

# Sistemi di Controllo

Prof. Giuseppe Oriolo

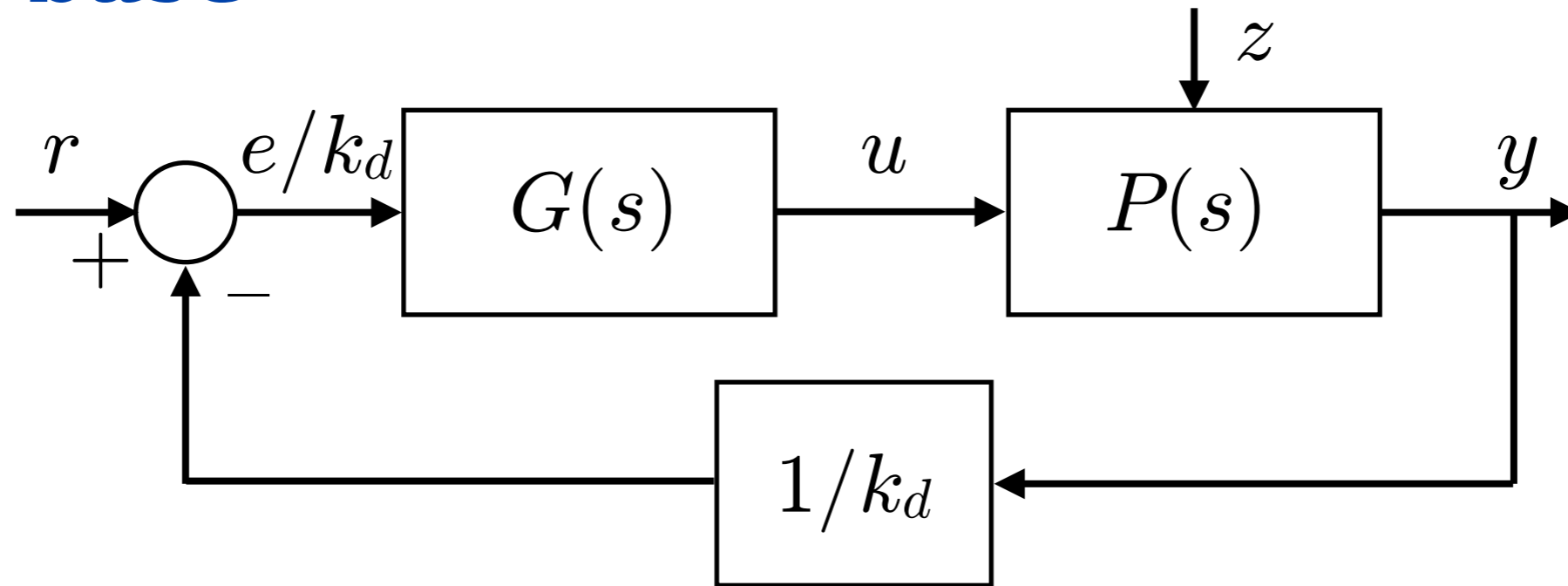
# Progetto nel dominio di Laplace

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INFORMATICA  
AUTOMATICA E GESTIONALE ANTONIO RUBERTI



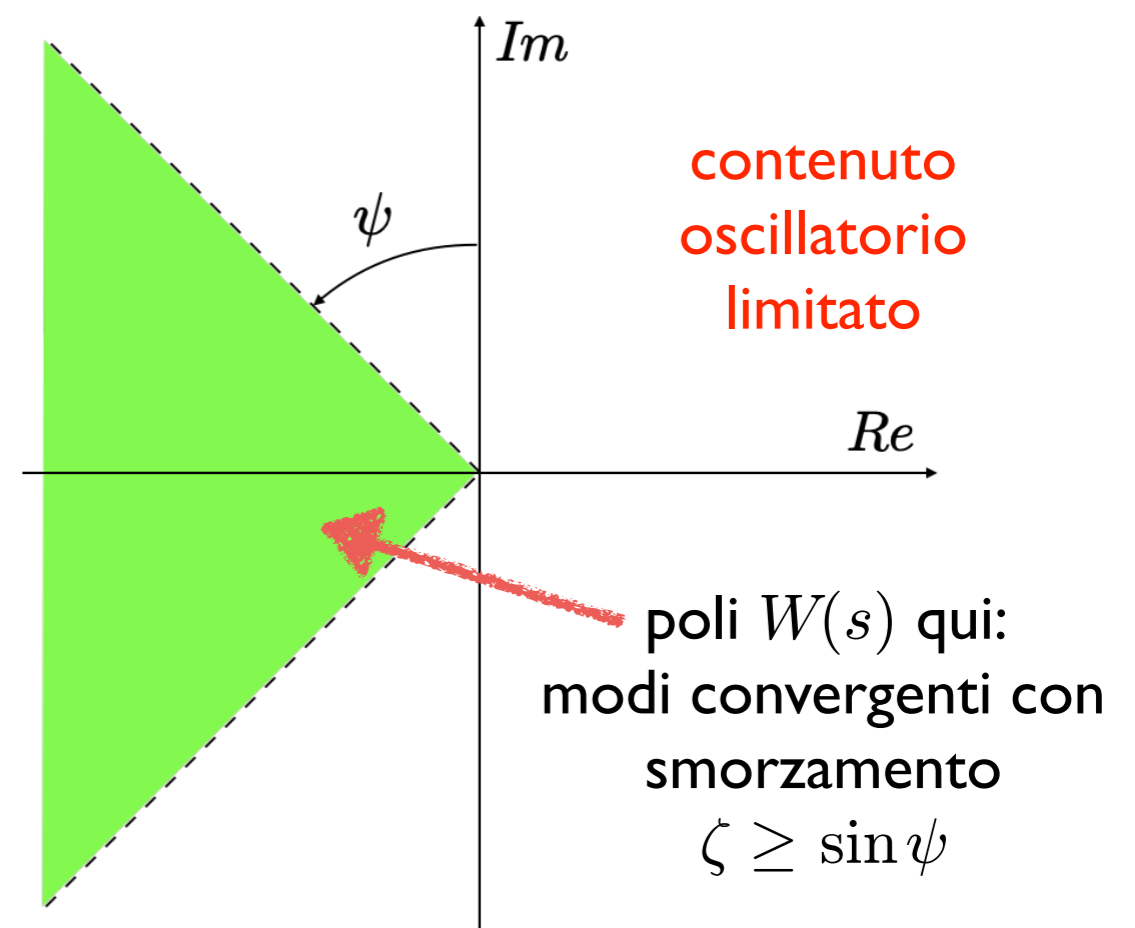
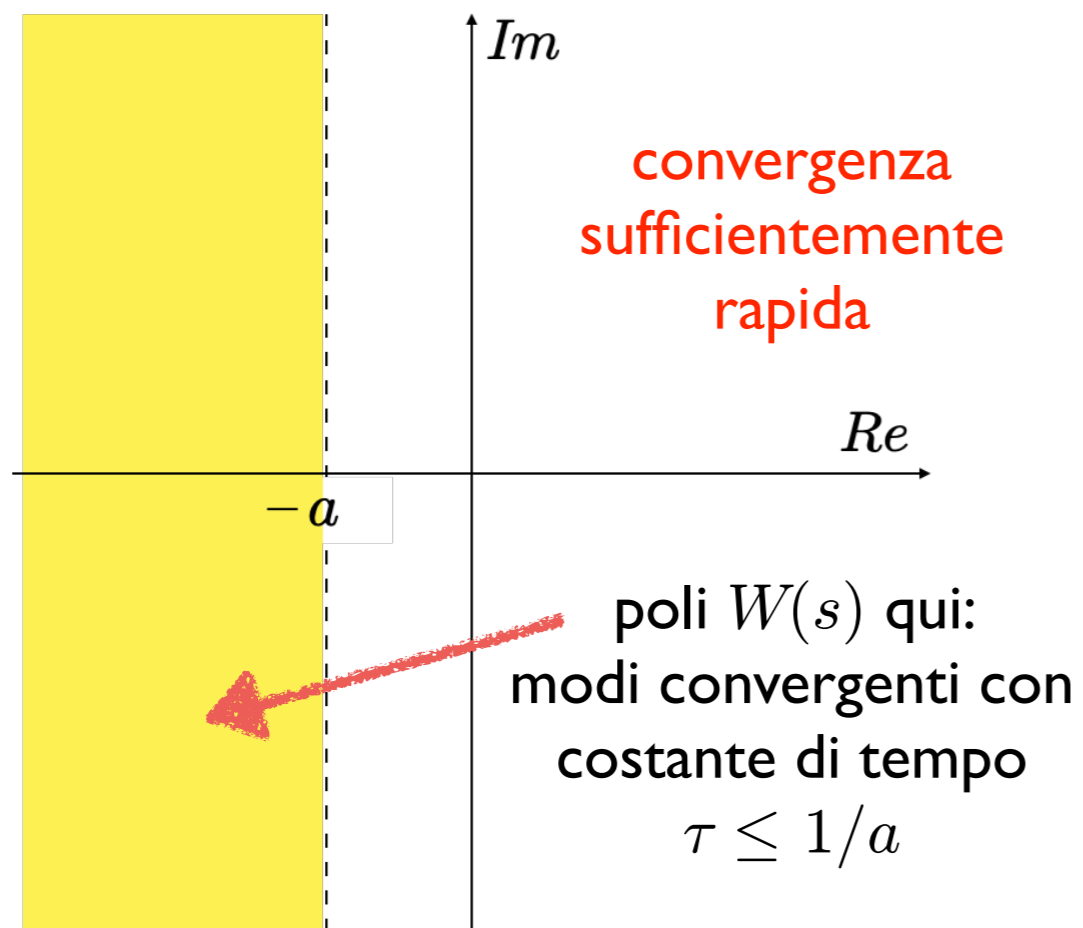
SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

