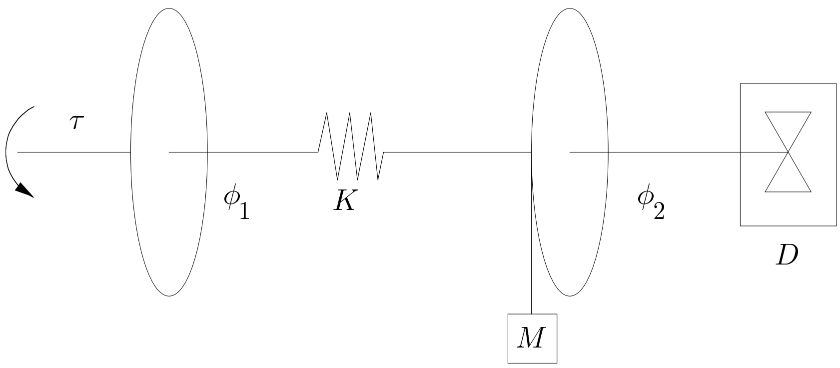
CONTROLLI AUTOMATICI I modulo
Prova Intermedia di Autovalutazione – Aprile 2000

Problema 1

Per il sistema in figura



si ricavi una rappresentazione con lo spazio di stato, assumendo come ingresso τ (coppia) e come uscita ϕ_2 (posizione angolare del secondo volano). I blocchi indicati con K e con D rappresentano rispettivamente una molla torsionale e uno smorzatore di velocità angolare. I due volani sono identici e hanno raggio r e momento d'inerzia J. Che ruolo svolge la forza di gravità in questo modello?

Problema 2

Dato il sistema lineare

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

si determinino *tutti* gli stati iniziali x_0 cui corrisponde un'uscita $y(t)$ limitata in evoluzione libera.

Problema 3

Dato il sistema avente funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{1-s}{s^2+3s+9}$$

e sottoposto a un ingresso a gradino a partire da condizioni nulle, si determini l'andamento temporale dell'uscita, e in particolare il suo valore per $t = 0$ e $t \to \infty$.

Problema 4

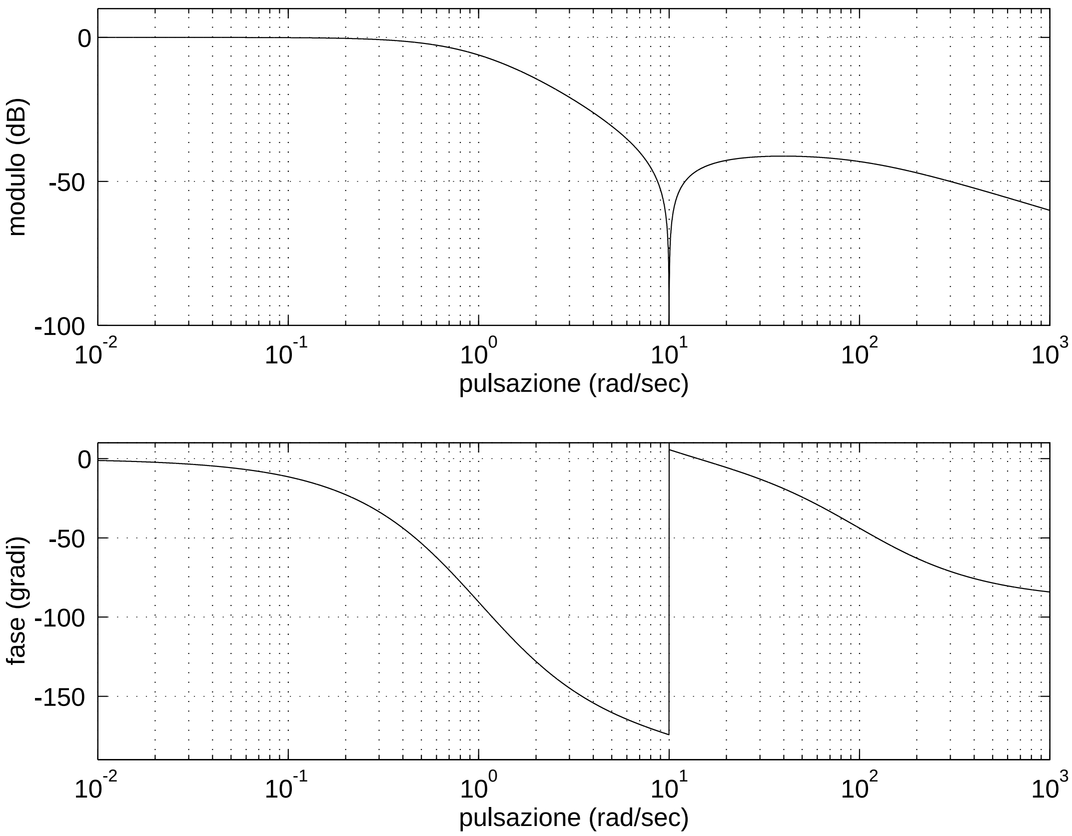
Mediante il criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema a controreazione unitaria avente la seguente funzione di trasferimento sul ramo diretto

$$F(s) = k\frac{s-a}{s(s+a)} \qquad a > 1,$$

al variare del parametro k (valori positivi e negativi). In particolare, si determinino eventuali valori critici di k.

Problema 5

La risposta armonica in figura è stata determinata sperimentalmente.



Si determini la funzione di trasferimento del sistema e si tracci il corrispondente diagramma di Nyquist. Infine, si calcoli la risposta a regime per un ingresso a gradino di ampiezza pari a 2.

CONTROLLI AUTOMATICI I modulo
Prova Intermedia di Autovalutazione – Aprile 2000
Traccia di Soluzione

Problema 1

Le equazioni del sistema sono

$$\begin{aligned} J\ddot{\phi}_1 &= \tau - K(\phi_1 - \phi_2) \\ J\ddot{\phi}_2 &= Mgr - K(\phi_2 - \phi_1) - D\dot{\phi}_2 \end{aligned}$$

con ϕ_1, ϕ_2 positive nello stesso verso di di τ e tali che per $\phi_1 = \phi_2$ la molla è indeformata. Ponendo

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \phi_2 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} \qquad u = \tau \qquad d = Mgr \qquad y = \phi_2$$

si ottiene la seguente rappresentazione lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K}{J}x_1 + \frac{K}{J}x_3 + \frac{1}{J}u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{K}{J}x_1 - \frac{K}{J}x_3 - \frac{D}{J}x_4 + d \\ y &= x_3 \end{aligned}$$

in cui $d = Mgr$ è da considerarsi un disturbo costante.

Problema 2

Gli autovalori del sistema sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 2$, con i corrispondenti autovettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Posto $x_0 = \sum_{i=1}^{3} c_i v_i$, ed essendo $Cv_1 = 0$, l'uscita in evoluzione libera è data da

$$y(t) = Ce^{At}x_0 = \sum_{i=1}^{3} Ce^{\lambda_i t} c_i v_i = e^{-t}c_2 Cv_2 + e^{2t}c_3 Cv_3$$

In conclusione, y si mantiene limitata se e solo se $c_3 = 0$, cioè a partire da stati iniziali

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{con } c_1, c_2 \text{ arbitrari}$$

Problema 3

L'uscita è

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+a+jb} + \frac{B^*}{s+a-jb}\right)$$

in cui si trova $a = 1.5$, $b = \sqrt{27}/2$ e, attraverso le formule dei residui, $A = 1/9$ e $B = c + jd = -1/18 - j7\sqrt{3}/54$. Si ha quindi

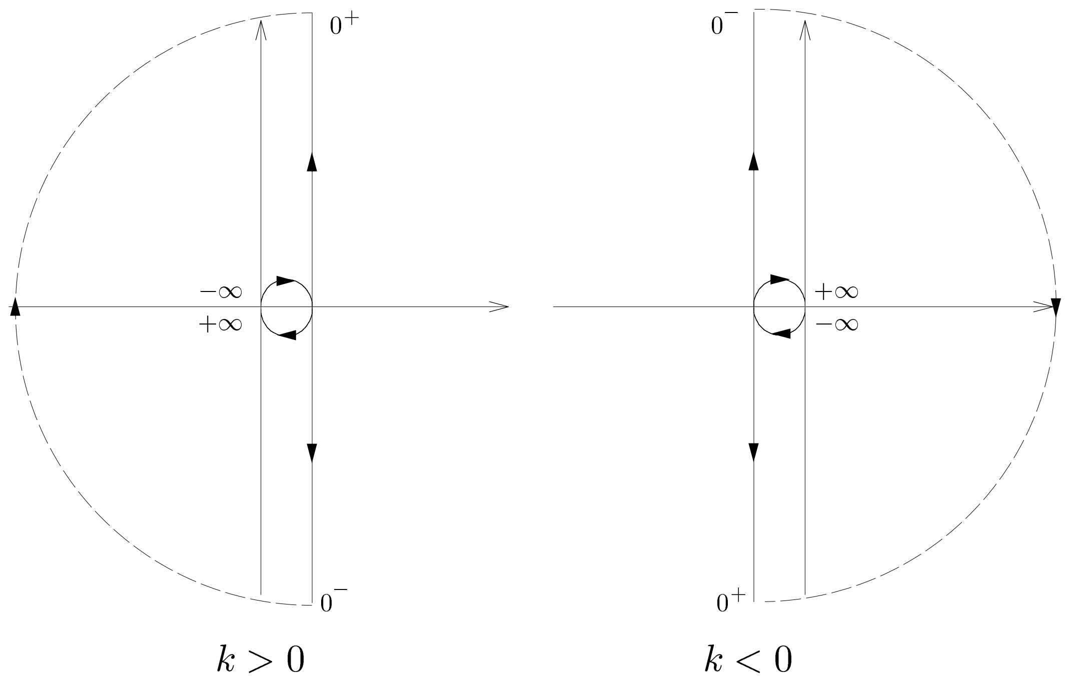
$$y(t) = A\delta_{-1}(t) + e^{-at}\left(Be^{-jbt} + B^* e^{jbt}\right)\delta_{-1}(t) = A\delta_{-1}(t) + 2e^{-at}(c\cos bt + d\sin bt)\delta_{-1}(t)$$

in cui si è utilizzata la formula di Eulero. Il valore dell'uscita per $t = 0$ e $t \to \infty$ si può ricavare da quest'ultima espressione oppure utilizzando i teoremi del valore iniziale e finale. Si trova

$$y(0) = 0 \qquad y(\infty) = 1/9.$$

Problema 4

Si hanno i seguenti diagrammi qualitativi di Nyquist.



