Sistemi di Controllo

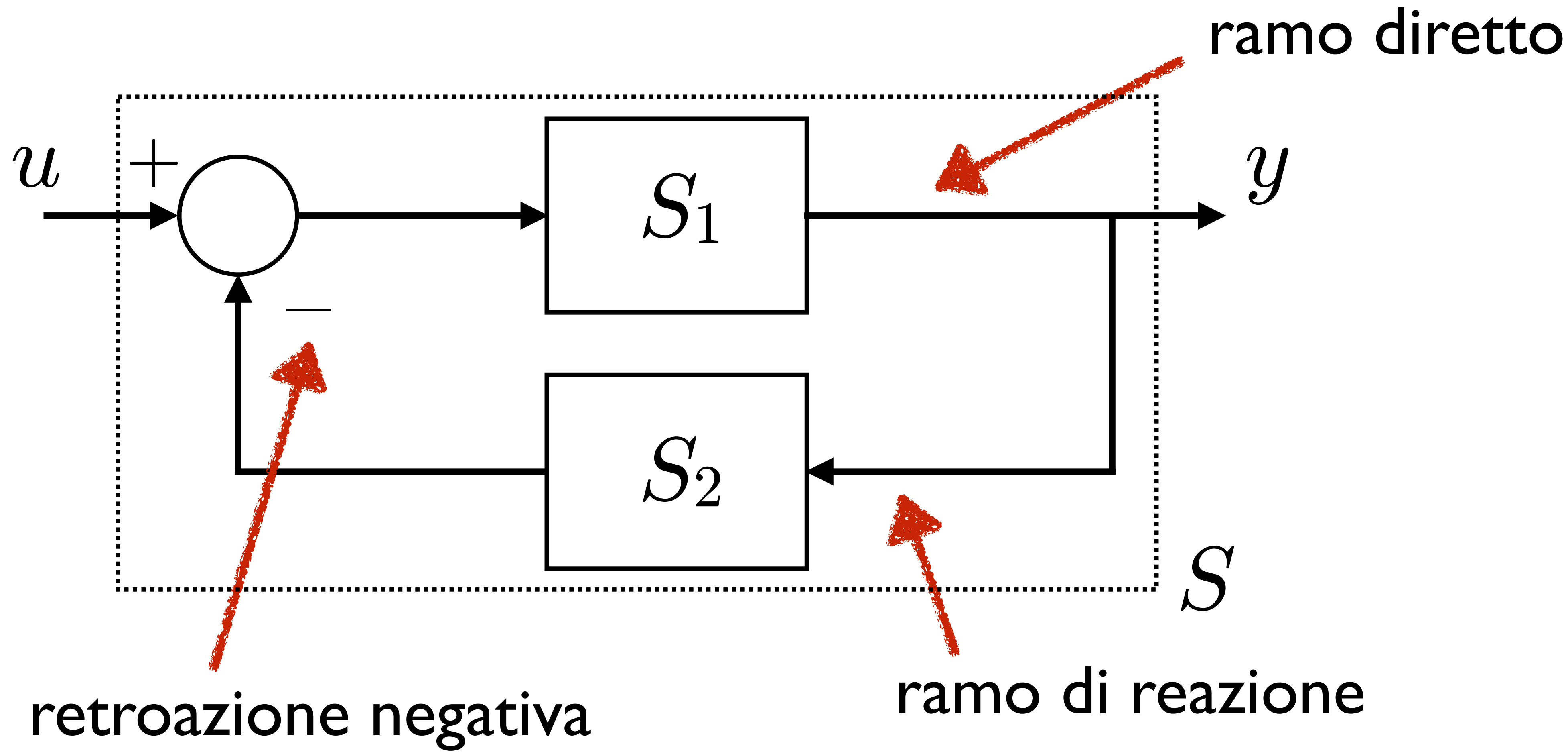
Prof. Giuseppe Oriolo

Stabilità dei sistemi retroazionati

Dipartimento di Ingegneria Informatica
Automatica e Gestionale Antonio Ruberti

Sapienza
Università di Roma

proprietà della retroazione (feedback)



- gli autovalori di S (sistema retroazionato o ad anello chiuso) sono in numero pari alla somma di quelli di S_1 e S_2, ma spostati rispetto a questi

- eventuali autovalori nascosti (non raggiungibili e/o non osservabili) di S_1 o S_2 si ritrovano immutati in S

- d'ora in poi si assume che S_1 e S_2 siano SISO (hyp 0, restrittiva)
- dette $F_1(s)$, $F_2(s)$, $W(s)$ le FdT di S_1, S_2, e S si ha

$$W(s) = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}$$

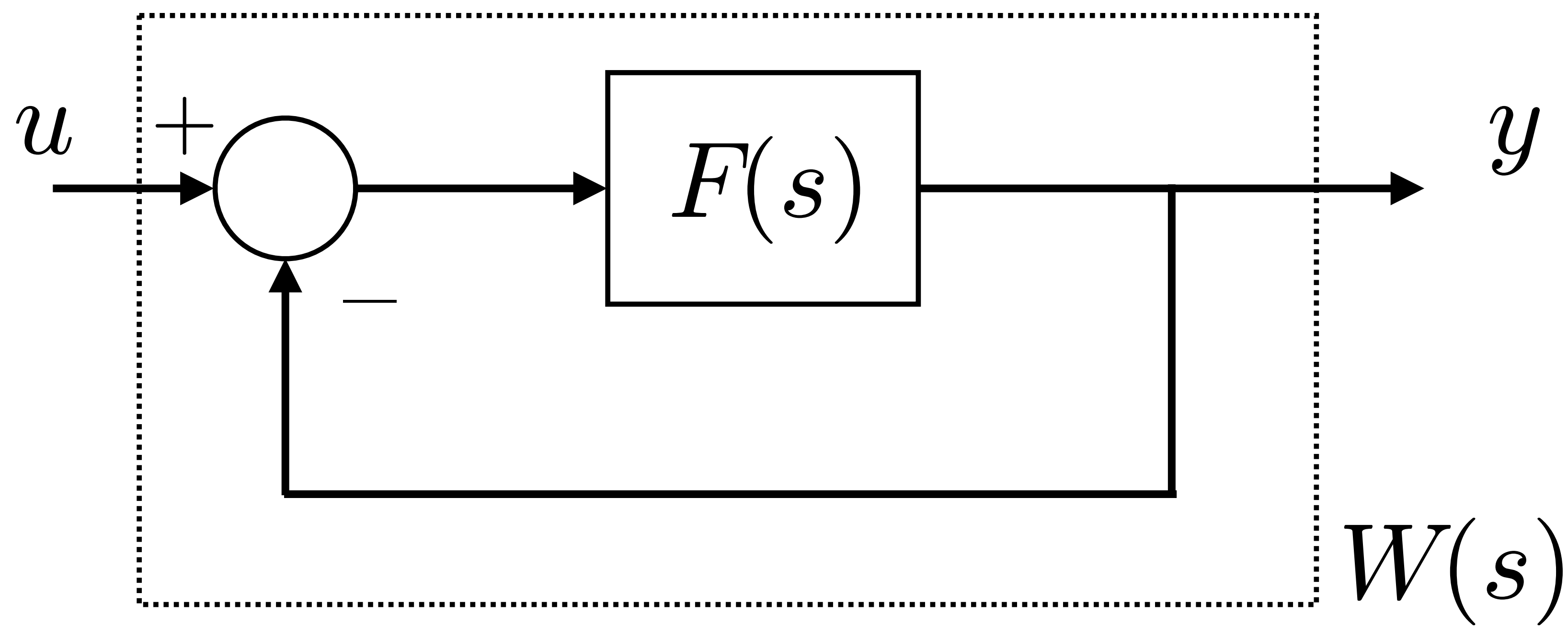
- i poli di $W(s)$ sono diversi da quelli di $F_1(s)$, $F_2(s)$
- se $F_2(s) = k_R$ (retroazione negativa costante) si ha