# idea di base



- una metodologia `classica' basata sull'uso di **FdT** come modelli e del **luogo delle radici** come strumento principale
- nessuna **hyp** sulla FdT del processo  $P(s)$ , **che potrà anche contenere poli con  $Re[ ] > 0$** ; si avrà quindi in generale  $n_F^+ \lesseqgtr 0$
- in questa situazione, la condizione  $m_\varphi > 0$  (criterio di Bode) non è **né necessaria né sufficiente** per la AS del SdC
- di conseguenza, il progetto non viene sviluppato in frequenza

- la specifica sulla stabilità asintotica del sistema retroazionato viene soddisfatta imponendo che la FdT  $W(s)$  di quest'ultimo **abbia tutti i poli a  $Re[ ] < 0$**
- imporre la collocazione dei poli di  $W(s)$  consente di soddisfare anche **specifiche sul regime transitorio:**



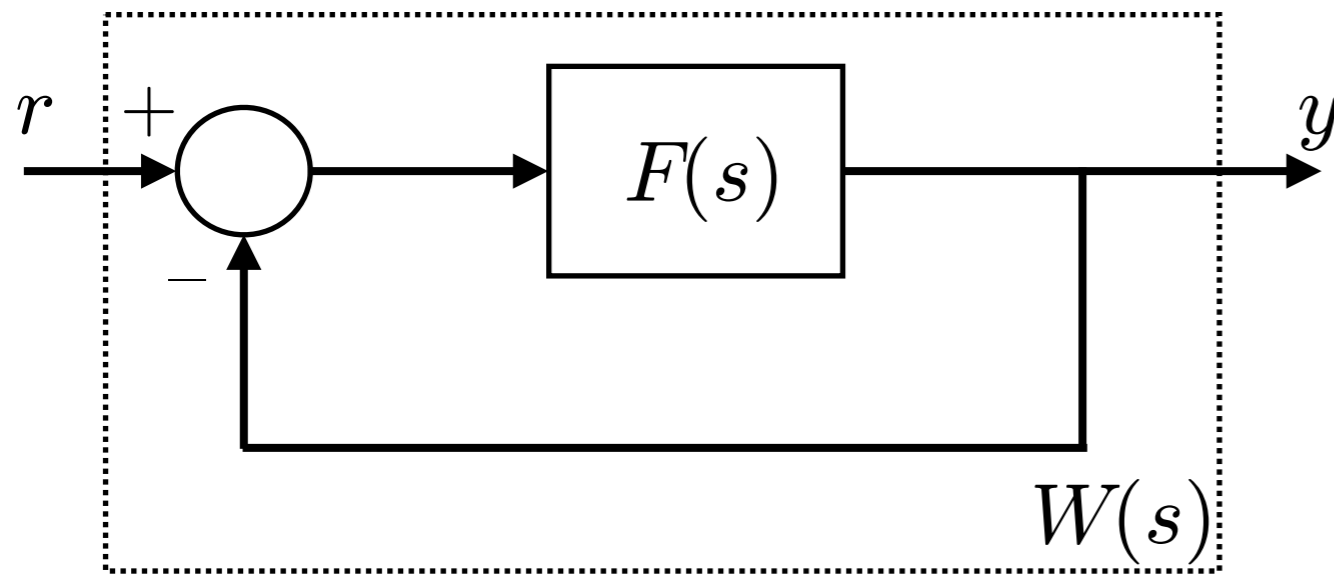
- il controllore viene in questo caso progettato nella forma

$$G(s) = \frac{R(s)}{s^h}$$

(cfr: Progetto in frequenza, slide 4)