Se ne deduce che il sistema retroazionato è instabile per $k > 0$, è stabile asintoticamente per $k^* < k < 0$, ed è ancora instabile per $k < k^*$. Essendo inoltre il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso pari a

$$D_W(s) = N_P(s) + D_P(s) = s^2 + (a+k)s - ak$$

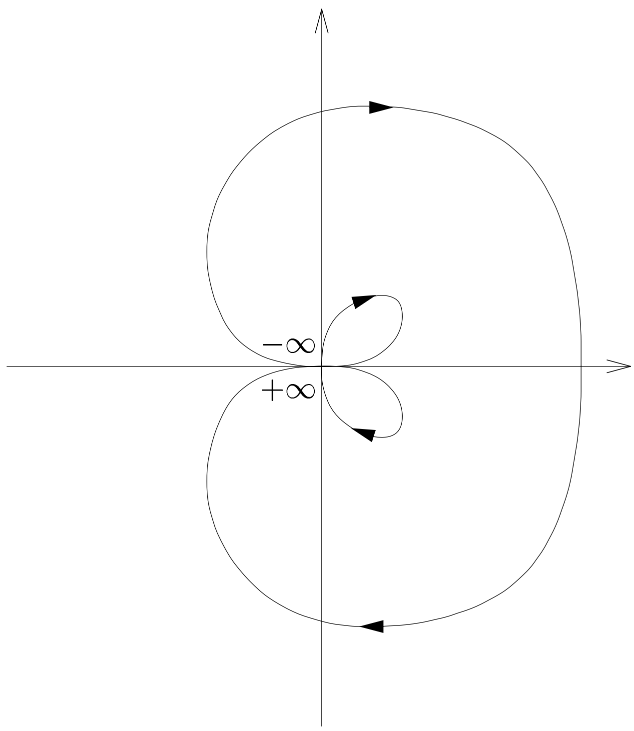
si trova immediatamente $k^* = -a$. Per $k = 0$ e $k = -a$, il sistema retroazionato è semplicemente stabile.

Problema 5

L'ispezione del diagramma di Bode ricavato sperimentalmente suggerisce

$$P(s) = \frac{s^2 + 100}{(s+1)^2(s+100)}$$

Il diagramma di Nyquist qualitativo è il seguente.



Infine, la risposta a regime richiesta vale

$$y_r(t) = 2P(0) = 2$$

Prova scritta di CONTROLLI AUTOMATICI – I Modulo
5 Giugno 2000

Problema 1

Per il processo avente funzione di trasferimento

$$P(s) = 0.01\,\frac{s^2 - 100}{s^2 + 2s + 1}$$

si progetti un sistema di controllo a retroazione unitaria in grado di soddisfare le seguenti specifiche:

- stabilità asintotica;
- errore a regime nullo per ingressi di riferimento a gradino di ampiezza qualsiasi;
- banda passante ad anello chiuso all'incirca pari a 1.5 rad/sec;
- margine di fase non inferiore a $40°$.

Problema 2

Si consideri un sistema di controllo a retroazione unitaria in cui la funzione di trasferimento del ramo diretto vale

$$F(s) = k\,\frac{as + 1}{s(s-1)} \qquad 0.05 < a < 1$$

a) Mediante il criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema di controllo al variare di $k > 0$; in particolare, si determinino eventuali valori critici di k.

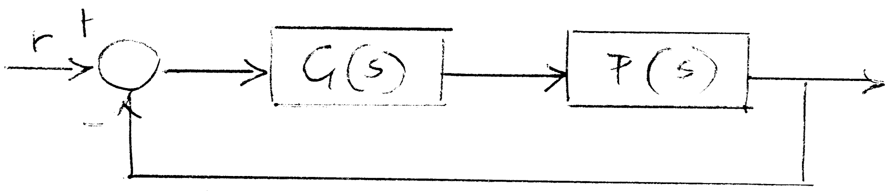
b) Si scelga k in modo da garantire che il sistema di controllo sia asintoticamente stabile e, contemporaneamente, che l'errore a regime per un ingresso di riferimento $r(t) = 3t$ sia non superiore a 0.1.

Tema

Dato un sistema lineare asintoticamente stabile, si dimostri che la sua risposta a regime permanente a un ingresso sinusoidale è essa stessa una funzione sinusoidale, e si definisca di conseguenza il concetto di risposta armonica.

PROVA SCRITTA DI CONTROLLI AUTOMATICI – I MODULO DEL 5/6/2000

TRACCIA DI SOLUZIONE

① 

$$G(s) = \frac{K_G}{s^h} R(s)$$

specifica su errore r.p. $\Longleftrightarrow$ tipo 1 $\Longleftrightarrow$ $h = 1$

Inoltre, essendo $P(s) = -\frac{(1+0.1s)(1-0.1s)}{(1+s)^2}$

conviene porre $K_G = -1$ in modo da rendere positivo il guadagno di $F(s) = G(s)P(s)$; ciò consentirà di ottenere la stabilità asintotica e in particolare $m_\varphi \geq 40°$ utilizzando una rete anticipatrice

Si ha il processo modificato

$$\hat{F}(s) = \frac{K_G}{s} P(s) = \frac{(1+0.1s)(1-0.1s)}{s(1+s)^2}$$

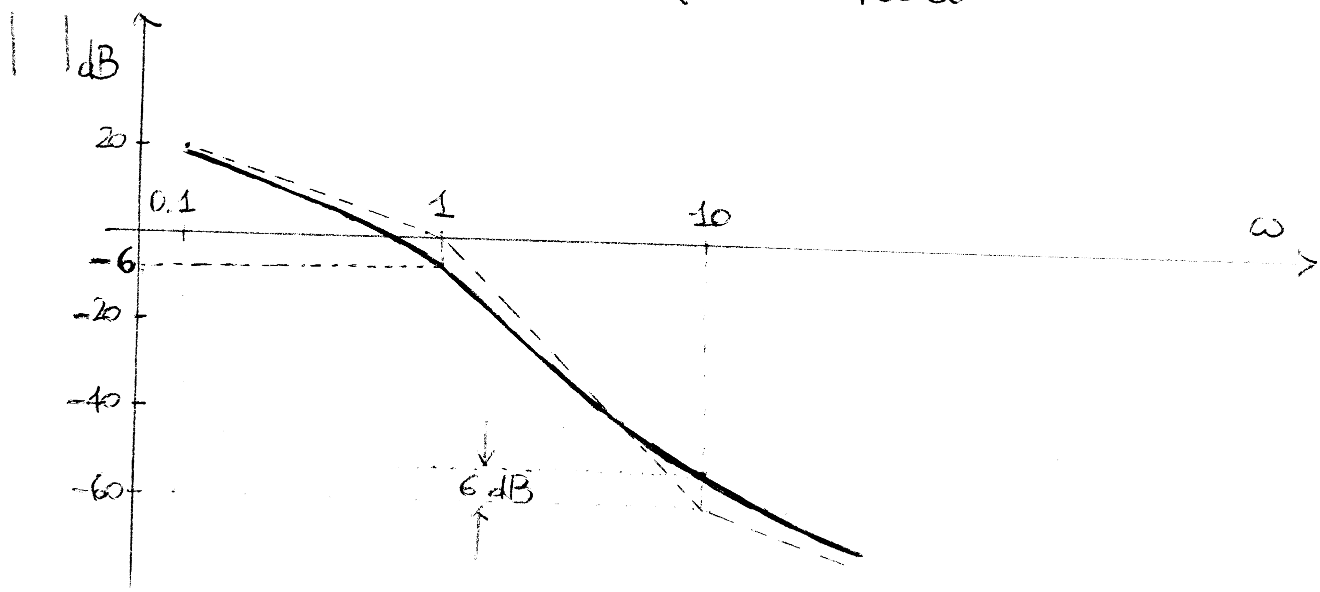
dai diagrammi di Bode di $\hat{F}(s)$ si deduce che è necessaria un'amplificazione di circa 6 dB e un anticipo $\geq 40°$ in corrispondenza a $\omega_t^* = 1$ rad/sec (si ricordi che $B_3 \simeq (1.5 \div 1.7) \cdot \omega_t$)