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + k_R F(s)} = \frac{N_F(s)}{D_F(s) + k_R N_F(s)}$$

  avendo posto $F_1(s) = F(s) = N_F(s)/D_F(s)$

- in questo caso, i poli di $W(s)$ sono quanti quelli di $F(s)$ ma spostati (niente cancellazioni); gli zeri invece sono immutati
- caso notevole $k_R = 1$ (retroazione negativa unitaria)

stabilità dei sistemi in retroazione

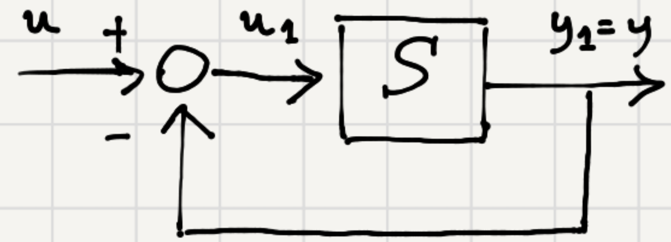


- si farà riferimento a una retroazione negativa unitaria (hyp 1, non restrittiva perché qualunque retroazione con $F_2(s)$ sul ramo di reazione si può scrivere come la cascata di $1/F_2(s)$ e di una retroazione negativa unitaria con $F_1(s)\,F_2(s)$ come FdT del ramo diretto)

- nel seguito si assume che $F(s)$ non nasconda autovalori con $Re[\;]\geq 0$ (hyp 2, restrittiva)

- se l'hyp 2 è violata il sistema retroazionato sarà sempre instabile!

es:



$$S \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad C = (1 \quad 0)$ $\quad$ autovalori $\{-1, 1\}$

$F(s) = C_1 (sI - A)^{-1} B_1 = \dfrac{1}{s+1}$ $\quad$ l'autovalore 1 è nascosto (né raggiungibile né osservabile)

└ FdT di S

sistema retroazionato $\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 (u - y_1) = (A_1 - B_1 C_1) x_1 + B_1 u \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$

$A_1 - B_1 C_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ autovalori $\{-2, 1\}$

spostato

↳ immutato! e ancora NASCOSTO!

e $W(s) = C_1 (sI - (A_1 - B_1 C_1))^{-1} B_1 = \dfrac{1}{s+2}$

- nell'hyp 2 la stabilità del sistema retroazionato dipende solo dalla collocazione dei suoi poli

- in particolare, la collocazione dei poli della FdT ad anello chiuso $W(s)$ si può mettere in relazione con l'andamento del diagramma di Nyquist (ddN) della risposta armonica ad anello aperto $F(j\omega)$

- fatto A: $W(s)$ ha poli con $Re[\ ]=0$ se e solo se il ddN di $F(j\omega)$ passa per $(-1,0)$ (punto critico)

- fatto B: se $F(s)$ non ha poli con $Re[\ ]=0$ (hyp 3), si ha

$$\overset{\curvearrowright}{N}_F = n_W^+ - n_F^+$$

numero di giri del ddN di $F(j\omega)$ intorno al punto critico (positivi in senso orario)

numero di poli di $W(s)$ con $Re[\ ]>0$

numero di poli di $F(s)$ con $Re[\ ]>0$

Criterio di Nyquist (CdN)

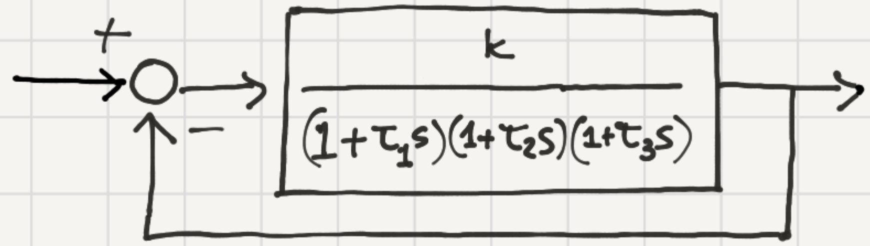
Nelle hyp 1,2, e assumendo inoltre che $F(s)$ non abbia poli con $Re[\ ]{=}0$ (hyp 3), il sistema retroazionato è AS se e solo se

a. il ddN di $F(j\omega)$ non passa per il punto critico

b. $N_F^{\curvearrowright} = -n_F^+$

- il criterio si ottiene dai fatti A e B imponendo che $W(s)$ non abbia né poli con $Re[\ ]{=}0$ né con $Re[\ ]{>}0$
- se $F(s)$ è priva di poli con $Re[\ ]{>}0$, la 2. diventa $N_F^{\curvearrowright}{=}0$ (criterio ridotto di Nyquist)
- se a. è violata, il sistema retroazionato è SS o I
- se b. è violata, il sistema retroazionato è I con $n_W^+ = N_F^{\curvearrowright} + n_F^+$ poli con $Re[\ ]{>}0$

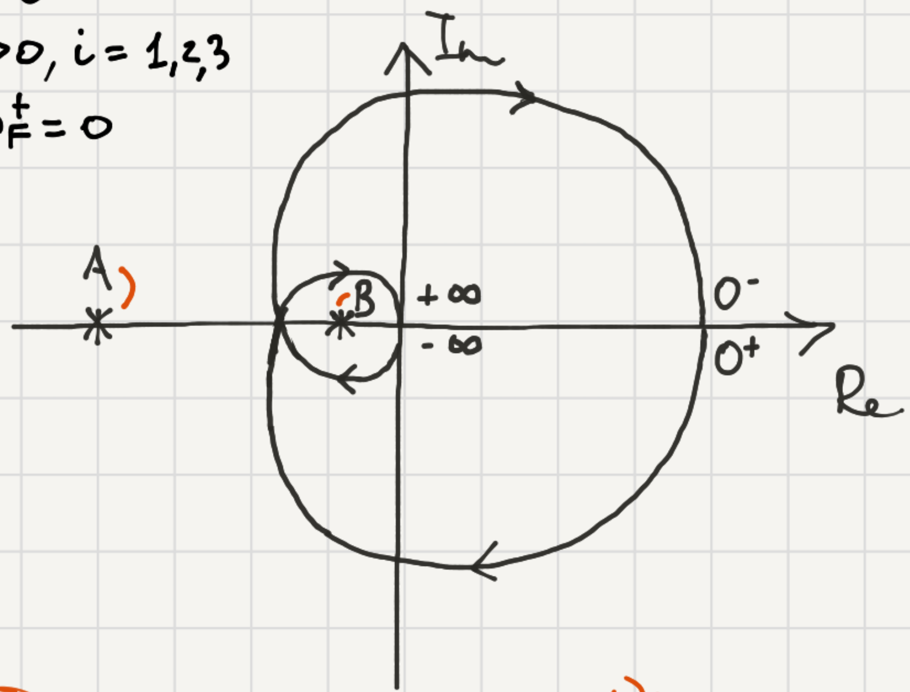
es:



$K > 0$

$\tau_i > 0,\ i = 1,2,3$

$\Rightarrow n_F^+ = 0$



(A) $K < K^*$ $\quad N_F^{\circlearrowleft} = 0$

$n_F^+ = 0$

$\Rightarrow$ sistema retroazionato AS

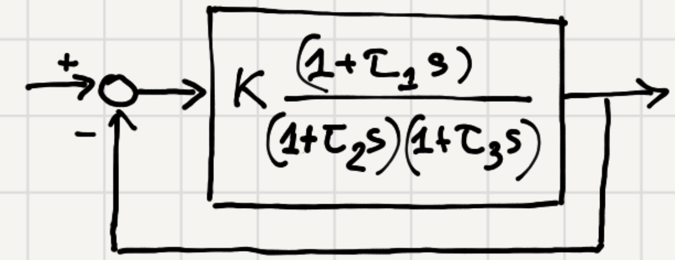
(B) $K > K^*$ $\quad N_F^{\circlearrowleft} = 2$

$n_F^+ = 0$

$\Rightarrow$ sistema retroazionato I

con $n_W^+ = N_F^{\circlearrowleft} + n_F^+ = 2$

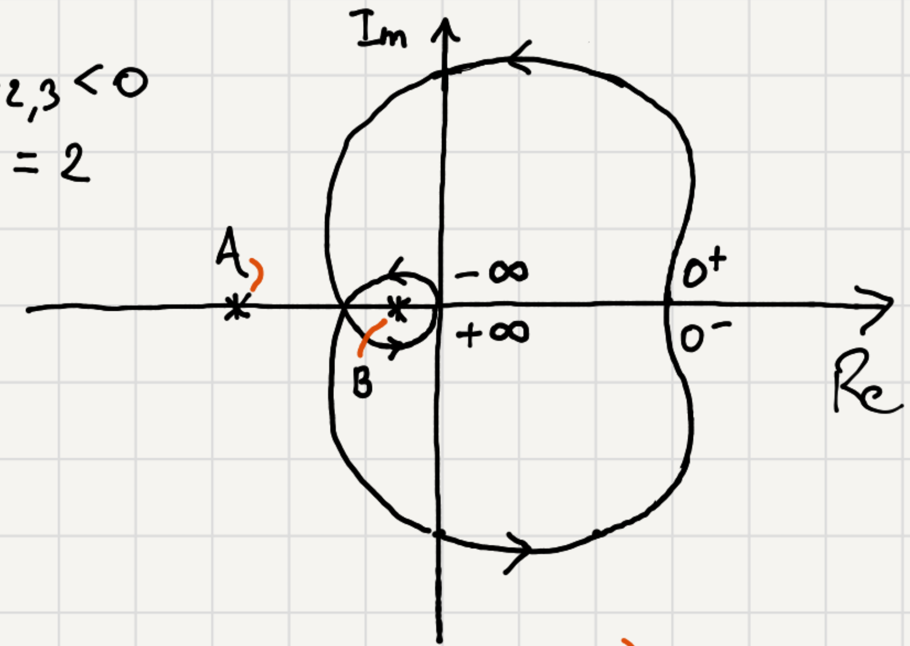
es:



$K > 0$

$\tau_1 > 0,\ \tau_{2,3} < 0$

$\Rightarrow n_F^+ = 2$



(A) $K < K^*$ $\quad N_F^{\circlearrowleft} = 0$

$n_F^+ = 2$

$\Rightarrow$ sistema retroazionato I

con $n_W^+ = N_F^{\circlearrowleft} + n_F^+ = 2$

(B) $K > K^*$ $\quad N_F^{\circlearrowleft} = -2$

$n_F^+ = 2$

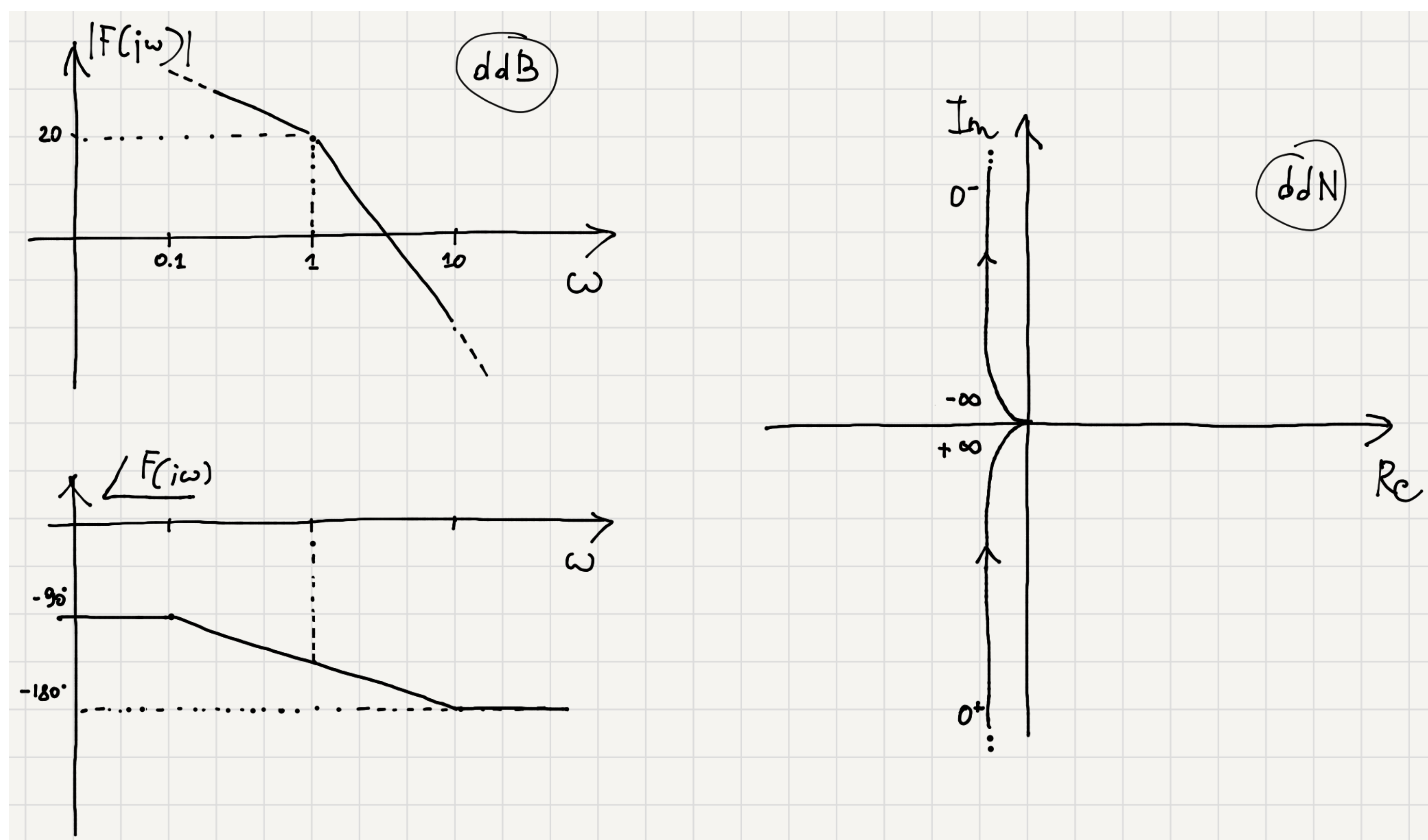
$\Rightarrow$ sistema retroazionato AS

- per rimuovere l'hyp 3 si deve ammettere che $F(s)$ abbia poli con $Re[\ ]=0$, cioè elementi integratori (poli nell'origine) o risonanti (poli immaginari coniugati)

