovalori di questa matrice sono $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$: siamo dunque nel caso critico e non si può dedurre nulla sulla stabilità dell'origine.

b) Usiamo la funzione di Lyapunov $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_2^2)$, che è definita positiva in qualsiasi intorno dell'origine e radialmente illimitata. Calcolando la derivata rispetto al tempo di questa funzione si ha

$$
\dot{V} = x_1(-x_1^3 - x_1x_2^2 + 2x_2) + 2x_2(-x_1 - 2x_1^2x_2 - 2x_2^3) = -x_1^4 - 5x_1^2x_2^2 - 4x_2^4
$$

che è definita negativa in qualsiasi intorno dell'origine. Ne consegue che l'origine è un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

c) Poiché l'origine è globalmente asintoticamente stabile, non possono esistere altri punti di equilibrio per il sistema.

Esercizio 6

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -k\,h(x)x_1 + x_2 \\
\dot{x}_2 &= -h(x)x_2 - x_1^3
\end{aligned}
$$

dove k è una costante e $h(x)$ una funzione di x. Si indichi con S l'interno della circonferenza di raggio unitario. Utilizzando la funzione $V(x) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2$ e i vari criteri noti, si studino le proprietà di stabilità/instabilità dell'origine nei seguenti casi:

a) $k > 0,\ h(x) > 0 \quad \forall x \in S$;

b) $k > 0,\ h(x) > 0 \quad \forall x \in I\!R^2$;

c) $k > 0,\ h(x) < 0 \quad \forall x \in S$;

d) $k > 0,\ h(x) = 0 \quad \forall x \in S$;

e) $k = 0,\ h(x) > 0 \quad \forall x \in S$;

f) $k = 0,\ h(x) > 0 \quad \forall x \in I\!R^2$.

Soluzione

Si consideri l'intorno dell'origine $S = \{x \in I\!R^2 \ : \ \|x\|_2 < 1\}$. Calcolando la derivata rispetto al tempo di V si ottiene:

$$\dot{V} = x_1^3\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -k\,h(x)x_1^4 + x_2x_1^3 - h(x)x_2^2 - x_1^3x_2 = -k\,h(x)x_1^4 - h(x)x_2^2$$

a) Essendo $k > 0$, $h(x) > 0$ in S, si ha che $x_e = 0$ è asintoticamente stabile.

b) Essendo $k > 0$, $h(x) > 0$ in $I\!R^2$, si ha che $x_e = 0$ è globalmente asintoticamente stabile.

c) Essendo $k > 0$, $h(x) < 0$ in S, si ha che $x_e = 0$ è instabile. Infatti, si applica il criterio di Cetaev considerando che l'insieme $P = \{x \in I\!R^2 \ : \ V(x) > 0\}$ ha come punto di accumulazione l'origine e $\dot{V}$ è definita positiva in $P \cap S(0, r)$ per ogni $r < 1$.

d) Essendo $k > 0$, $h(x) = 0$ in S, si ha che $\dot{V}(x) = 0$ in S. Dunque, l'origine è semplicemente stabile.

e) Essendo $k = 0$, $h(x) > 0$ in S, si ha che $\dot{V} = -h(x)x_2^2$ è semidefinita negativa in S. Applichiamo il teorema dell'insieme invariante: si ha $P = \{x \in I\!R^2 \ : \ \dot{V} = 0\} = \{x \in I\!R^2 \ : \ x_2 = 0\}$. La dinamica residua in P è

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k\,h(x)x_1 = 0 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 \end{aligned}$$

Se $x_1 \neq 0$, x_2 varia. Se ne deduce che il massimo insieme invariante contenuto in P è l'origine. Dunque, l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

f) Essendo $k = 0$, $h(x) > 0$ in $I\!R^2$, si ha che $x_e = 0$ è un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile (si applica ancora il teorema dell'insieme invariante, questa volta nella versione globale).