- i poli nell'origine  $s^h$  ( $h = 0,1,2,\dots$ ) vengono usati per conseguire il tipo richiesto o a ottenere astatismo rispetto ai disturbi
- se necessario, in  $G(s)$  vengono inseriti elementi risonanti puri per riproduzione (reiezione) di riferimenti (disturbi) sinusoidali
- la funzione compensatrice  $R(s)$  ha il compito di modificare la  $F(s)$  per **garantire che i poli di  $W(s)$  appartengano alla zona desiderata** (AS + precisione regime transitorio)
- **al termine** si può aumentare il guadagno di  $R(s)$  per soddisfare specifiche a regime sull'errore  $e_k$  o sulla risposta al disturbo  $y_z$

# luogo delle radici




hyp: retroazione unitaria  
(non restrittiva)

$$F(s) = \frac{N_F(s)}{D_F(s)} = k \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_F(s)}{D_F(s) + N_F(s)}$$

- lo strumento fondamentale di progetto nel dominio di Laplace è il **luogo delle radici (LdR)**, ovvero il luogo geometrico dei poli di  $W(s)$  al variare di  $k$
- annullando  $D_W(s)$  si ottiene la seguente **equazione del LdR**

grado  $n$  

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + k \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0 \quad (\text{ELR})$$

- (ELR) si può riscrivere come

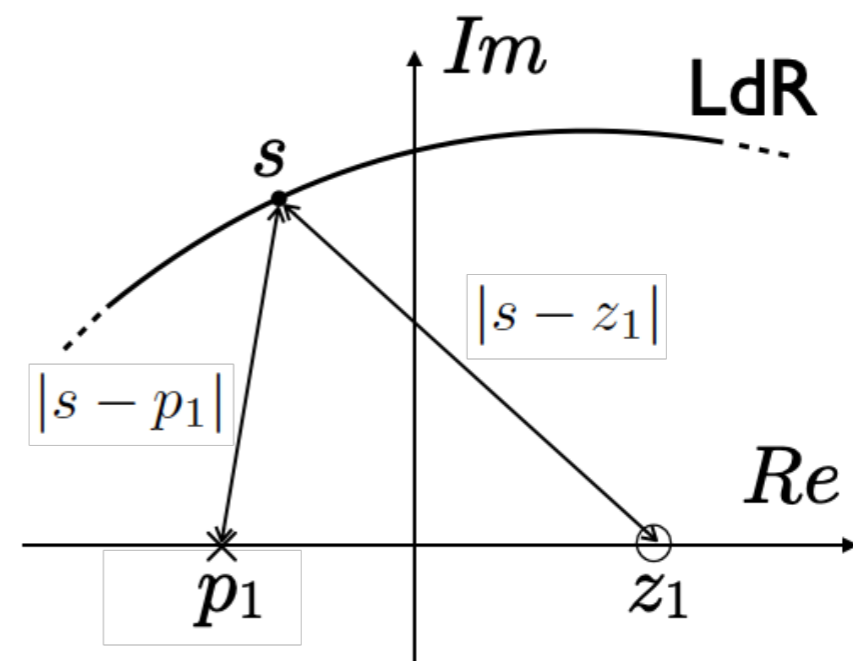
$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) = -k \prod_{i=1}^m (s - z_i)$$

che, in quanto uguaglianza tra numeri complessi, implica **due uguaglianze tra numeri reali**

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^n |s - p_i| = |k| \prod_{i=1}^m |s - z_i| & \text{condizione di modulo (CdM)} \\ \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \angle(-k) + \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) + h \cdot 360^\circ \quad h = 0, \pm 1, \dots & \text{condizione di fase (CdF)} \end{cases}$$

- la CdM dà  $|k| = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}$

utile per la **graduazione** del LdR



- la CdF si può riscrivere come

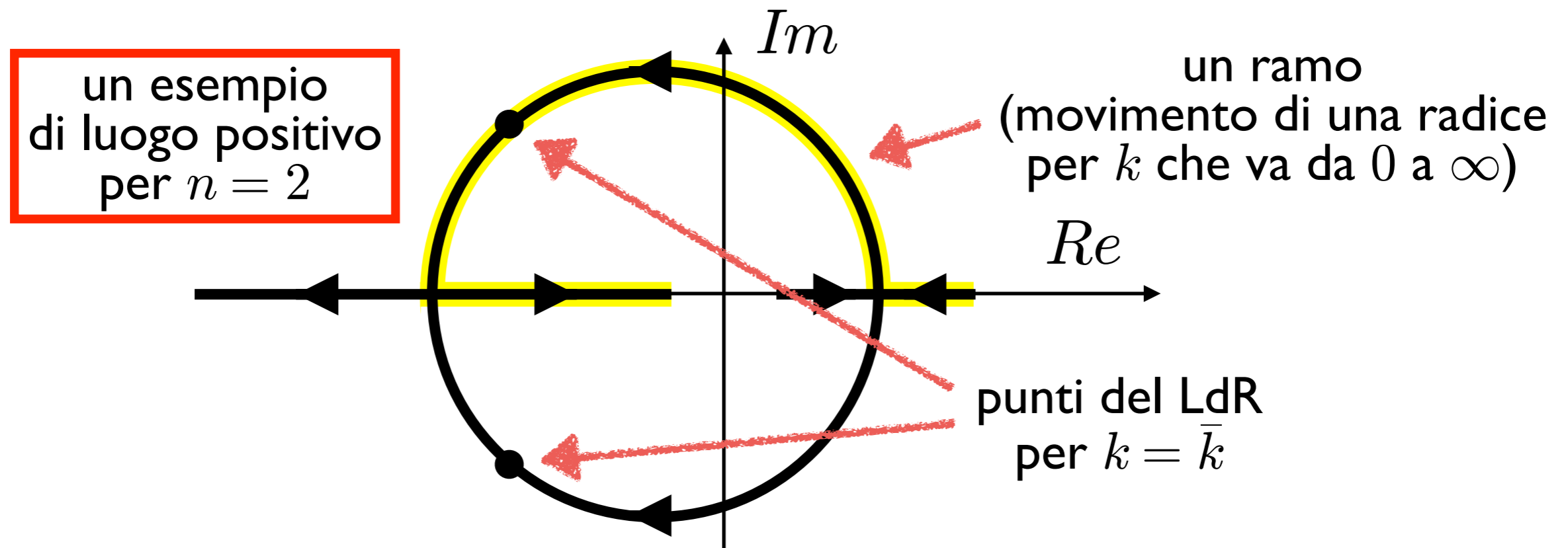
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) - \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) = 180^\circ + h \cdot 360^\circ & \text{per } k > 0 \\ & \text{(luogo positivo)} \\ \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) - \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) = h \cdot 360^\circ & \text{per } k < 0 \\ & \text{(luogo negativo)} \end{cases}$$

poiché non contengono  $k$ , queste condizioni possono essere usate direttamente per il **tracciamento** del LdR, o per derivare delle regole che consentano un tracciamento **qualitativo**