- in questi casi, per $\omega=0$ o $\omega=\omega_n$ il modulo di $F(j\omega)$ è ∞ mentre la fase è discontinua, e dunque il ddN risulta essere aperto in corrispondenza a tali pulsazioni

- es:

$$F(s)=10/s(s+1)$$

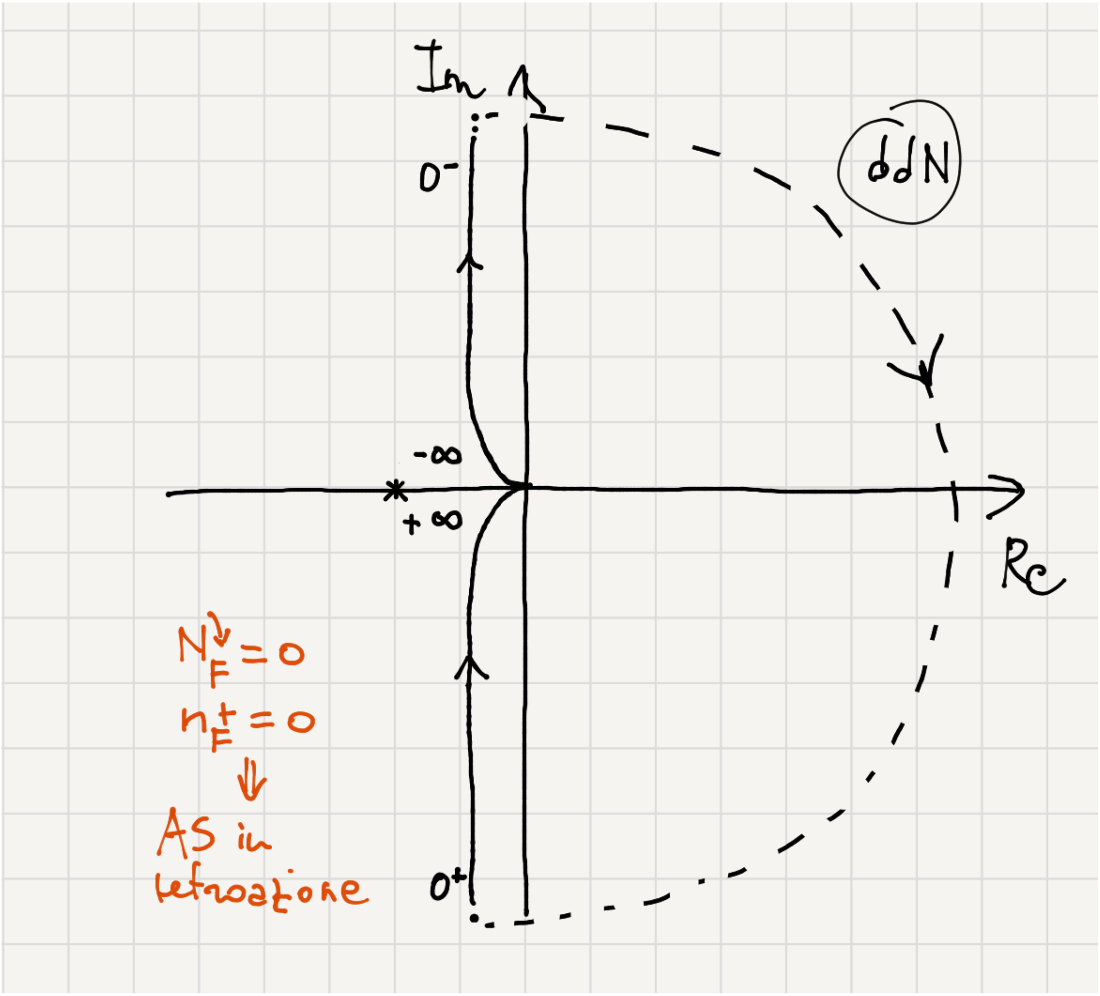


- per poterne contare i giri, si effettua una chiusura all'infinito del ddN: mezzo giro in senso orario nel verso delle ω crescenti per ogni polo con $Re[\ ]=0$

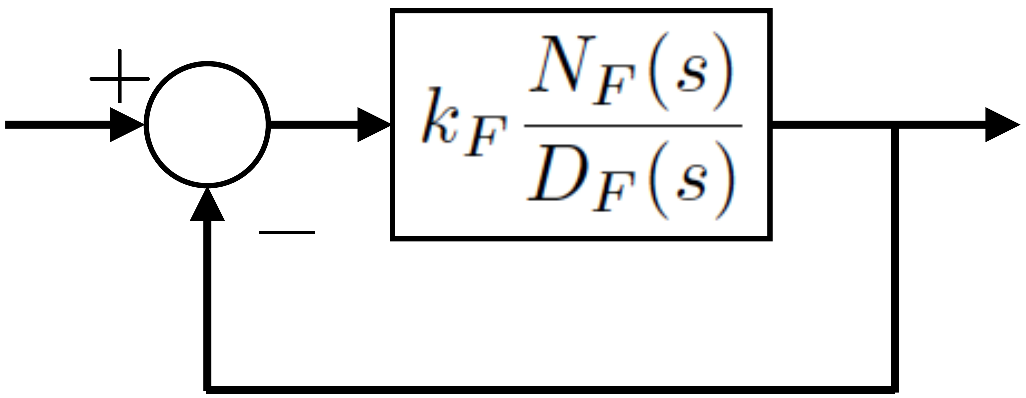
- con queste chiusure, il CdN si applica inalterato; ovvero, è possibile rimuovere l'hyp 3 dall'enunciato

- es precedente:

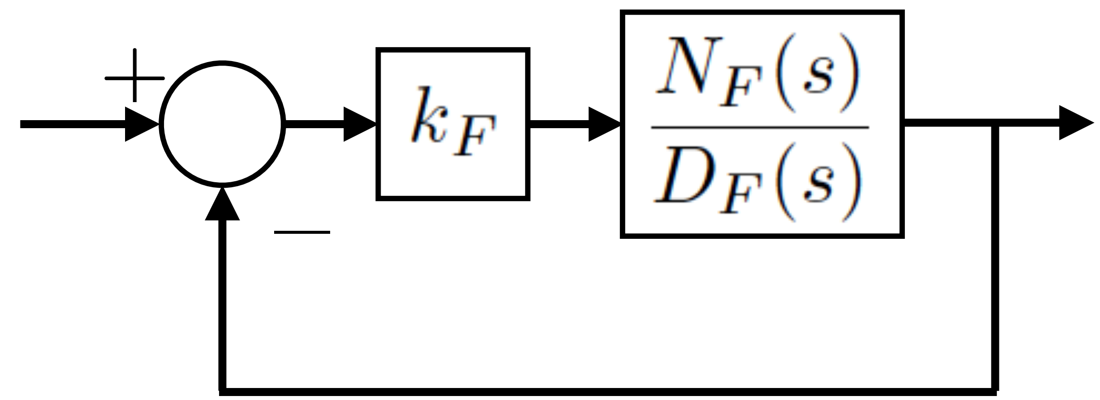
$$F(s) = 10/s(s+1)$$



influenza di k_F sulla stabilità in retroazione

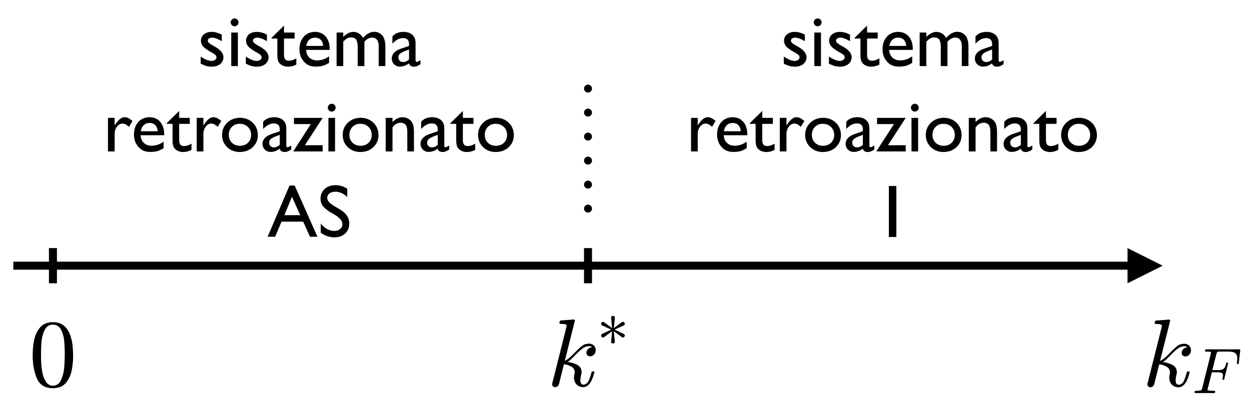


equivale a

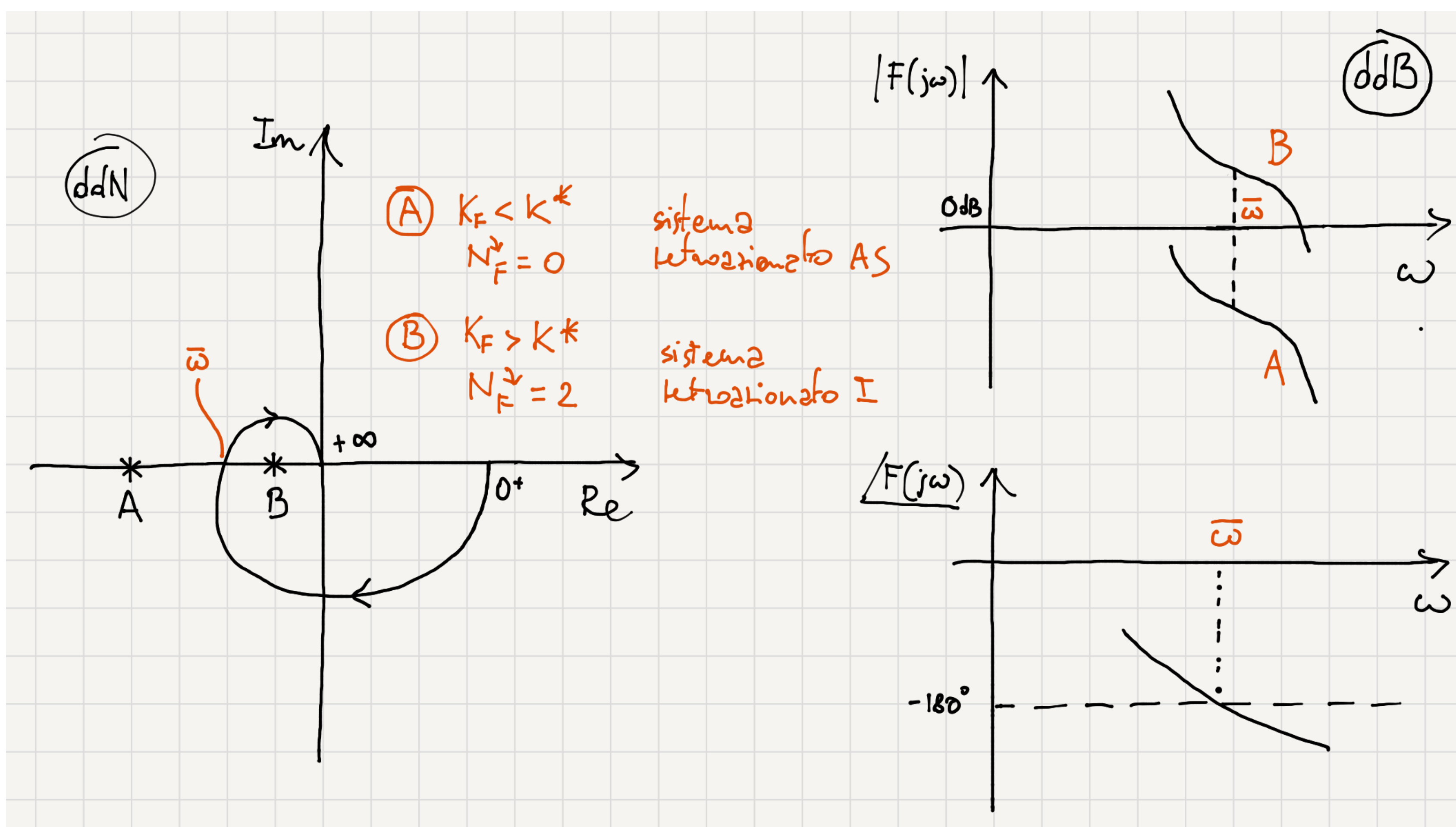


- k_F si può dunque interpretare come la quantità di retroazione
- variazioni di k_F (attenzione: è propriamente il guadagno di $F(s)$ solo se questa è in forma di Bode) non cambiano la forma del ddN di $F(j\omega)$ ma solo la scala
- alternativamente, l'effetto di un aumento (diminuzione) di k_F si può studiare lasciando immutato il ddN di $F(j\omega)$ e facendo scorrere il punto critico verso destra (sinistra)
- si riscontrano alcuni comportamenti tipici

stabilità regolare



- si verifica se $n_F^+ = 0$ e il ddN⁺ di $F(j\omega)$ ha una sola intersezione con il semiasse reale negativo