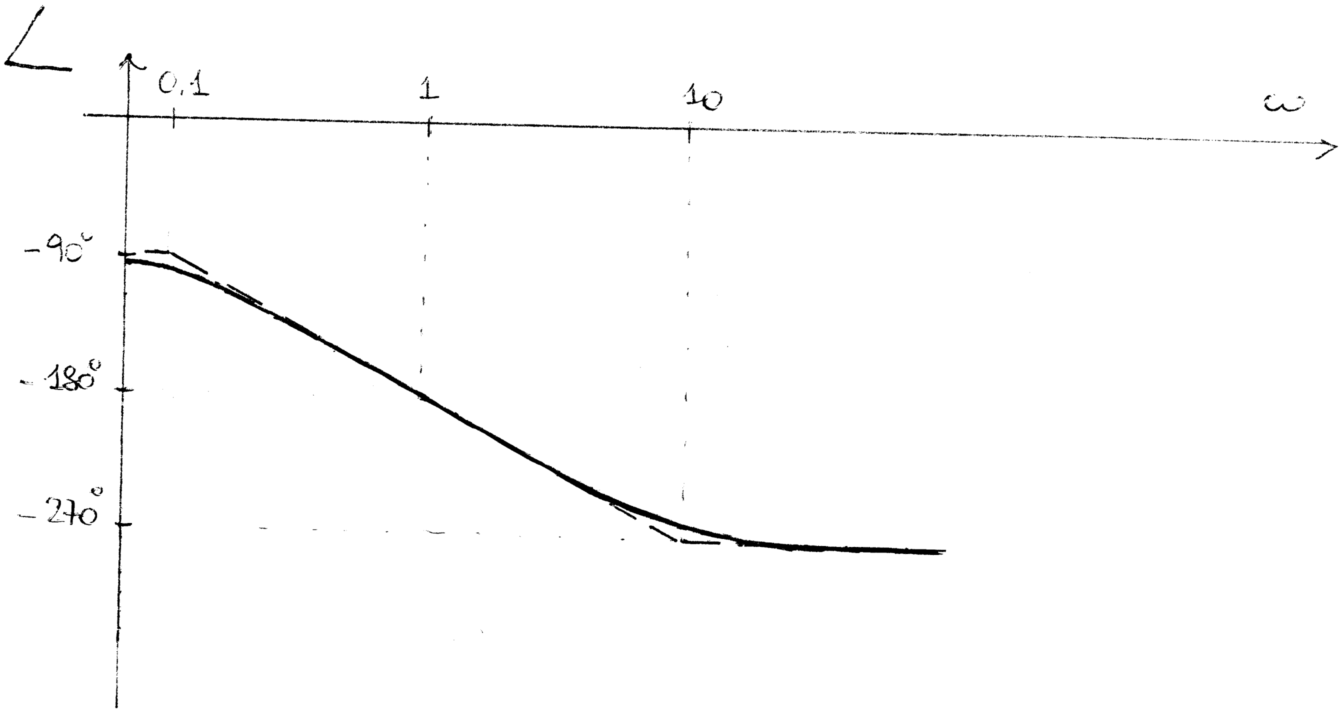
Una possibile soluzione è utilizzare una rete anticipatrice con $m_a = 6$ e pulsazione normalizzata $\omega\tau_a = 2$

$\Rightarrow \omega\tau_a = 2$ per $\omega = \omega_t^* = 1 \Rightarrow \tau_a = 2$

$$\Rightarrow R_a(s) = \frac{1+2s}{1+\frac{1}{3}s} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{-(1+2s)}{s\left(1+\frac{1}{3}s\right)}$$

Diag. di Bode di $\hat{F}(j\omega)$ $\left\{ \begin{array}{ll} - - - & \text{asintotici} \\ \text{———} & \text{reali} \end{array} \right.$



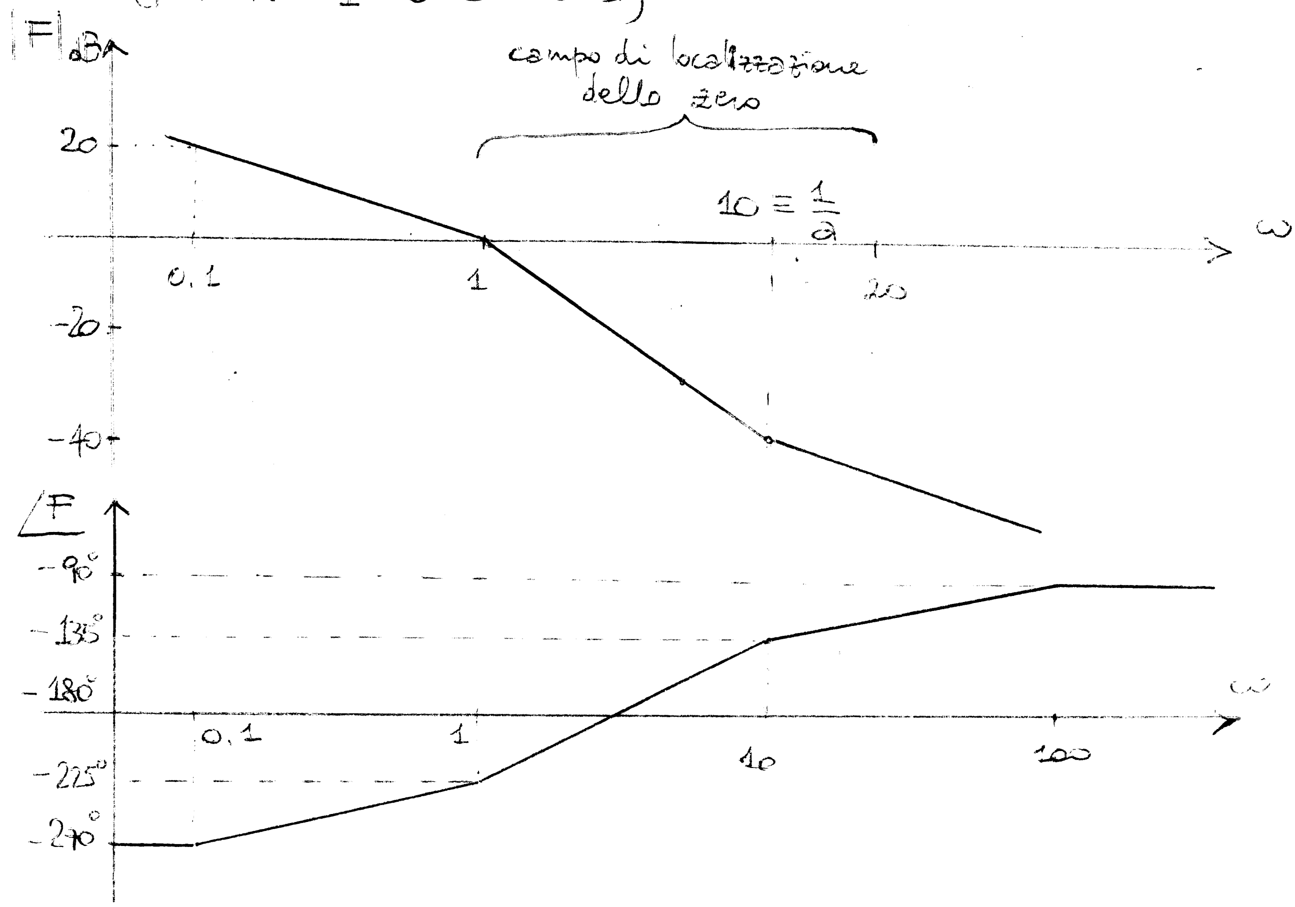


Il risultato finale è $\omega_t = 1$ rad/sec , $m_\varphi = 42°$

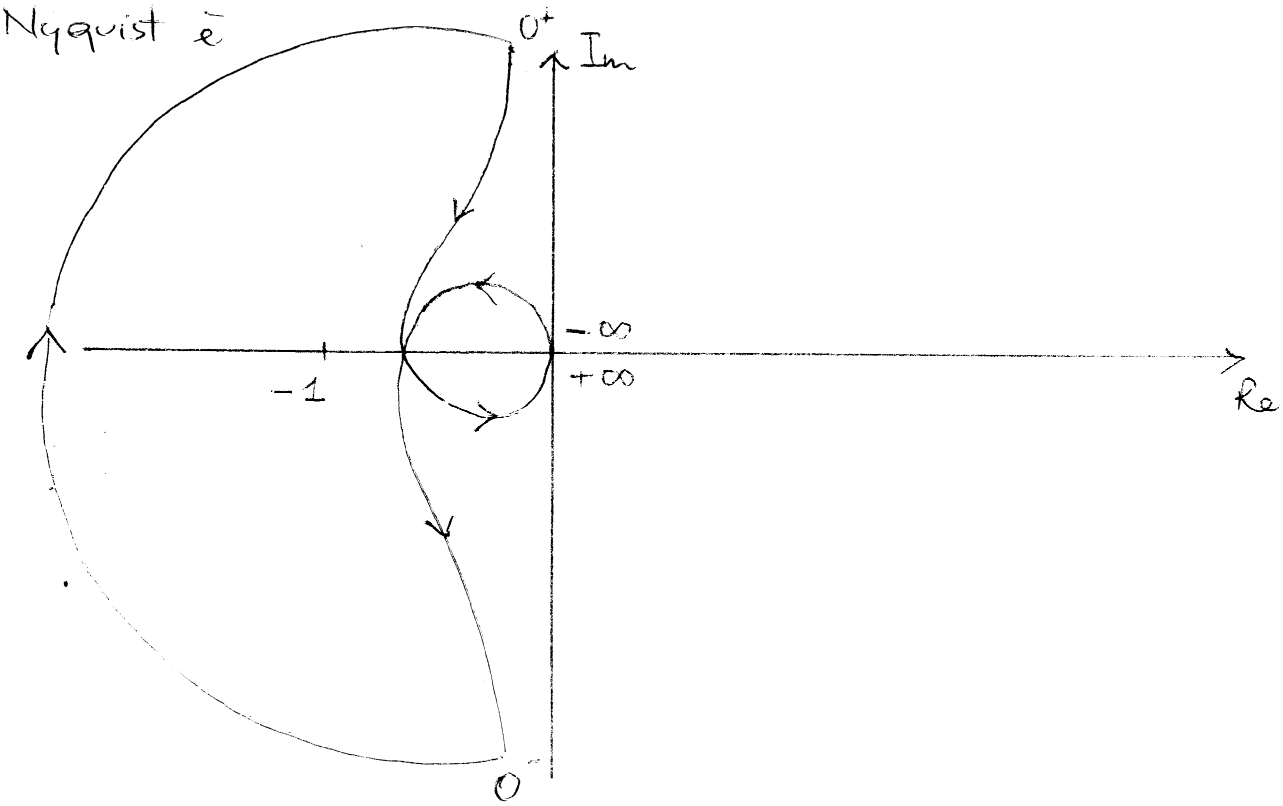
Calcolando $W(s) = \dfrac{F(s)}{1+F(s)}$ e diagrammando $|F(j\omega)|$

si trova $B_3 \simeq 1.8$ rad/sec , con una accuratezza accettabile.