- il tracciamento qualitativo è utile per
  - schizzo a mano di luoghi semplici o parametrici
  - verifica di luoghi ottenuti al computer
  - **previsione dell'effetto di azioni compensatrici**

# regole di tracciamento del LdR

- (ELR) è un'equazione polinomiale a coefficienti reali, di grado  $n$  e parametrica in  $k$ , quindi si hanno le seguenti proprietà di base:
  - a ogni valore di  $k$  corrispondono  $n$  radici di (ELR), cioè  $n$  punti del LdR
  - ogni radice al variare di  $k$  descrive un **ramo** del LdR
  - il LdR è una curva **continua** al variare di  $k$
  - il LdR è una curva **simmetrica rispetto all'asse reale**





- **R1:** i poli  $p_1, \dots, p_n$  di  $F(s)$  sono punti del LdR (cioè poli di  $W(s)$ ) per  $k = 0$

(da (ELR))

- **R2:** appartengono al luogo positivo (LdR<sup>+</sup>) i punti dell'asse reale che lasciano a destra un numero totale dispari di poli e zeri di  $F(s)$ ; il resto dell'asse reale appartiene al luogo negativo (LdR<sup>-</sup>)

(dalla CdF, versione sdoppiata; 0 si considera pari)

- **R3:** per  $k \rightarrow +\infty$  (LdR<sup>+</sup>) e per  $k \rightarrow -\infty$  (LdR<sup>-</sup>):  
 $m$  rami del luogo convergono sugli zeri  $z_1, \dots, z_m$  di  $F(s)$   
 $n-m$  rami del luogo divergono all'infinito lungo **asintoti**

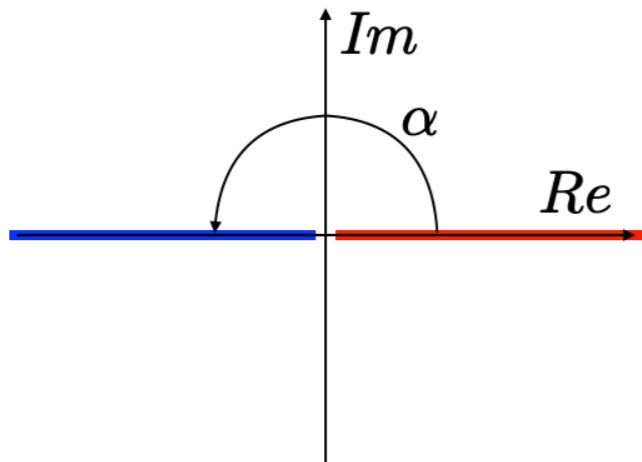
(da (ELR) per  $k = \pm\infty$ , notando che il grado si abbassa di  $n-m$  e le corrispondenti radici “perse” divergono all'infinito)

- R4: gli asintoti sono  $n - m$  semirette per il  $\text{LdR}^+$  e altrettante per il  $\text{LdR}^-$ ; esse formano una stella regolare centrata in  $(s_0, 0)$ , con

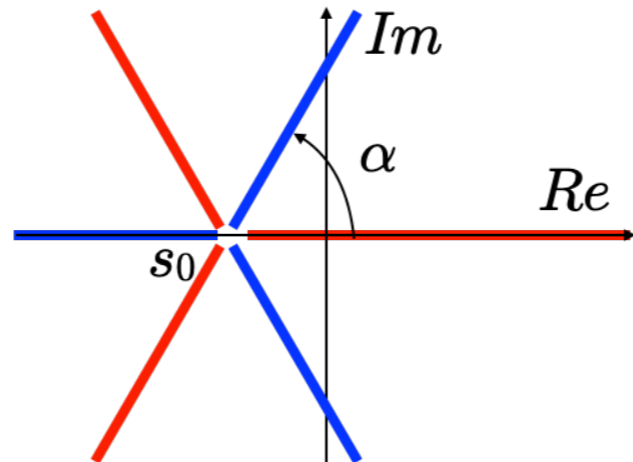
$$s_0 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