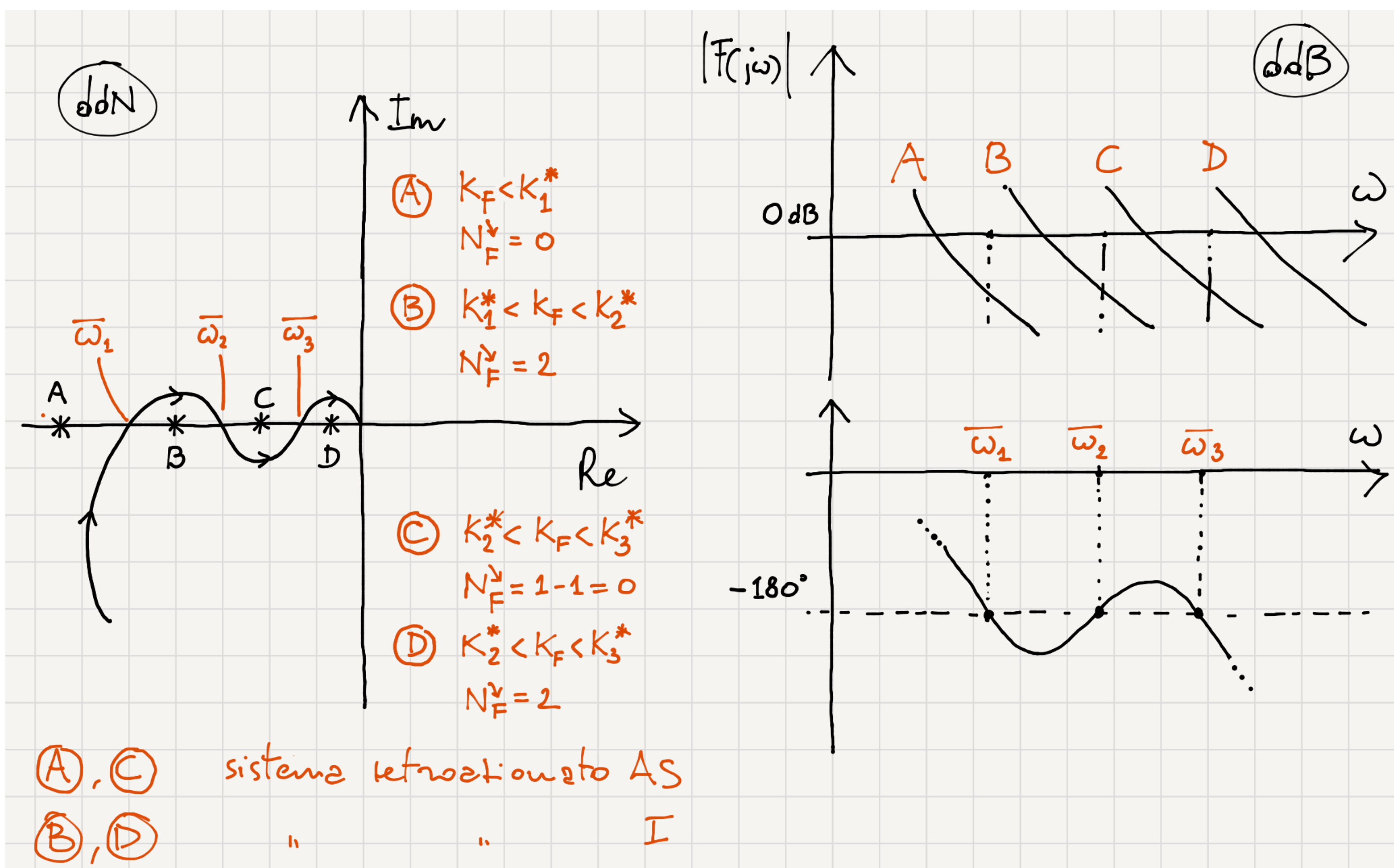


stabilità condizionata

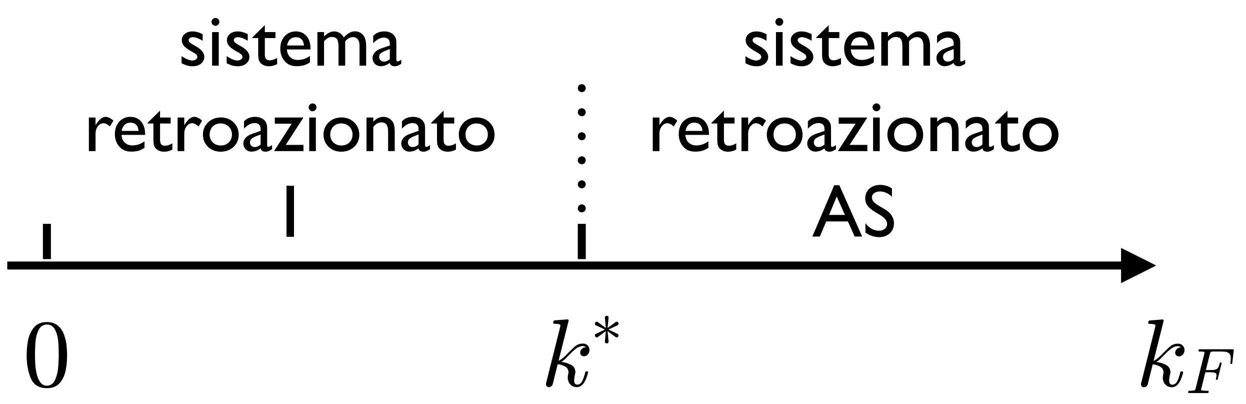
sistema retroazionato AS	sistema retroazionato I	sistema retroazionato AS	sistema retroazionato I

$0 \qquad k_1^* \qquad k_2^* \qquad k_3^* \qquad k_F$

- si verifica se $n_F^+ = 0$ e il ddN⁺ di $F(j\omega)$ ha più di una intersezione con il semiasse reale negativo