② I diagrammi di Bode (asintotici) di $F(j\omega)$ sono i seguenti (per $K = 1$ e $a = 0.1$)



e non variano sostanzialmente al variare di a. Il diagramma di Nyquist è



a)

$N^{\circlearrowright} = 1 \neq -n_F^+ = -1 \Rightarrow$ sistema INSTABILE ad anello chiuso

Per valori di k prossimi a zero, si ha $N^{\circlearrowright} = 0 \neq -n_F^+$

$\Rightarrow$ il sistema è INSTABILE ad anello chiuso

Per valori di K sufficientemente grandi, si ha

$N^{\circlearrowleft} = -1 = -n_F^+ \implies$ sistema ASINT. STABILE ad anello chiuso

Per individuare il valore critico di K, si osservi che la funzione di trasferimento ad anello chiuso è

$$W(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)} = \frac{K(as+1)}{s(s-1)+K(as+1)}$$ il cui denominatore è

$$D_W(s) = s^2 + (Ka-1)s + K$$

e dunque si ha stabilità asintotica per $K > \frac{1}{a}$

b) Essendo $a > 0.05$, si ha $\frac{1}{a} < 20$, per cui $K > 20$ garantisce la stabilità asintotica in tutto il campo di variazione di a. Inoltre, l'errore a regime per un ingresso di riferimento pari a $3t$ vale (si noti che $F(s)$ è di tipo 1 e $K_F = -K$)

$$e = 3 \cdot e_1 = 3 \frac{1}{K_F} = -\frac{3}{K}$$ e dunque si deve avere

$$\left| -\frac{3}{K} \right| \leq 0.1 \implies K \geq 30$$ che garantisce anche la stabilità asintotica ad anello chiuso.

Prova scritta di CONTROLLI AUTOMATICI – I Modulo
13 Giugno 2000

Problema 1

Per il processo avente funzione di trasferimento

$$P(s) = 200\,\frac{s+1}{(s+10)(s+20)}$$

si progetti un sistema di controllo a retroazione unitaria tale che:

- in corrispondenza a ingressi di riferimento a gradino, si abbia errore a regime limitato;
- in corrispondenza a disturbi della forma $d(t) = \cos\omega t$ che si sommino all'uscita del processo, si abbia risposta a regime nulla per $\omega = 0$ e non superiore a 0.1 per tutti i valori di ω compresi tra 0 e 1.

Problema 2

Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

individuato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \epsilon \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$ (*suggerimento*: si utilizzi la definizione di esponenziale di matrice) e la risposta impulsiva $W(t)$.

b) Posto $\epsilon = 0$, determinare (se esiste) un valore di α tale che, applicando l'ingresso

$$u(t) = \alpha e^{-t}$$

a partire dall'istante $t_0 = 0$ e con condizioni iniziali nulle, si abbia

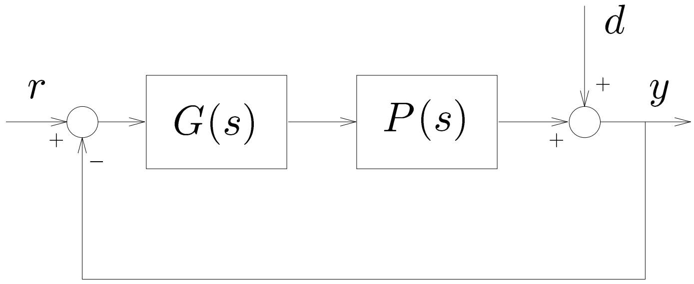
$$y(1) = 1 + \alpha.$$

Tema

Dato un sistema dinamico lineare e stazionario, si illustri la relazione tra gli autovalori della sua matrice dinamica e i poli della corrispondente funzione di trasferimento.

Problema 1

Il sistema di controllo avrà la struttura mostrata in figura.



La prima specifica equivale a richiedere un sistema di tipo ≥ 0, ed è quindi automaticamente soddisfatta se il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente. Per quanto riguarda la seconda specifica, si osservi innanzitutto che per $\omega = 0$ il disturbo è costante; per avere astatismo in questo caso è dunque necessario introdurre nella funzione di trasferimento del controllore $G(s)$ un polo nell'origine. Si pone allora

$$G(s) = \frac{K_G}{s} R(s)$$

Venendo alla seconda parte della seconda specifica, essa richiede che si abbia

$$|W_d(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + F(j\omega)} \right| \leq 0.1 \qquad \omega \in [0, 1]$$

dove $F(s) = G(s)P(s)$ è la funzione di trasferimento del ramo diretto. Nella banda suddetta, si deve dunque avere $|1 + F(j\omega)| \geq 10$. Essendo $|1 + F(j\omega)| \geq |F(j\omega)| - 1$, la precedente disequazione è certamente soddisfatta se

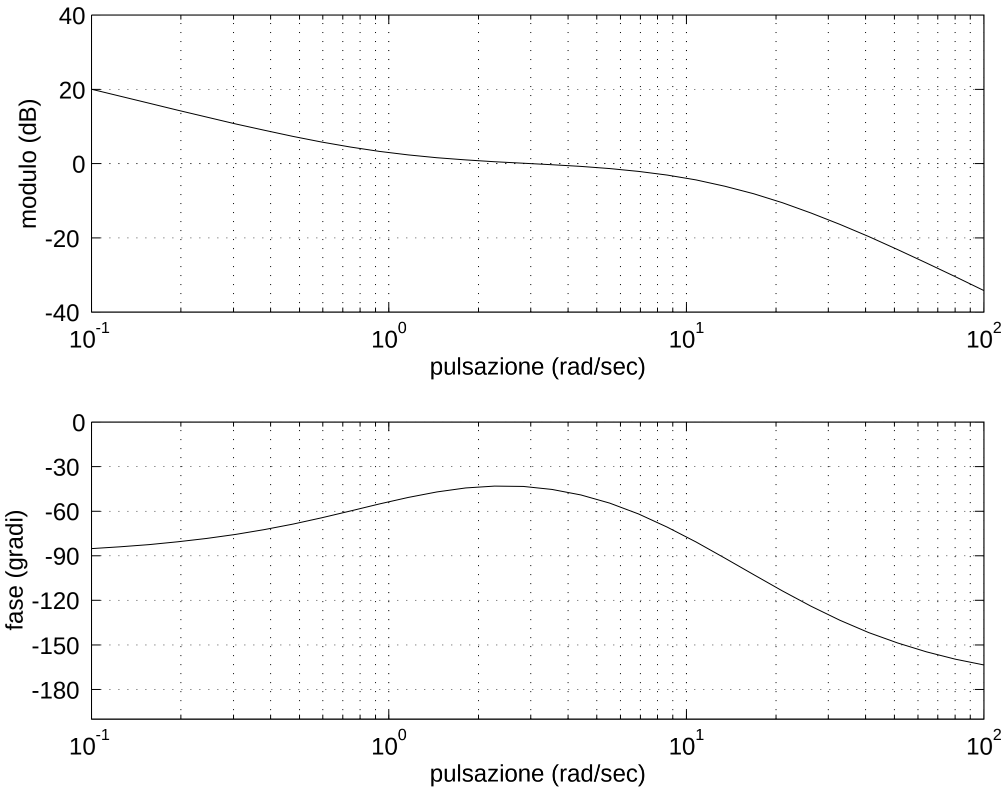
$$|F(j\omega)| - 1 \geq 10 \qquad \text{cioè se} \qquad |F(j\omega)| \geq 11 \approx 21\text{dB} \qquad \omega \in [0, 1]$$

Conviene a questo punto tracciare i diagrammi di Bode (pagina seguente) di

$$\hat{F}(j\omega) = \frac{K_G}{s} P(s) = 200 \, \frac{s + 1}{s(s + 10)(s + 20)}$$

L'analisi dei diagramma delle fasi rivela che queste ultime si mantengono sempre al di sopra dei 180°; di conseguenza, è possibile risolvere il problema con un semplice guadagno K_G (che innalzi il diagramma dei moduli abbastanza da soddisfare la specifica nella banda di interesse) e senza alcuna azione di compensazione ($R(s) = 1$). Poiché $|\hat{F}(j1)| \approx 3$ dB, si può porre ad esempio $K_G = 20$ dB $= 10$. Il controllore risultante è pertanto

$$G(s) = \frac{10}{s}$$



Problema 2

a) Essendo

$$A^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & -\epsilon k(-1)^k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$$

si trova facilmente

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k = \begin{pmatrix} e^{-t} & \epsilon\, t\, e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \qquad W(t) = C\Phi(t)B = e^{-t}$$

b) Nel dominio di s, la risposta forzata è

$$y(s) = W(s)u(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{\alpha}{s+1} = \frac{\alpha}{(s+1)^2}.$$

Antitrasformando si ha

$$y(t) = \alpha\, t\, e^{-t}$$

e quindi, imponendo il valore desiderato di y per $t = 1$ si trova

$$\alpha = \frac{e}{1-e}.$$

Prova scritta di CONTROLLI AUTOMATICI I modulo
14 giugno 2004

Problema 1

Per il processo avente funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{s+10}{s(s+100)}$$

si progetti uno schema di controllo in grado di garantire le seguenti specifiche:

a) errore a regime non superiore a 0.14 per un riferimento $r(t) = t^2/2$, in presenza di un disturbo costante ignoto che si somma all'ingresso del processo;

b) stabilità asintotica;

c) pulsazione di attraversamento $\omega_t \approx 1$ rad/sec, margine di fase $m_\varphi \geq 40°$.