centro degli  
asintoti

$$n - m = 1$$



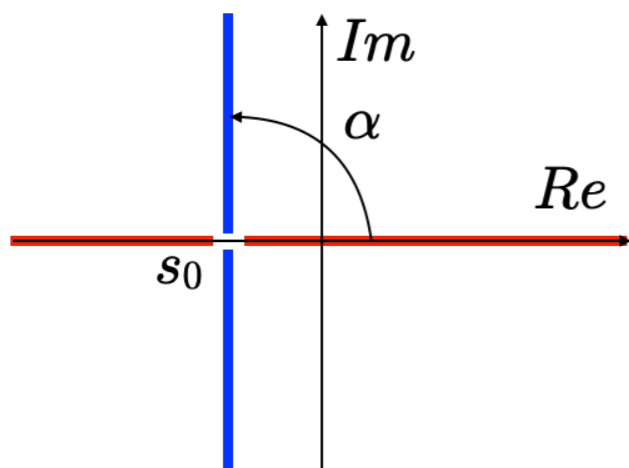
$$n - m = 3$$



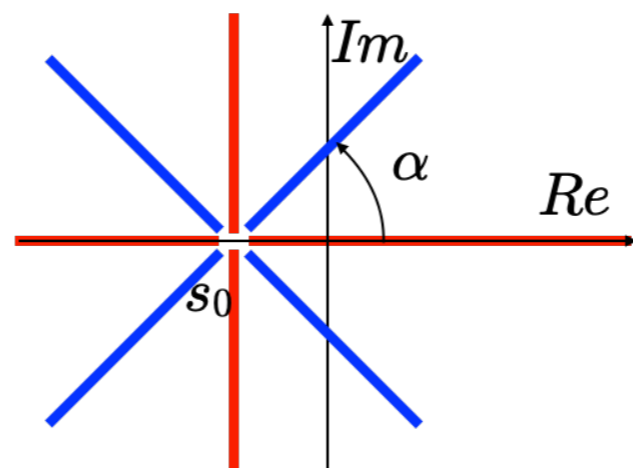
asintoti

—  $\text{LdR}^+$   
—  $\text{LdR}^-$

$$n - m = 2$$



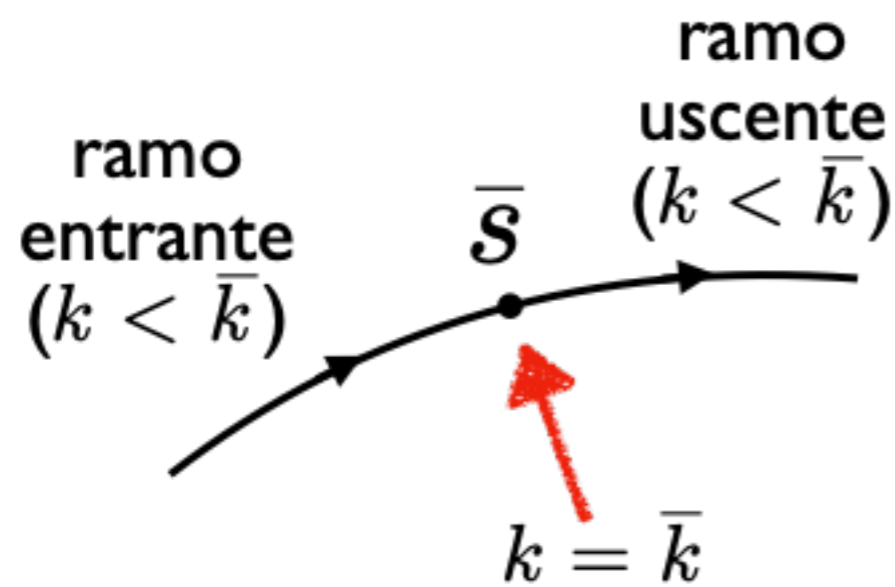
$$n - m = 4$$



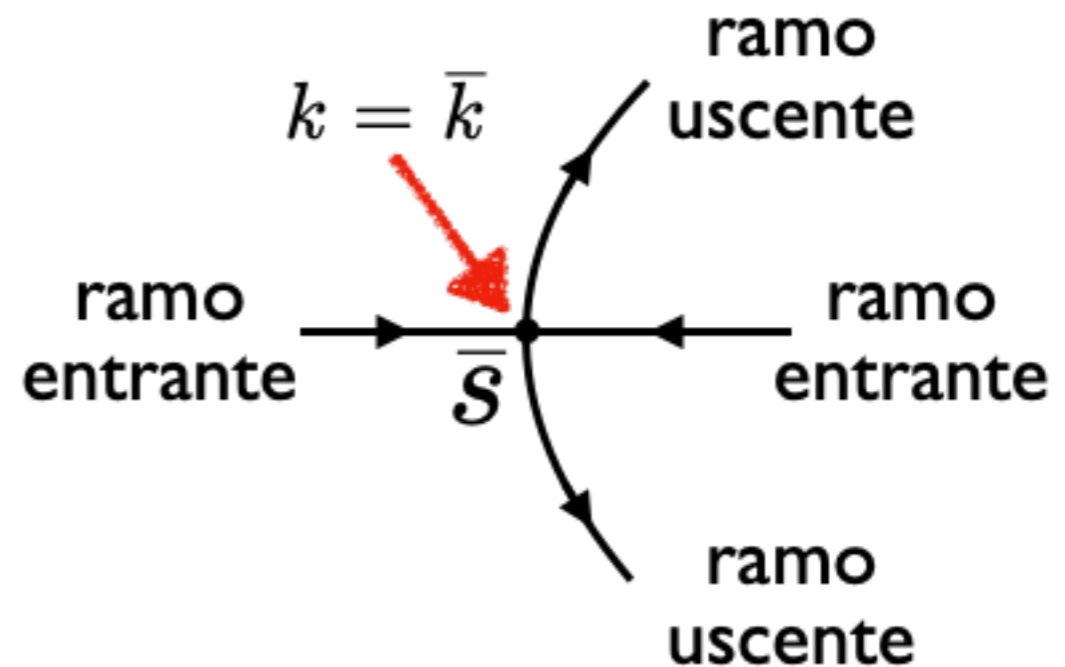
$$\alpha = \frac{180^\circ}{n - m}$$

grado relativo

- se per un valore  $\bar{k}$  di  $k$  l'equazione (ELR) ammette una radice  $\bar{s}$  di molteplicità  $\mu > 1$ ,  $\bar{s}$  è un **punto singolare** del LdR
- in  $s$  si incontrano  $2\mu$  rami del luogo,  $\mu$  entranti e  $\mu$  uscenti



**punto regolare**  
( $\mu = 1$ )



**punto singolare**  
(qui  $\mu = 2$ )

- eventuali poli o zeri **multipli** di  $F(s)$ , rispettivamente punti del LdR per  $k=0$  e  $k=\pm\infty$ , sono senz'altro **punti singolari**

- i punti singolari devono risolvere per  $k$  **reale** il sistema

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^n (s - p_i) + k \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0 \\ \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n (s - p_i) + k \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0 \end{cases}$$

- eliminando  $k$  tra le due si ottiene l'**equazione dei punti singolari**

$$\prod_{i=1}^m (s - z_i) \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n (s - p_i) - \prod_{i=1}^n (s - p_i) \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0 \quad \text{(EPS/1)}$$

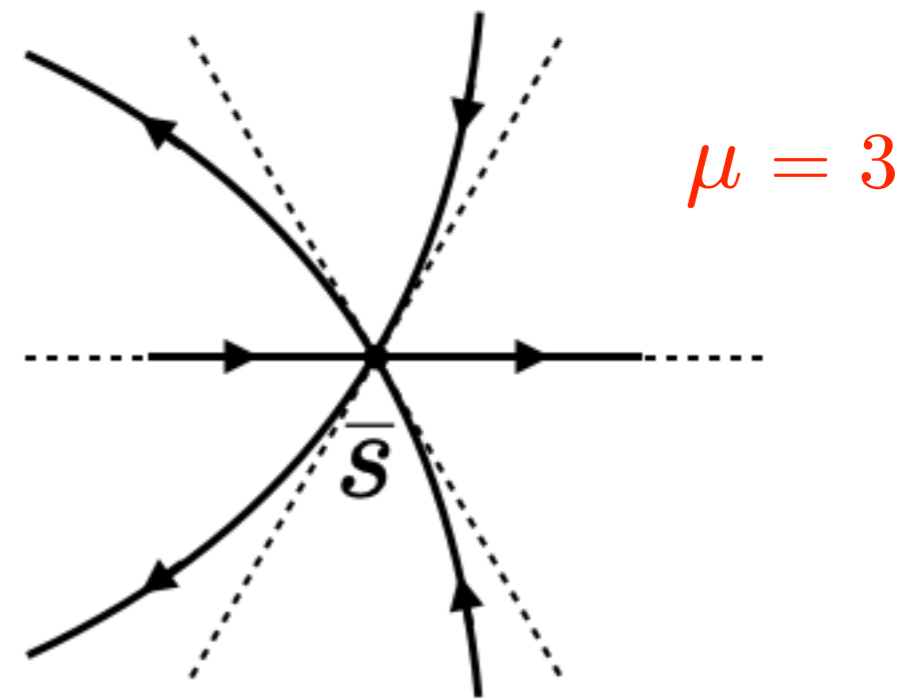
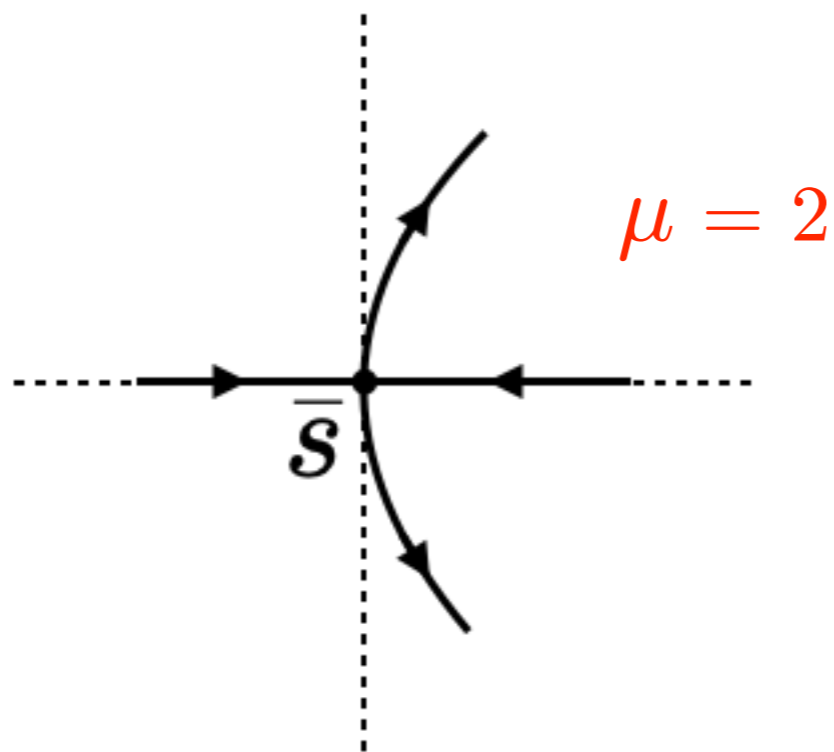
che ha grado  $n+m-1$