stabilità paradossale

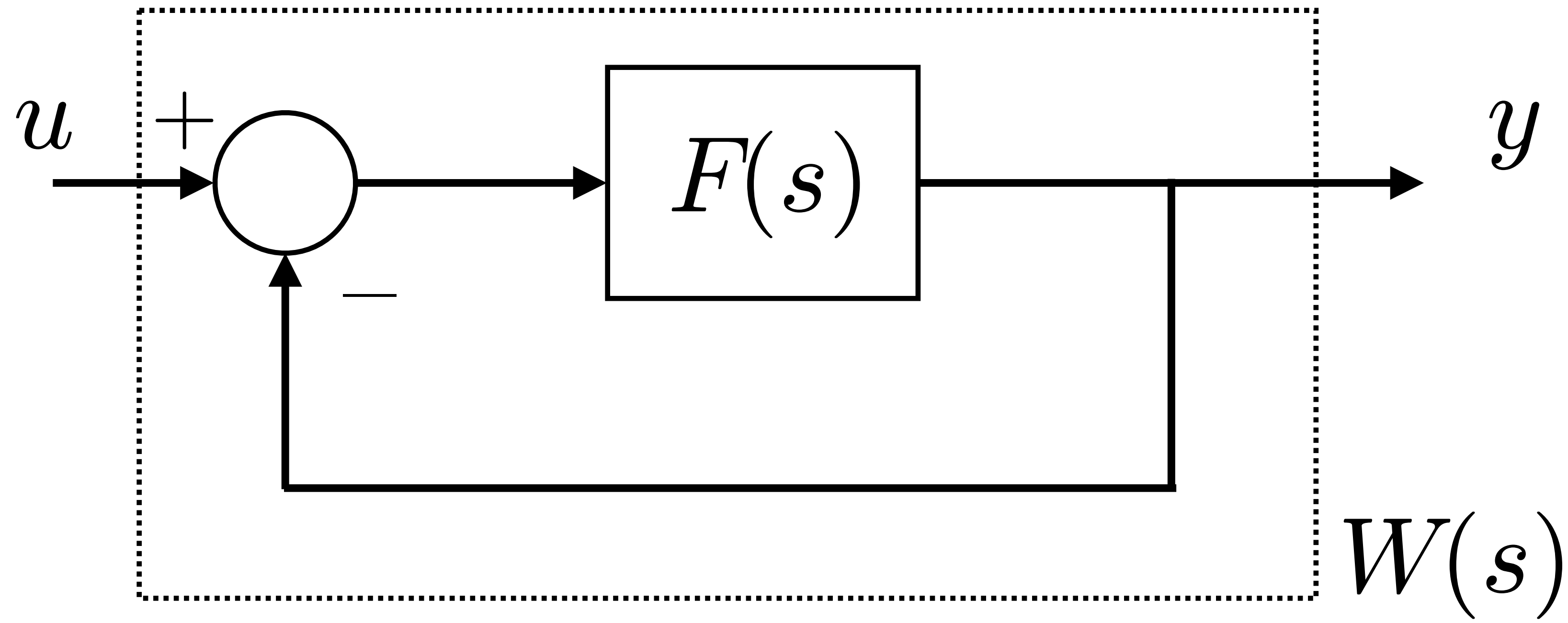


- si può verificare se $n_F^+ > 0$ (cfr. secondo esempio slide 8)

- indica che per spostare i poli del sistema retroazionato dal semipiano destro a quello sinistro è necessaria "una certa quantità" di retroazione (come del resto per fare il contrario)

- questi comportamenti non esauriscono le possibilità: per esempio, ci sono sistemi che in retroazione sono AS o I per qualunque $k_F > 0$

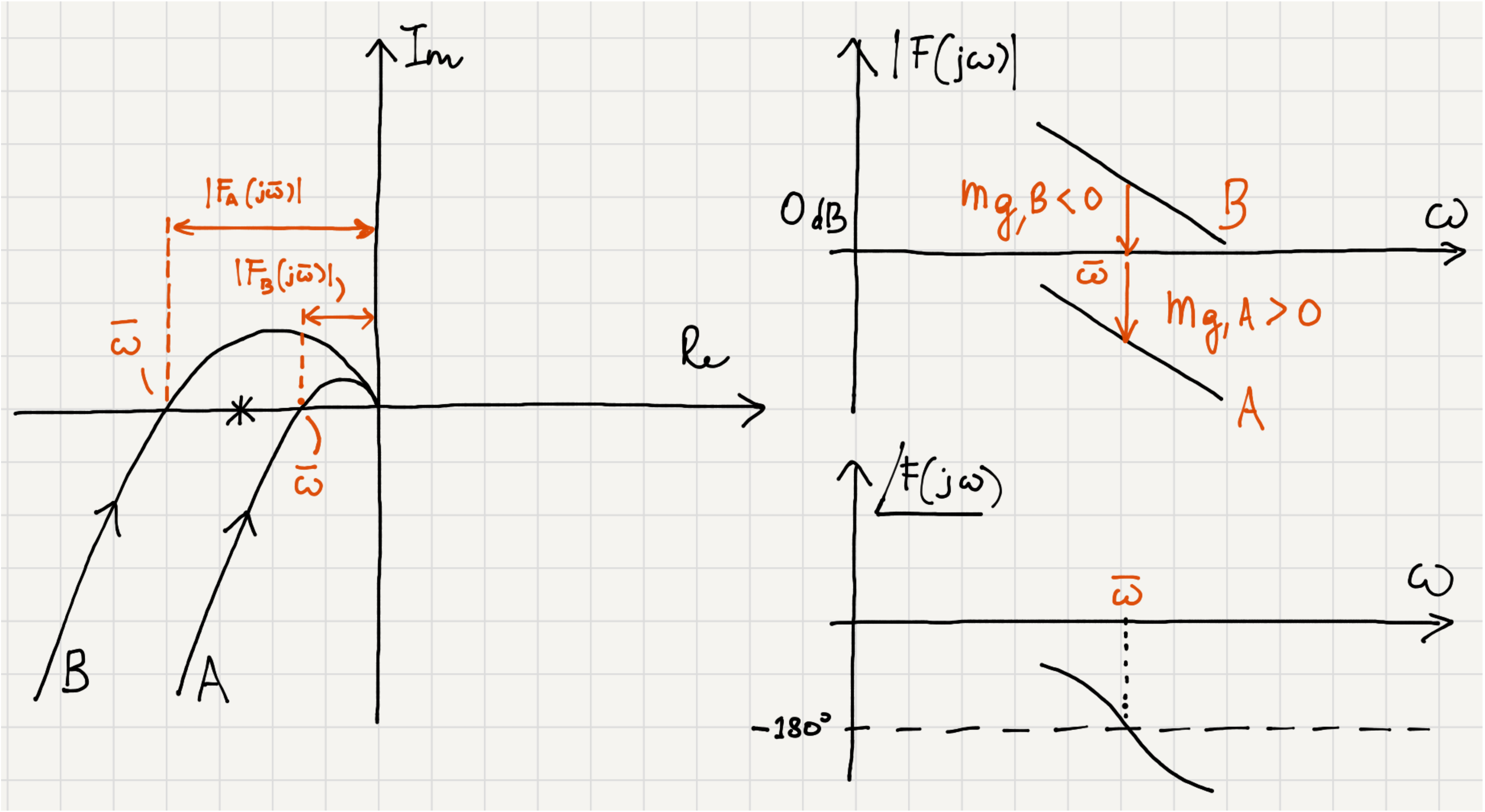
margini di stabilità



- caratterizzano quanto la stabilità asintotica del sistema retroazionato sia robusta rispetto a:
  - variazioni del modulo di $F(s)$, dovute (principalmente) a variazioni di k_F
  - variazioni della fase di $F(s)$, dovute a spostamenti (o aggiunte) di zeri e/o poli