Problema 2

Si consideri il sistema a retroazione unitaria avente la seguente funzione di trasferimento ad anello aperto:

$$F(s) = k\,\frac{s+1}{s(s-1)(s+10)}$$

Usando il criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema al variare di k, positivo o negativo. Si identifichino eventuali valori critici di k mediante il criterio di Routh.

Problema 3

Rispondere alle seguenti domande annerendo il cerchietto corrispondente alle risposte 'vere' (*attenzione: possono esserci più risposte vere per la medesima domanda*).

- Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ la cui matrice dinamica ha due autovalori: $\lambda_1 = -1$, raggiungibile ma non osservabile, e $\lambda_2 = 1$, non raggiungibile ma osservabile. Allora:

  ○ la sua funzione di trasferimento è nulla;
  ○ la sua funzione di trasferimento è nulla solo se $D = 0$;
  ○ ci sono infinite condizioni iniziali per cui l'evoluzione libera nello stato diverge;
  ○ ci sono infinite condizioni iniziali per cui l'evoluzione libera nello stato converge;
  ○ se $D = 0$, l'uscita del sistema è nulla per qualsiasi condizione iniziale.

- Si consideri il sistema ottenuto chiudendo in retroazione unitaria una funzione di trasferimento $F(s)$ costituita da un guadagno positivo, uno zero a parte reale positiva e due poli a parte reale negativa. Allora:

  ○ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per qualsiasi valore del guadagno;
  ○ il sistema retroazionato diventa instabile per valori sufficientemente alti del guadagno;
  ○ il sistema retroazionato può avere guadagno unitario;
  ○ la risposta indiciale del sistema retroazionato può presentare oscillazioni smorzate;
  ○ la risposta indiciale del sistema retroazionato ha una sovraelongazione tanto minore quanto più alto è il guadagno del sistema.

CONTROLLI AUTOMATICI I modulo
Prova scritta del 14 giugno 2004

SOLUZIONE

Problema 1

La specifica a) implica che il sistema di controllo deve avere almeno tipo 2. Questo conduce all'aggiunta di un polo nell'origine nel controllore; tale polo garantirà anche astatismo rispetto al disturbo costante sull'ingresso del processo. Resta quindi da garantire che l'errore a regime resti nel limite assegnato, cioè

$$|e_1| = \frac{1}{|K_F|} = \frac{1}{|K_P K_G|} = \frac{1}{0.1 \cdot |K_G|} \leq 0.14 \qquad \Longrightarrow \qquad |K_G| \geq 71.43$$

Si ponga $K_G = 71.5 \approx 37$ dB (si è scelto il segno positivo per non pregiudicare la stabilità ad anello chiuso). Nel seguito della sintesi, non sarà possibile diminuire K_G, pena la violazione del limite sull'errore.

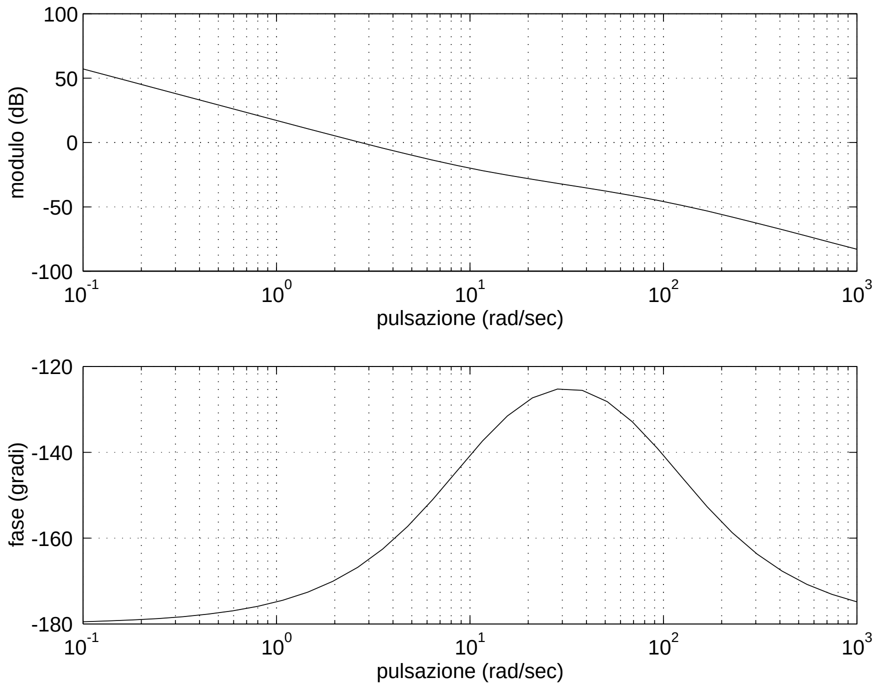
Si ha quindi

$$G(s) = \frac{K_G}{s}\,R(s) \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{F}(s) = \frac{K_G}{s}\,P(s) = 7.15\,\frac{1+0.1s}{s^2(1+0.01s)}$$

I diagrammi di Bode di $\hat{F}(s)$ (vedi figura seguente) indicano che in corrispondenza alla pulsazione di attraversamento desiderata $\omega_t^* = 1$ si ha

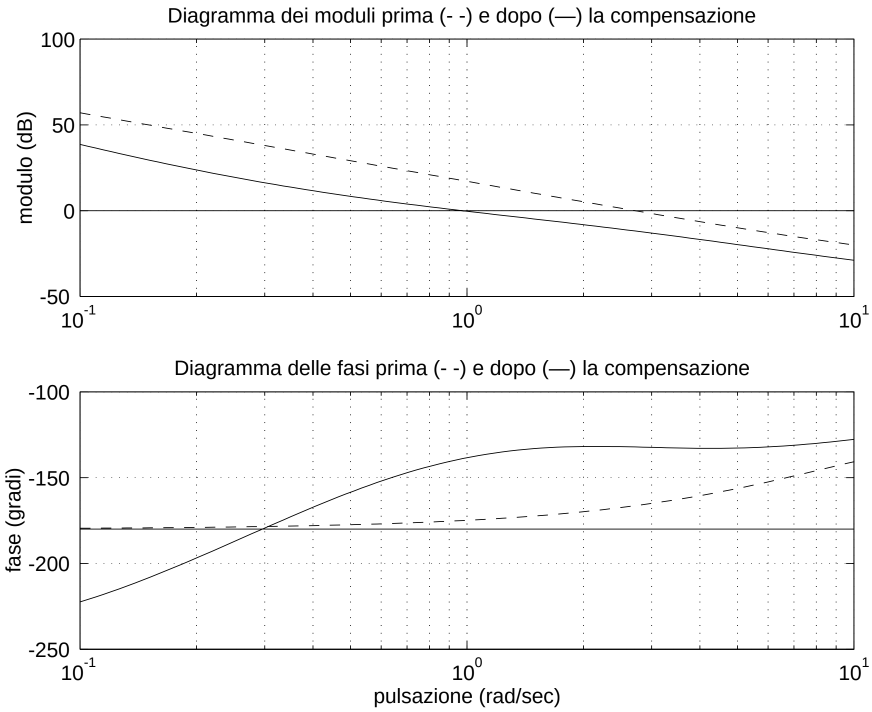
$$|\hat{F}(j1)| \approx 17\text{dB} \qquad\qquad \angle F(j1) \approx -174°$$

Per dedurre tali valori non è necessario un tracciamento accurato dei diagrammi: infatti si ha $|\hat{F}(j1)| = K_{\hat{F}} = 7.15 \approx 17$ dB (per costruzione, essendo presenti poli nell'origine) e $\angle F(j1) \approx -180° + 6° = -174°$ (correzione del diagramma asintotico dello zero una decade prima della pulsazione di rottura, pari a 10).



Poiché la compensazione deve fornire un'attenuazione di 17 dB e un anticipo di almeno 34° in $\omega_t^* = 1$, è necessario usare in modo combinato la funzione anticipatrice e quella attenuatrice.

Dai diagrammi universali, una possibile scelta per la funzione anticipatrice è $m = 6$ in $\omega\tau = 2$ (e quindi $\tau = 2$), che in $\omega_t^* = 1$ fornisce all'incirca un anticipo di 45° e un'amplificazione di 7 dB. Per completare il progetto si può usare la funzione attenuatrice $m = 16$ in $\omega\tau = 100$ (e quindi $\tau = 100$); si ottiene così in



$\omega_t^* = 1$ un anticipo netto di $45° - 9° = 36°$ e un'attenuazione netta di $7\text{dB} - 24\text{dB} = -17\text{dB}$. L'effetto della compensazione è evidente nella figura successiva.