- dividendo quest'ultima per  $\prod_{i=1}^m (s - z_i) \prod_{i=1}^n (s - p_i)$  si ha

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} = 0 \quad \text{(EPS/2)}$$

che, per come è ricavata, non fornisce poli e zeri multipli di  $F(s)$

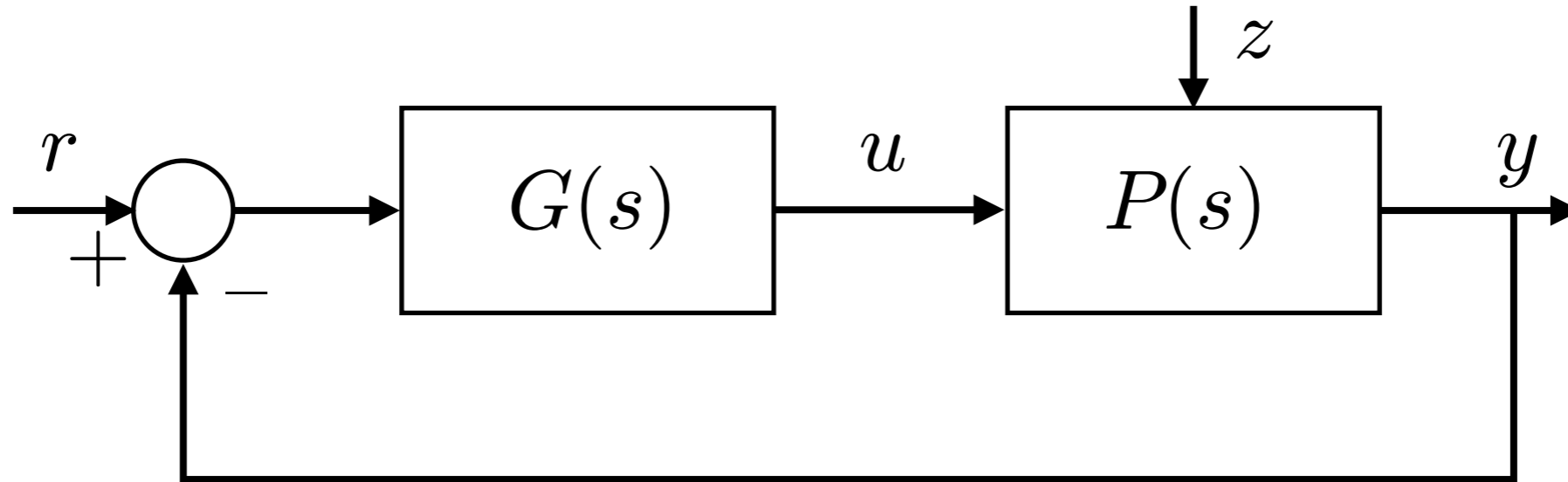
- R5: il LdR contiene al più  $n+m-1$  punti singolari, da ricavarsi risolvendo (EPS1) o (EPS2) e prendendo le radici corrispondenti a  $k$  reali attraverso (ELR); se si è usata (EPS2), a questi punti vanno aggiunti eventuali poli o zeri multipli di  $F(s)$
- R6: in un punto singolare del LdR, radice di (ELR) di molteplicità  $\mu > 1$ , si incontrano  $2\mu$  rami del luogo, alternativamente entranti e uscenti; le tangenti a questi rami nel punto singolare formano una stella regolare



# algoritmo di tracciamento del LdR

1. marcare la posizione di poli ( $\times$ ) e zeri ( $\circ$ ) di  $F(s)$
2. assegnare a LdR<sup>+</sup> e LdR<sup>-</sup> l'asse reale (R2)
3. tracciare gli asintoti (R4) e i rami che convergono a essi (R3)
4. determinare i versi dei rami secondo il movimento delle radici per  $k$  che va da  $-\infty$  a  $+\infty$ :
  - LdR<sup>+</sup> esce dai  $\times$ , entra negli  $\circ$  e va agli asintoti
  - LdR<sup>-</sup> esce dagli  $\circ$ , entra nei  $\times$  e viene dagli asintoti
5. se necessario, calcolare i punti singolari (R5) e l'andamento del LdR nell'intorno di tali punti (R6)
6. determinare eventuali valori critici di  $k$  (per i quali il LdR attraversa l'asse immaginario) applicando il CdR a  $D_W(s)$

# progetto con il LdR



- il controllore viene progettato nella forma

$$G(s) = \frac{R(s)}{s^h}$$

- con  $h$  fissato all'inizio del progetto (tipo e/o astatismo); se necessario, in  $G(s)$  vengono aggiunti elementi risonanti puri
- per iniziare, assumiamo che la funzione compensatrice  $R(s)$  debba solo garantire che **i poli di  $W(s)$  abbiano  $Re[ ] \leq 0$  (AS)**
- ulteriori specifiche (entità errore, transitorio): dopo