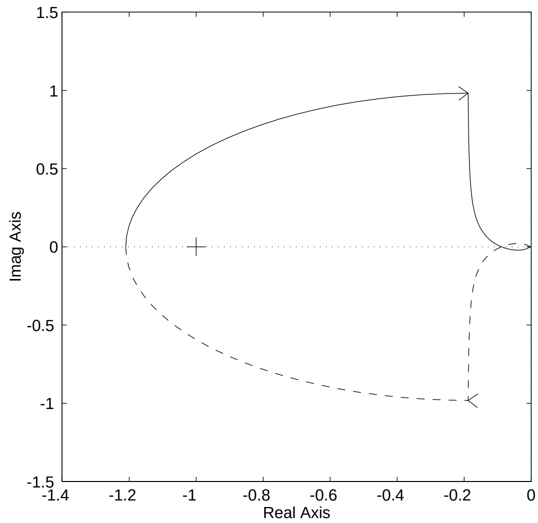
In conclusione, il controllore progettato ha funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{71.5}{s^2} \frac{1 + 2s}{1 + \dfrac{1}{3}s} \frac{1 + \dfrac{50}{8}s}{1 + 100s}$$

Il valore effettivo di pulsazione di attraversamento e margine di fase (valutato ad esempio con l'istruzione `margin` di MATLAB) risulta essere rispettivamente di 0.97 rad/sec e 41°.

Problema 2

Si osservi innanzitutto che $n_F^+ = 1$. Assumendo $k = 1$, il diagramma di Nyquist di $F(j\omega)$ è il seguente (si noti la chiusura all'infinito in senso orario).



Poiché il diagramma effettua un giro in senso *orario* intorno al punto critico, il criterio di Nyquist indica che il sistema ad anello chiuso è instabile. Tuttavia, aumentando sufficientemente il valore di k il diagramma effettuerà un giro in senso *antiorario* intorno al punto critico: si avrà quindi stabilità asintotica ad anello chiuso. Per $K < 0$, il diagramma non effettua alcun giro intorno al punto critico, e il sistema è sempre instabile ad anello chiuso.

Per ricavare il valore critico di k, si può applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso $W(s)$:

$$d_W(s) = s^3 + 9s^2 + (k-10)s + k$$

La tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & k-10 \\ 2 & 9 & k \\ 1 & 8k-90 & \\ 0 & k & \end{array}$$

Il valore critico di k è dunque pari a 90/8.

Problema 3

- Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax+Bu$, $y = Cx+Du$ la cui matrice dinamica ha due autovalori: $\lambda_1 = -1$, raggiungibile ma non osservabile, e $\lambda_2 = 1$, non raggiungibile ma osservabile. Allora:

  ◯ la sua funzione di trasferimento è nulla;
  FALSO: In generale $W(s) = C(SI - A)^{-1}B + D$, e non essendoci autovalori raggiungibili e osservabili il primo termine è nullo. Il secondo però (legame diretto ingresso-uscita) potrebbe essere diverso da zero.

  ◯ la sua funzione di trasferimento è nulla solo se $D = 0$;
  VERO: Vedi risposta precedente.

  ◯ ci sono infinite condizioni iniziali per cui l'evoluzione libera nello stato diverge;
  VERO: Tutte quelle allineate con l'autovettore v_2 corrispondente a λ_2.

  ◯ ci sono infinite condizioni iniziali per cui l'evoluzione libera nello stato converge;
  VERO: Tutte quelle allineate con l'autovettore v_1 corrispondente a λ_1.

  ◯ se $D = 0$, l'uscita del sistema è nulla per qualsiasi condizione iniziale.
  FALSO: Anche se la funzione di trasferimento è nulla, c'è una risposta libera non nulla perché il secondo autovalore è osservabile.

- Si consideri il sistema ottenuto chiudendo in retroazione unitaria una funzione di trasferimento $F(s)$ costituita da un guadagno positivo, uno zero a parte reale positiva e due poli a parte reale negativa. Allora:

  ◯ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per qualsiasi valore del guadagno;
  FALSO: la fase di $F(s)$ tende a $-270°$ e quindi per guadagni sufficientemente elevati il margine di fase diventa negativo.

  ◯ il sistema retroazionato diventa instabile per valori sufficientemente alti del guadagno;
  VERO: Vedi risposta precedente.

  ◯ il sistema retroazionato può avere guadagno unitario;
  FALSO: Questo vorrebbe dire che il sistema retroazionato è di tipo maggiore di 0; ma in $F(s)$ non ci sono poli nell'origine, e dunque il sistema retroazionato è di tipo 0.

  ◯ la risposta indiciale del sistema retroazionato può presentare oscillazioni smorzate;
  VERO: Ciò accade se i due poli del sistema ad anello chiuso sono complessi.

  ◯ la risposta indiciale del sistema retroazionato ha una sovraelongazione tanto minore quanto più alto è il guadagno.
  FALSO: Al crescere del guadagno il margine di fase diminuisce; di conseguenza, il modulo alla risonanza e quindi la sovraelongazione crescono.

Prova scritta di CONTROLLI AUTOMATICI I modulo
15 luglio 2004

Problema 1

Per il processo avente funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{s-10}{(s+1)(s+100)}$$

si progetti uno schema di controllo in grado di garantire le seguenti specifiche:

a) stabilità asintotica;

b) errore a regime non superiore a $1/\sqrt{10}$ per un riferimento a rampa unitaria;

c) reiezione completa a regime di un disturbo costante incognito che si somma all'ingresso del processo;

d) pulsazione di attraversamento $\omega_t \approx 1$ rad/sec, margine di fase $m_\varphi \geq 55°$.

Al termine del progetto, si verifichi la stabilità asintotica attraverso il criterio di Nyquist.

Problema 2

Dato il sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

si determinino *tutti* gli stati iniziali x_0 cui corrisponde un'uscita $y(t)$ *illimitata* in evoluzione libera. Inoltre, si determini la risposta forzata all'ingresso $u = 3\,\delta_{-1}(t)$.

Problema 3

Rispondere alle seguenti domande annerendo il cerchietto corrispondente alle risposte certamente 'vere' (*attenzione: possono esserci più risposte vere per la medesima domanda*).

- Si consideri un sistema lineare avente funzione di trasferimento $W(s) = s/(s^2+1)$. Allora:

  ○ il sistema è instabile;
  ○ la risposta a regime permanente per un qualsiasi ingresso costante è nulla;
  ○ la risposta per un qualsiasi ingresso costante è nulla;
  ○ ci sono infinite condizioni iniziali per cui l'evoluzione libera nello stato è una traiettoria periodica;
  ○ il sistema è completamente raggiungibile e osservabile.

- Si consideri il sistema ottenuto chiudendo in retroazione negativa unitaria un sistema privo di autovalori nascosti e avente funzione di trasferimento $F(s) = k(s+z)/(s-p_1)(s+p_2)$, con $k, z, p_1, p_2 > 0$. Allora:

  ○ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per k positivo e sufficientemente grande;
  ○ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per k negativo e sufficientemente grande;
  ○ il diagramma di Nyquist di $F(j\omega)$ per $\omega > 0$ è tutto contenuto nel primo quadrante;
  ○ i poli del sistema ad anello chiuso sono certamente reali;
  ○ è possibile scegliere k in modo che l'evoluzione libera nello stato del sistema retroazionato converga per qualsiasi condizione iniziale.

CONTROLLI AUTOMATICI I modulo
Prova scritta del 15 luglio 2004

SOLUZIONE

Problema 1

Poiché il processo non ha poli a parte reale positiva, la specifica a) è garantita dalla d). La b) implica che il sistema di controllo deve avere almeno tipo 1. Questo conduce all'aggiunta di un polo nell'origine nel controllore; tale polo garantirà anche astatismo rispetto al disturbo costante sull'ingresso del processo. Resta quindi da garantire che l'errore a regime resti nel limite assegnato, cioè

$$|e_1| = \frac{1}{|K_F|} = \frac{1}{|K_P K_G|} = \frac{1}{|-0.1 \cdot K_G|} \leq \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \Longrightarrow \qquad |K_G| \geq 10\sqrt{10}$$

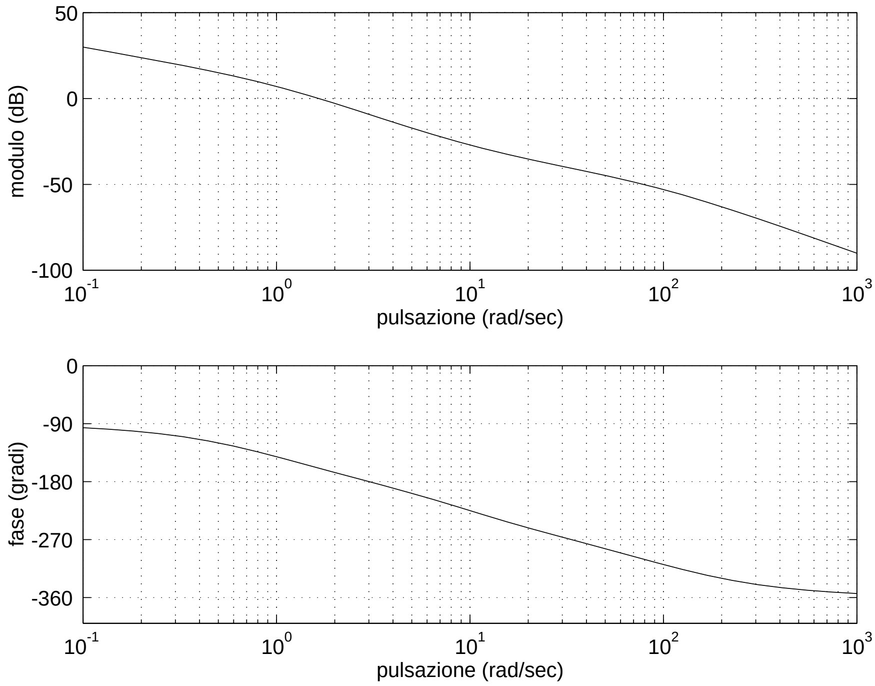
Si ponga $K_G = -10\sqrt{10}$ (si è scelto il segno *negativo* per rendere K_F positivo). Nel seguito della sintesi, non sarà possibile diminuire K_G, pena la violazione del limite sull'errore.

Si ha quindi

$$G(s) = \frac{K_G}{s} R(s) \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{F}(s) = \frac{K_G}{s} P(s) = \sqrt{10}\,\frac{1-0.1s}{s(1+s)(1+0.01s)}$$

I diagrammi di Bode di $\hat{F}(s)$ (vedi figura seguente) indicano che in corrispondenza alla pulsazione di attraversamento desiderata $\omega_t^* = 1$ si ha

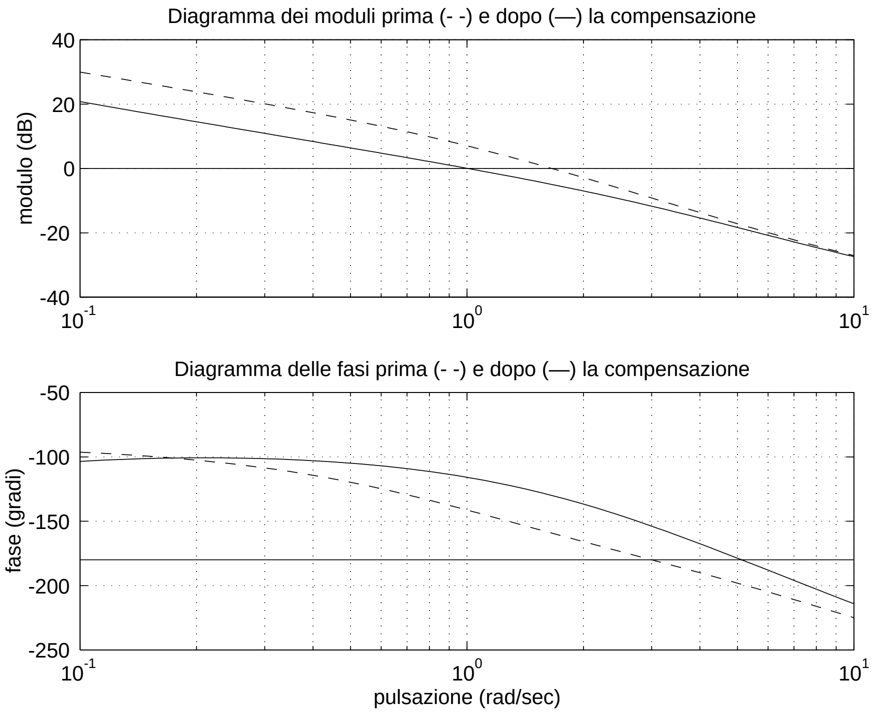
$$|\hat{F}(j1)| \approx 7\,\mathrm{dB} \qquad\qquad \angle F(j1) \approx -141^\circ$$



Per dedurre tali valori non è necessario un tracciamento accurato dei diagrammi: infatti, osservato che $\sqrt{10}|_{\mathrm{dB}} = 10$ dB, si ha $|\hat{F}(j1)| \approx 10 - 3$ dB (guadagno + correzione del diagramma asintotico del primo polo in corrispondenza alla sua pulsazione di rottura) e $\angle F(j1) \approx -90^\circ - 45^\circ - 6^\circ$ (polo nell'origine + contributo del primo polo in corrispondenza alla sua pulsazione di rottura + correzione del diagramma asintotico dello zero *a parte reale positiva* una decade prima della pulsazione di rottura). Si noti che si è trascurato il contributo del secondo polo, la cui pulsazione di rottura è 100.

Poiché la compensazione deve fornire un'attenuazione di 7 dB e un anticipo di almeno 16° in $\omega_t^* = 1$, è necessario usare in modo combinato la funzione anticipatrice e quella attenuatrice.

Dai diagrammi universali, una possibile scelta per la funzione anticipatrice è $m = 3$ in $\omega\tau = 1$ (e quindi $\tau = 1$), che in $\omega_t^* = 1$ fornisce all'incirca un anticipo di $26°$ e un'amplificazione di 2 dB. Per completare il progetto si può usare la funzione attenuatrice $m = 3$ in $\omega\tau = 100$ (e quindi $\tau = 100$); si ottiene così in $\omega_t^* = 1$ un anticipo netto di $26° - 1° = 25°$ e un'attenuazione netta di $2\text{dB} - 9\text{dB} = -7\text{dB}$. L'effetto della compensazione è evidente nella figura successiva.



In conclusione, il controllore progettato ha funzione di trasferimento

$$G(s) = -10\sqrt{10}\,\frac{1+s}{1+\frac{1}{3}s}\;\frac{1+\frac{100}{3}s}{1+100s}$$

Il valore effettivo di pulsazione di attraversamento e margine di fase (valutato ad esempio con l'istruzione `margin` di MATLAB) risulta essere rispettivamente di 1 rad/sec e $64°$.

Problema 2

Gli autovalori della matrice A sono chiaramente $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$. La risposta libera è

$$y(t) = Ce^{At}x_0 = C\sum_{i=1}^{3} e^{\lambda_i t} c_i v_i$$

dove c_i indica la i-sima componente dello stato iniziale x_0 lungo l'autovettore v_i $(i = 1, 2, 3)$. Si trova

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Essendo $Cv_1 = 0$, la risposta libera non contiene mai l'esponenziale e^t, che è dunque inosservabile; di conseguenza *non* esistono stati iniziali cui corrisponda un'uscita libera illimitata.

La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Si noti che, come indicato dall'analisi precedente, l'autovalore λ_1 è nascosto.

La risposta forzata richiesta è dunque

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3/2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{3/2}{s+2}\right] = \left(\frac{3}{2} - 3e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\right)\delta_{-1}(t)$$

Problema 3

- Si consideri un sistema lineare avente funzione di trasferimento $W(s) = s/(s^2+1)$. Allora:
  - ◯ il sistema è instabile;
    FALSO: Il sistema ha due poli immaginari, quindi almeno esternamente è semplicemente stabile. Potrebbe essere instabile se vi fossero degli autovalori nascosti a parte reale positiva, il che però non è deducibile dalla sola $W(s)$.
  - ◯ la risposta a regime permanente per un qualsiasi ingresso costante è nulla;
    FALSO: E' vero che $W(s)$ contiene uno zero nell'origine, ma il sistema non ammette regime permanente poiché non è asintoticamente stabile. Di conseguenza, né l'evoluzione libera né quella forzata convergono in generale a un valore limite.
  - ◯ la risposta per un qualsiasi ingresso costante è nulla;
    FALSO: Vedi risposta precedente.
  - ◯ ci sono infinite condizioni iniziali per cui l'evoluzione libera nello stato è una traiettoria periodica;
    VERO: Tutte quelle contenute nel piano individuato da v_a e v_b, dove $v_{1,2} = v_a \pm jv_b$ sono gli autovettori associati agli autovalori $\lambda_{1,2} = \pm j$. Se poi il sistema non ha autovalori nascosti, tale piano coincide con lo spazio di stato.
  - ◯ il sistema è completamente raggiungibile e osservabile;
    FALSO: Impossibile dedurlo dalla sola $W(s)$.

- Si consideri il sistema ottenuto chiudendo in retroazione negativa unitaria un sistema privo di autovalori nascosti e avente funzione di trasferimento $F(s) = k(s+z)/(s-p_1)(s+p_2)$, con $k, z, p_1, p_2 > 0$. Allora:
  - ◯ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per k positivo e sufficientemente grande;
    VERO: Si deduce dal diagramma di Nyquist di $F(j\omega)$ (attenzione: si osservi che $n_F^+ = 1$, e che $K_F = -kz/p_1p_2 < 0$), o più direttamente dal denominatore della funzione di trasferimento del sistema retroazionato:

    $$D_W(s) = D_F(s) + N_F(s) = s^2 + (k + p_2 - p_1)s + kz - p_1p_2$$

    che ha tutti i coefficienti positivi (e quindi due radici a parte reale negativa) per k positivo e sufficientemente grande,
  - ◯ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per k negativo e sufficientemente grande;
    FALSO: Vedi risposta precedente.
  - ◯ il diagramma di Nyquist di $F(j\omega)$ per $\omega > 0$ è tutto contenuto nel primo quadrante;
    FALSO: Ad esempio, se la pulsazione di rottura di p_2 precede quella di p_1 e di z, il diagramma di Bode delle fasi di $F(j\omega)$ scende sotto l'asse a 0° prima di risalire; in questo caso, il corrispondente diagramma di Nyquist ha un tratto contenuto nel quarto quadrante.
  - ◯ i poli del sistema ad anello chiuso sono certamente reali;
    FALSO: Basta calcolare il discriminante di $D_W(s)$:

    $$\Delta = (k + p_2 - p_1)^2 - 4(kz - p_1p_2)$$

    che diventa certamente negativo per z sufficientemente grande. In questo caso, $D_W(s)$ ha radici complesse coniugate.
  - ◯ è possibile scegliere k in modo che l'evoluzione libera nello stato del sistema retroazionato converga per qualsiasi condizione iniziale.
    VERO: Basta scegliere k in modo che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile.

Prova scritta di CONTROLLI AUTOMATICI I modulo
5 dicembre 2005

Problema 1

Si consideri il processo descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -10\,x_1 - 11\,x_2 + u + d\\ y &= -x_1 + x_2\end{aligned}$$

dove d è un segnale di disturbo costante ma ignoto. Si progetti uno schema di controllo a retroazione dall'uscita in grado di garantire le seguenti specifiche:

- stabilità asintotica;
- errore a regime non superiore a 0.1 per un riferimento $r(t) = t \cdot \delta_{-1}(t)$, nonostante la presenza del disturbo d;
- pulsazione di attraversamento $\omega_t \approx 1$ rad/sec e margine di fase $m_\varphi \geq 20°$.