- si assuma che la FdT  $P(s)$  sia **priva di zeri a  $Re[s] \geq 0$**  (processo **a fase minima**), cosicché tutti gli **zeri** siano nel **semipiano sinistro**
- la FdT del processo modificato  $\hat{F}(s) = P(s)/s^h$  ha gli **stessi zeri**
- per  $k \rightarrow +\infty$ ,  **$m$  rami** del LdR<sup>+</sup> (e cioè  $m$  poli di  $W(s)$ ) convergeranno sugli zeri (R3), e quindi nel **semipiano sinistro**
- i restanti  **$n - m$  rami** (qui  $n$  indica il numero di poli di  $\hat{F}(s)$ ) convergeranno sugli **asintoti del LdR<sup>+</sup>**; questi ultimi giacciono **interamente nel semipiano sinistro** solo in due casi:
  - a.  $n - m = 1$
  - b.  $n - m = 2$  e  $s_0 < 0$
- la stabilizzazione dei sistemi a fase minima consiste dunque nel **ricondersi a uno di questi due casi** e successivamente usare un  **$k$  sufficientemente grande**



# stabilizzazione di processi a fase minima: algoritmo

1. porre  $R(s) = k_R$  e verificare se esistono valori di  $k_R$  per cui il sistema retroazionato è AS (LdR+CdR); altrimenti proseguire
2. se  $n - m > 2$ , riportare il grado relativo a 2 aggiungendo  $n - m - 2$  zeri in  $R(s)$
3. (ora  $n - m = 2$ ) se:
  - a.  $s_0 < 0$ : scegliere un  $k_R$  abbastanza elevato (CdR) da garantire AS
  - b.  $s_0 \geq 0$ : spostare il centro degli asintoti nel semipiano sinistro aggiungendo in  $R(s)$  una coppia polo-zero, e poi scegliere un  $k_R$  abbastanza elevato (CdR) da garantire AS
4. se necessario, recuperare la realizzabilità del controllore  $G(s)$  aggiungendo poli sufficientemente 'lontani'

## note sull'algoritmo

- se la  $\hat{F}(s) = P(s)/s^h$  ha  $n - m = 1$ , oppure  $n - m = 2$  e  $s_0 < 0$ , l'algoritmo si arresterà certamente al passo 1
- al passo 2: gli **zeri eventualmente aggiunti devono essere nel semipiano sinistro** per preservare la proprietà di fase minima
- al passo 2: se possibile, scegliere gli zeri da aggiungere in modo da ottenere un centro degli asintoti nel semipiano sinistro
- al passo 3b: con la coppia polo-zero nella forma  $\frac{s + \bar{z}}{s + \bar{p}}$  si ha

$$s'_0 = s_0 - \frac{\bar{p} - \bar{z}}{2}$$

spostamento del  
centro degli asintoti

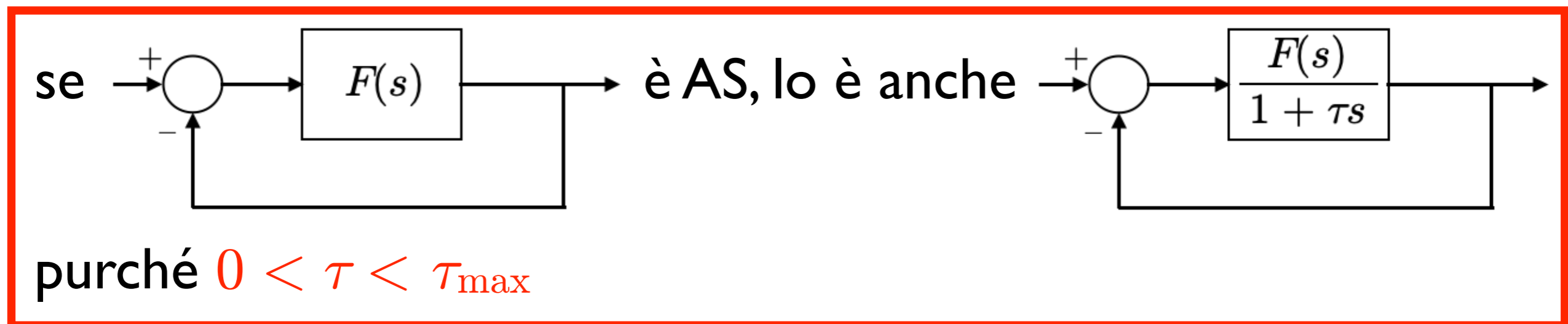
e si dovrà quindi scegliere  **$\bar{p}$  sufficientemente maggiore di  $\bar{z}$** , oltre che  **$\bar{z} > 0$**  per preservare la proprietà di fase minima

- al passo 4: nel caso generale il controllore assume la forma

$$G(s) = k_R \frac{(s + \bar{z}_1) \dots (s + \bar{z}_{n+m-2}) (s + \bar{z})}{s^h (s + \bar{p})}$$

se questa risulta essere impropria (dunque irrealizzabile) si può rendere propria aggiungendo **un numero opportuno di poli nella forma  $1 + \tau s$** , con  $\tau$  sufficientemente piccolo

- infatti si ha la seguente proposizione:



**dim** dal CdN, considerando che un polo nella forma  $1 + \tau s$  non modifica il ddN nell'intorno del punto critico se  $\tau$  è abbastanza piccolo

- per il calcolo di  $\tau_{\max}$  si può usare il CdR

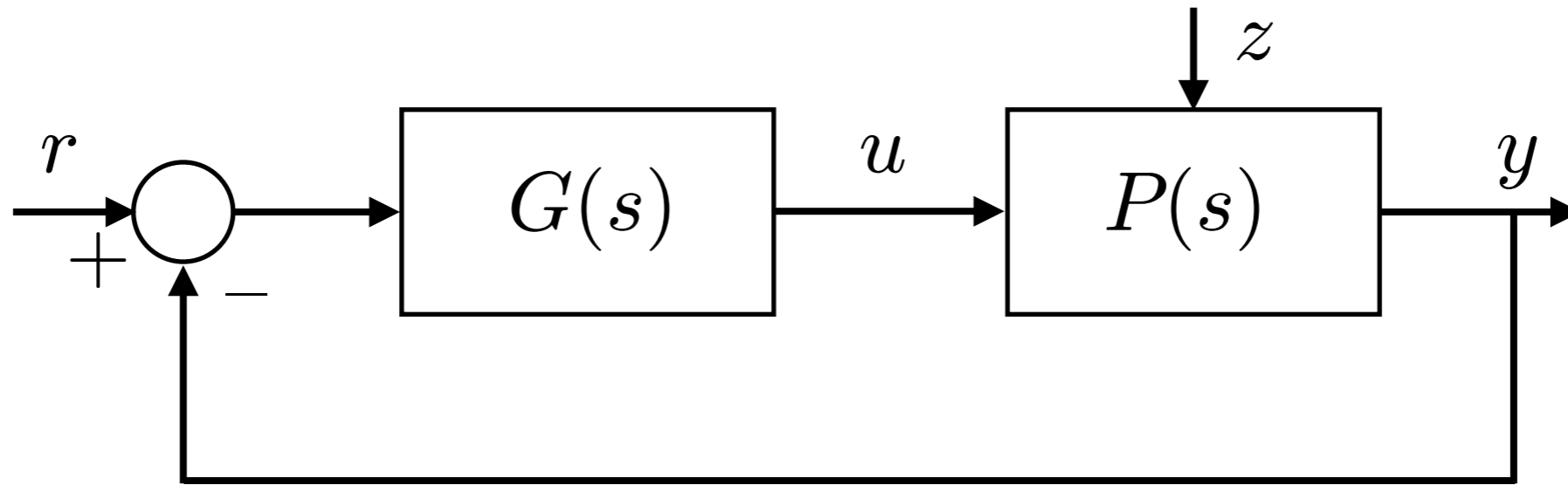
# implicazioni dell'algoritmo di stabilizzazione