Al termine, si tracci il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento del ramo diretto e si verifichi la stabilità asintotica attraverso l'applicazione del criterio di Nyquist.

Problema 2

Con riferimento al processo considerato nel Problema 1:

a) Si determinino gli autovalori con le relative proprietà di raggiungibilità e osservabilità.

b) Si calcoli l'evoluzione libera a partire dal punto $x_0 = (0 \;\; 1)^T$.

c) Si calcoli la risposta forzata all'ingresso $u(t) = 2 \cdot \delta_{-1}(t)$.

d) Si calcoli la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = 3 \cdot t \cdot \delta_{-1}(t)$.

Problema 3

Annerire il cerchietto in corrispondenza alle affermazioni certamente 'vere'.

- Si consideri il sistema a retroazione unitaria avente funzione di trasferimento $F(s) = \frac{k}{(s-1)(s+2)}$ sul ramo diretto.

  ○ Per $k > 0$, il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
  ○ Per $k > 0$, il diagramma di Nyquist di $F(j\omega)$ non effettua alcun giro intorno al punto critico.
  ○ Per $k = 1$, la risposta a regime del sistema retroazionato per un ingresso a gradino unitario vale -1.
  ○ La risposta a regime del sistema retroazionato a un disturbo costante *sull'uscita* di $F(s)$ tende a zero per $k \to \infty$.
  ○ La risposta a regime del sistema retroazionato a un disturbo costante *sul ramo di reazione* tende a zero per $k \to \infty$.

- Si consideri un sistema lineare strettamente causale con due autovalori: $\lambda_1 = -2$, osservabile ma non raggiungibile, e $\lambda_2 = 2$, non osservabile ma raggiungibile.

  ○ La funzione di trasferimento è nulla.
  ○ Esiste un unico stato iniziale non nullo da cui l'evoluzione libera nello stato converge.
  ○ Non esistono stati iniziali da cui la risposta libera diverge.
  ○ La risposta impulsiva diverge.
  ○ È impossibile stabilizzare il sistema attraverso uno schema a retroazione dall'uscita.

CONTROLLI AUTOMATICI I modulo
Prova scritta del 5 dicembre 2005

Traccia di soluzione

Problema 1

La funzione di trasferimento del processo è

$$P(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+10)} = -\frac{1}{10}\frac{1-s}{(1+s)(1+0.1s)}$$

Poiché il processo non ha poli a parte reale positiva, la prima specifica è garantita da quella sul margine di fase. La seconda specifica richiede che il sistema di controllo sia almeno di tipo 1 e astatico rispetto al disturbo, che agisce sull'ingresso del processo. Questo conduce all'aggiunta di un polo nell'origine nel controllore; resta poi da garantire che l'errore a regime resti nel limite assegnato, cioè

$$|e_1| = \frac{1}{|K_F|} = \frac{1}{|K_P K_G|} = \frac{1}{|-0.1\cdot K_G|} \leq \frac{1}{10} \qquad \Longrightarrow \qquad |K_G| \geq 100$$

Si ponga $K_G = -100$ (si è scelto il segno negativo per rendere K_F positivo).

Si ha quindi

$$G(s) = \frac{K_G}{s}R(s) \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{F}(s) = 10\frac{1-s}{s(1+s)(1+0.1s)}$$

I diagrammi di Bode di $\hat{F}(s)$ indicano che in corrispondenza alla pulsazione di attraversamento desiderata $\omega_t^* = 1$ si ha

$$|\hat{F}(j1)| \approx 20\,\mathrm{dB} \qquad\qquad \angle F(j1) \approx -186^\circ$$

Si noti che per dedurre il valore della fase non è necessario un tracciamento accurato dei diagrammi: infatti si ha $\angle F(j1) \approx -90^\circ - 45^\circ - 45^\circ - 6^\circ$ (polo nell'origine + contributo del polo in -1 in corrispondenza alla sua pulsazione di rottura + contributo dello zero in $+1$ in corrispondenza alla sua pulsazione di rottura + correzione del diagramma asintotico dello polo in -10 una decade prima della pulsazione di rottura).

Poiché la compensazione deve fornire un'attenuazione di 20 dB e un anticipo di almeno 26° in $\omega_t^* = 1$, è necessario usare in modo combinato la funzione anticipatrice e quella attenuatrice.

Dai diagrammi universali, una possibile scelta per la funzione anticipatrice è $m = 6$ in $\omega\tau = 1$ (e quindi $\tau = 1$), che in $\omega_t^* = 1$ fornisce all'incirca un anticipo di 36° e un'amplificazione di 3 dB. Per completare il progetto si può usare la funzione attenuatrice $m = 14$ in $\omega\tau = 100$ (e quindi $\tau = 100$); si ottiene così in $\omega_t^* = 1$ un anticipo netto di $36^\circ - 8^\circ = 28^\circ$ e un'attenuazione netta di $23\mathrm{dB} - 3\mathrm{dB} = 20\mathrm{dB}$.

In conclusione, il controllore progettato ha funzione di trasferimento

$$G(s) = -\frac{100}{s}\,\frac{1+s}{1+\frac{1}{6}s}\,\frac{1+\frac{100}{14}s}{1+100s}$$

Il valore effettivo di pulsazione di attraversamento e margine di fase (valutato ad esempio con l'istruzione `margin` di MATLAB) risulta essere rispettivamente di 1 rad/sec e 22,4°.

Problema 2

La funzione di trasferimento del processo, calcolata durante la soluzione del Problema 1, consente di concludere immediatamente che gli autovalori della matrice A sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -10$, e che sono entrambi raggiungibili e osservabili (sono diventati poli). Gli autovettori corrispondenti sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 = \frac{1}{9}v_1 + \frac{1}{9}v_2 \qquad \text{da cui l'evoluzione libera è} \qquad x_0 = \frac{1}{9}e^{-t}v_1 + \frac{1}{9}e^{-10t}v_2$$

La risposta forzata richiesta è

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s+1)(s+10)}\cdot\frac{2}{s}\right)\left[\frac{3}{s(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/5}{s}+\frac{4/9}{s+1}+\frac{-11/45}{s+10}\right] \\
&= \left(-\frac{1}{5}+\frac{4}{9}e^{-t}-\frac{11}{45}e^{-10t}\right)\delta_{-1}(t)
\end{aligned}
$$

Infine, essendo il processo asintoticamente stabile, la risposta a regime permanente esiste e assume la forma canonica di polinomio completo di ordine 1:

$$
y_r(t) = 3M_0 1\, t + 3M_1 \qquad \text{con} \qquad M_0 = P(0) = -\frac{1}{10} \qquad M_1 = \left(\frac{dP(s)}{ds}\right)_{s=0} = \frac{1}{100}
$$

Problema 3

- Si consideri il sistema a retroazione unitaria avente funzione di trasferimento $F(s) = \frac{k}{(s-1)(s+2)}$ sul ramo diretto.

  ○ Per $k > 0$, il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
  FALSO: Basta calcolare il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso $W(s) = F(s)/(1 + F(s))$ per verificare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se $k > 2$.

  ○ Per $k > 0$, il diagramma di Nyquist di $F(j\omega)$ non effettua alcun giro intorno al punto critico.
  FALSO: Poiché $F(s)$ ha un polo a parte reale positiva, la risposta del punto precedente garantisce che per $k > 2$ il diagramma effettua un giro in senso orario intorno al punto critico.

  ○ Per $k = 1$, la risposta a regime del sistema retroazionato per un ingresso a gradino unitario vale -1.
  FALSO: Poichè il sistema retroazionato è instabile per $k = 1$, esso non ammette risposta a regime permanente

  ● La risposta a regime del sistema retroazionato a un disturbo costante *sull'uscita* di $F(s)$ tende a zero per $k \to \infty$.
  VERO: È una proprietà ben nota (si noti che per $k \to \infty$ il sistema retroazionato diviene asintoticamente stabile e ammette regime permanente).

  ○ La risposta a regime del sistema retroazionato a un disturbo costante *sul ramo di reazione* tende a zero per $k \to \infty$.
  FALSO: La funzione di trasferimento di un disturbo sul ramo di reazione è pari a $-W(s)$, dove si è indicata con $W(s)$ la funzione di trasferimento del sistema retroazionato.

- Si consideri un sistema lineare strettamente causale con due autovalori: $\lambda_1 = -2$, osservabile ma non raggiungibile, e $\lambda_2 = 2$, non osservabile ma raggiungibile.

  ● La funzione di trasferimento è nulla.
  VERO: Infatti da una parte la funzione di trasferimento del sistema deve essere strettamente propria (conseguenza dell'ipotesi di stretta causalità), dall'altra nessuno dei due autovalori diviene polo.

  ○ Esiste un unico stato iniziale non nullo da cui l'evoluzione libera nello stato converge.
  FALSO: L'evoluzione libera converge a partire dagli *infiniti* stati iniziali allineati con l'autovettore relativo a $\lambda_1 = -2$.

  ● Non esistono stati iniziali da cui la risposta libera diverge.
  VERO: Infatti l'autovalore $\lambda_2 = 2$ è inosservabile, e dunque non compare mai nella risposta (né libera né forzata).

  ○ La risposta impulsiva diverge.
  FALSO: Vedi risposta precedente.

  ● È impossibile stabilizzare il sistema attraverso uno schema a retroazione dall'uscita.
  VERO: L'autovalore $\lambda_2 = 2$ è nascosto, e dunque non viene spostato da alcuna retroazione.