- un processo a fase minima avente grado relativo  $n - m$  può sempre essere stabilizzato con un controllore di dimensione  $n - m - 1$ 
  - infatti: se l'obiettivo è solo la stabilizzazione, il controllore risulta dalla successione dei passi 2, 3 e 4, che conducono appunto a tale dimensione
- un processo a fase minima può sempre essere stabilizzato con un controllore asintoticamente stabile (**stabilizzabilità forte**)
  - infatti: se l'obiettivo è solo la stabilizzazione, il controllore risulta dalla successione dei passi 2, 3 e 4, che prevedono l'aggiunta di poli esclusivamente nel semipiano sinistro

## specifiche aggiuntive

- in presenza di una richiesta del tipo  $|k_F| \geq \dots$ , proveniente da specifiche sull'entità dell'errore (o della risposta al disturbo) a regime, il valore di  $k_R$  dovrà essere sufficientemente grande da soddisfare anche questa (oltre che garantire la AS)
- se, invece della semplice AS, si richiedono poli con  $Re[\ ] \leq -a$  (cfr: slide 3), sia gli **eventuali zeri** aggiunti dall'algoritmo (su cui convergono altrettanti poli di  $W(s)$ ) che il **centro degli asintoti** dovranno rispettare la **stessa condizione**, e il valore minimo di  $k_R$  andrà calcolato applicando il CdR al polinomio  $D_W(s - 1)$
- se, invece della semplice AS, si richiedono poli con  $\zeta \geq \sin \psi$  (cfr: slide 3), gli **eventuali zeri** aggiunti dall'algoritmo dovranno rispettare la **stessa condizione**, e il valore minimo di  $k_R$  andrà calcolato applicando il CdR al polinomio  $D_W(s e^{j\psi}) \cdot D_W(s e^{-j\psi})$

# progetto per assegnazione dei poli



- se la  $P(s)$  ha degli zeri a  $Re[ ] > 0$  (processo a fase non minima), l'algoritmo di stabilizzazione non può essere applicato
- il LdR può essere ancora utilizzato per verificare se è possibile risolvere il problema con un semplice guadagno (solo passo I)
- se questo non è possibile, però, il LdR non fornisce indicazioni utili per la stabilizzazione (se non in casi molto semplici)
- in questo caso la soluzione può essere ricercata procedendo in modo algebrico, in particolare scegliendo  $G(s)$  in modo che i poli del sistema retroazionato coincidano con dei valori assegnati

- dato il processo

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

con  $n > m$ , si ponga il controllore nella forma parametrica

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} = \frac{d_r s^r + d_{r-1} s^{r-1} + \dots + d_1 s + d_0}{s^r + c_{r-1} s^{r-1} + \dots + c_1 s + c_0}$$

- il grado  $r$  e i  $2r+1$  coefficienti  $c_{r-1}, \dots, c_0, d_r, \dots, d_0$  vanno scelti in modo da imporre che il denominatore di  $W(s)$

$$D_W(s) = D_F(s) + N_F(s) = D_G(s)D_P(s) + N_G(s)N_P(s)$$

coincida con il polinomio desiderato  $D_W^*(s)$

$$D_G(s)D_P(s) + N_G(s)N_P(s) = D_W^*(s)$$

- poiché  $D_W(s)$  è monico e ha grado  $n+r$ , anche  $D_W^*(s)$  dovrà esserlo; quindi, per imporre l'identità dei due polinomi basterà eguagliare i coefficienti dei termini di grado  $n+r-1, \dots, 0$
- si ottiene quindi un sistema di  $n+r$  equazioni **lineari** nelle  $2r+1$  incognite  $c_{r-1}, \dots, c_0, d_r, \dots, d_0$
- il sistema ammette un'unica soluzione se  $n+r = 2r+1$ , cioè se

$$r = n - 1$$

quindi: dato un processo con  $P(s)$  di ordine  $n$ , si può usare un controllore con  $G(s)$  **semplicemente propria** e di ordine  $n-1$  per assegnare a piacere gli  $2n-1$  poli del sistema retroazionato

- essendo  $n-1 \geq n-m-1$ , il controllore risultante avrà ordine sempre **maggiore o uguale** a quello del controllore stabilizzante (cfr: slide 20) e potrà avere **zeri e/o poli nel semipiano destro**



- questo metodo si può utilizzare anche nel caso in cui la  $G(s)$  debba avere dei poli fissi (nell'origine per tipo e/o astatismo, o immaginari per riproduzione di riferimenti sinusoidali); si pone

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G^f(s)D_G^l(s)}$$

dove  $D_G^f(s)$  e  $D_G^l(s)$  sono rispettivamente la parte **fissa** di  $G(s)$ , di grado  $n_G^f$ , e quella **libera**, di grado  $n_G^l$

- i parametri liberi sono quindi gli  $n_G^l$  coefficienti di  $D_G^l(s)$  (che è monico) e gli  $n_G^l + n_G^f + 1$  coefficienti di  $N_G(s)$
- procedendo come prima e uguagliando il numero di equazioni a quello delle incognite si trova  $2n_G^l + n_G^f + 1 = n + n_G^l + n_G^f$ , cioè

$$n_G^l = n - 1$$

che generalizza il risultato precedente

- in conclusione, si può fare un confronto tra i due metodi di progetto nel dominio di Laplace analizzati fin qui

progetto con il LdR	progetto per assegnazione dei poli
algoritmico per processi a fase minima	sempre algoritmico
controllore di ordine minimo	controllore di ordine fisso
poli di $W(s)$ lungo i rami del LdR	poli di $W(s)$ in posizioni arbitrarie