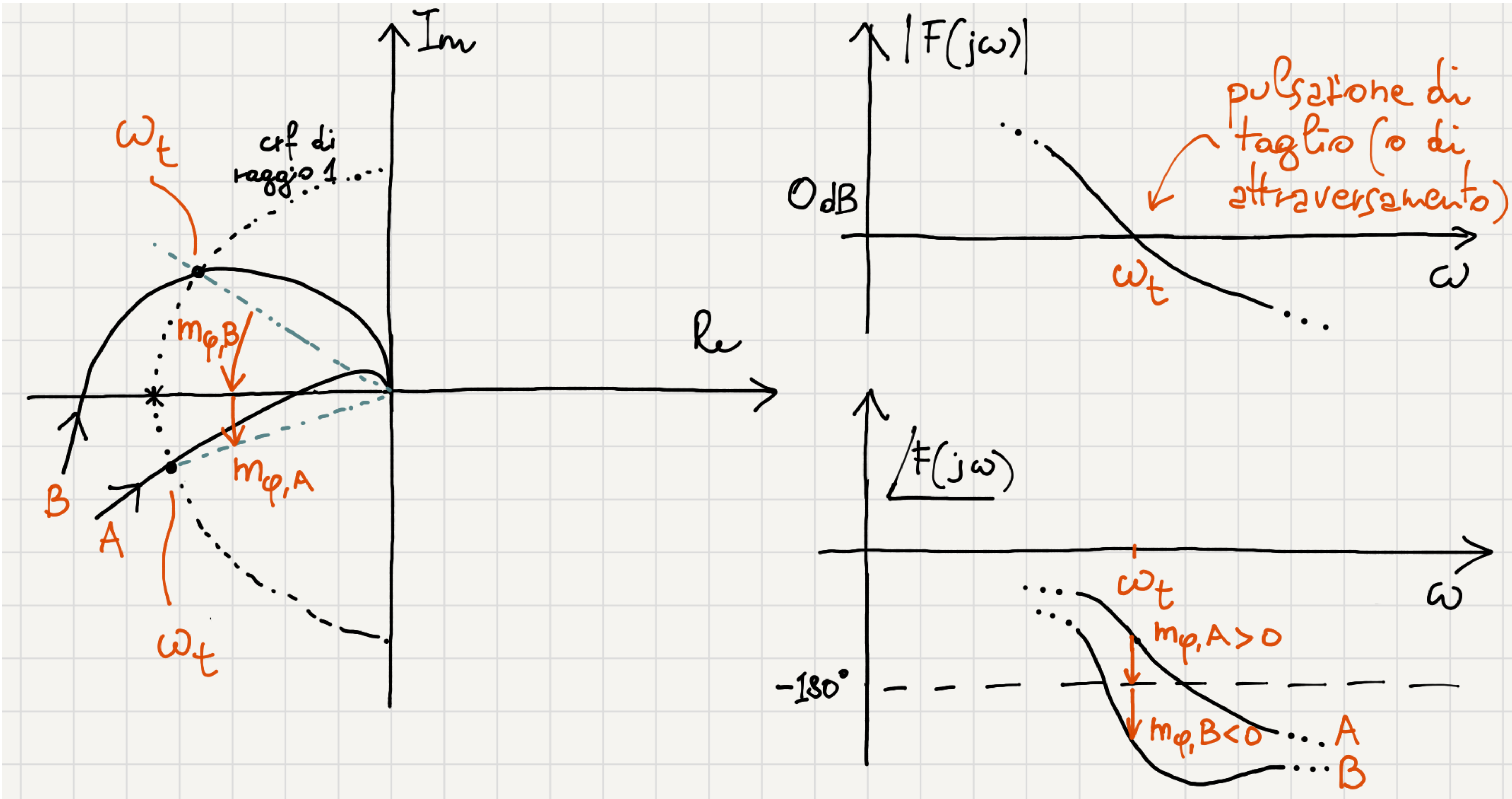
- si definiscono solo nel caso $n_F^+ = 0$

sistemi a stabilità regolare: variazioni del modulo



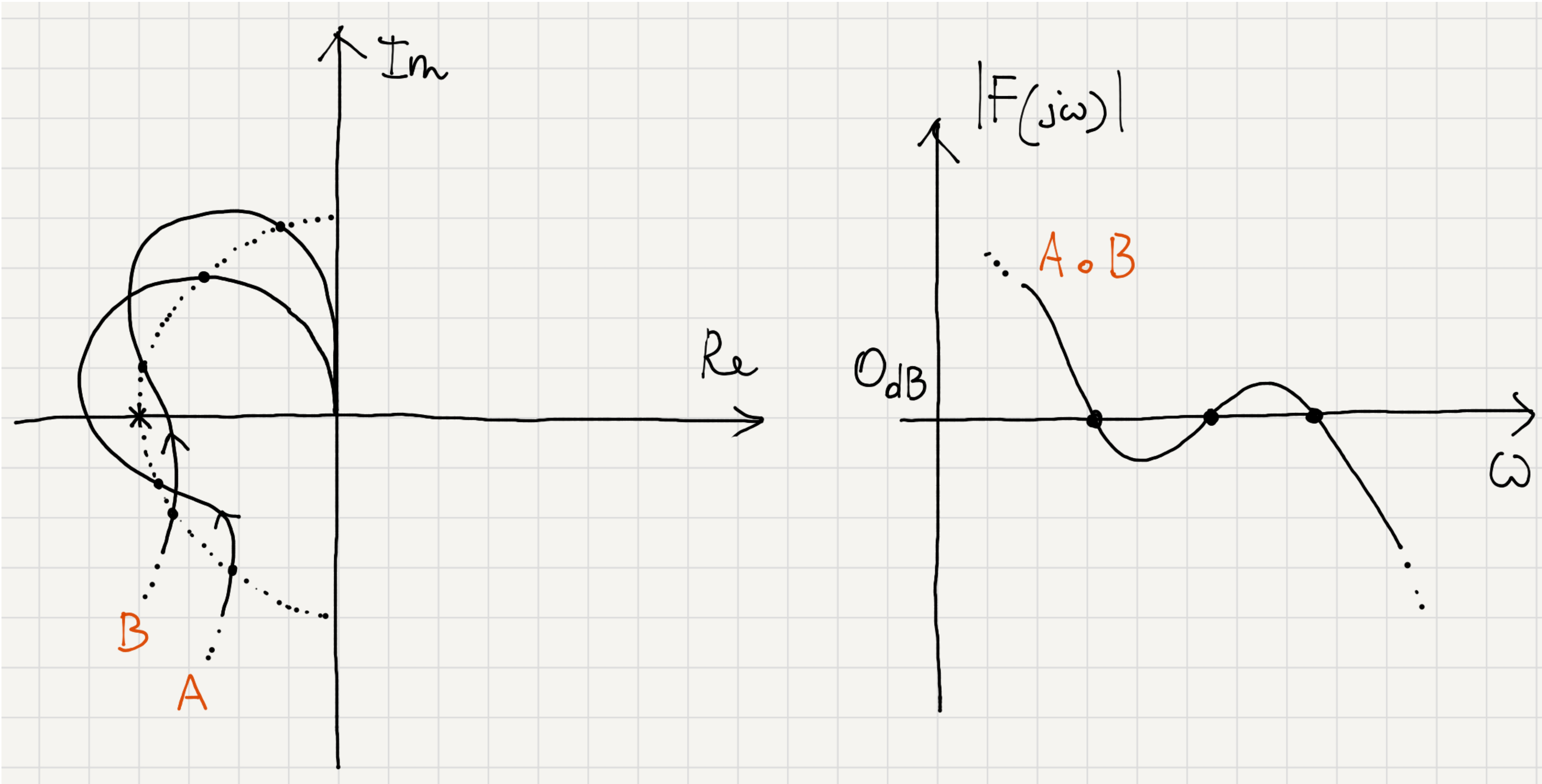
- $m_g = [1/|F(j\bar{\omega})|]_{\text{dB}} = -|F(j\bar{\omega})|_{\text{dB}}$ margine di guadagno
- più è grande m_g, più la stabilità in retroazione è robusta rispetto a variazioni del modulo; se $m_g < 0$, il sistema retroazionato è I

sistemi a stabilità regolare: variazioni della fase



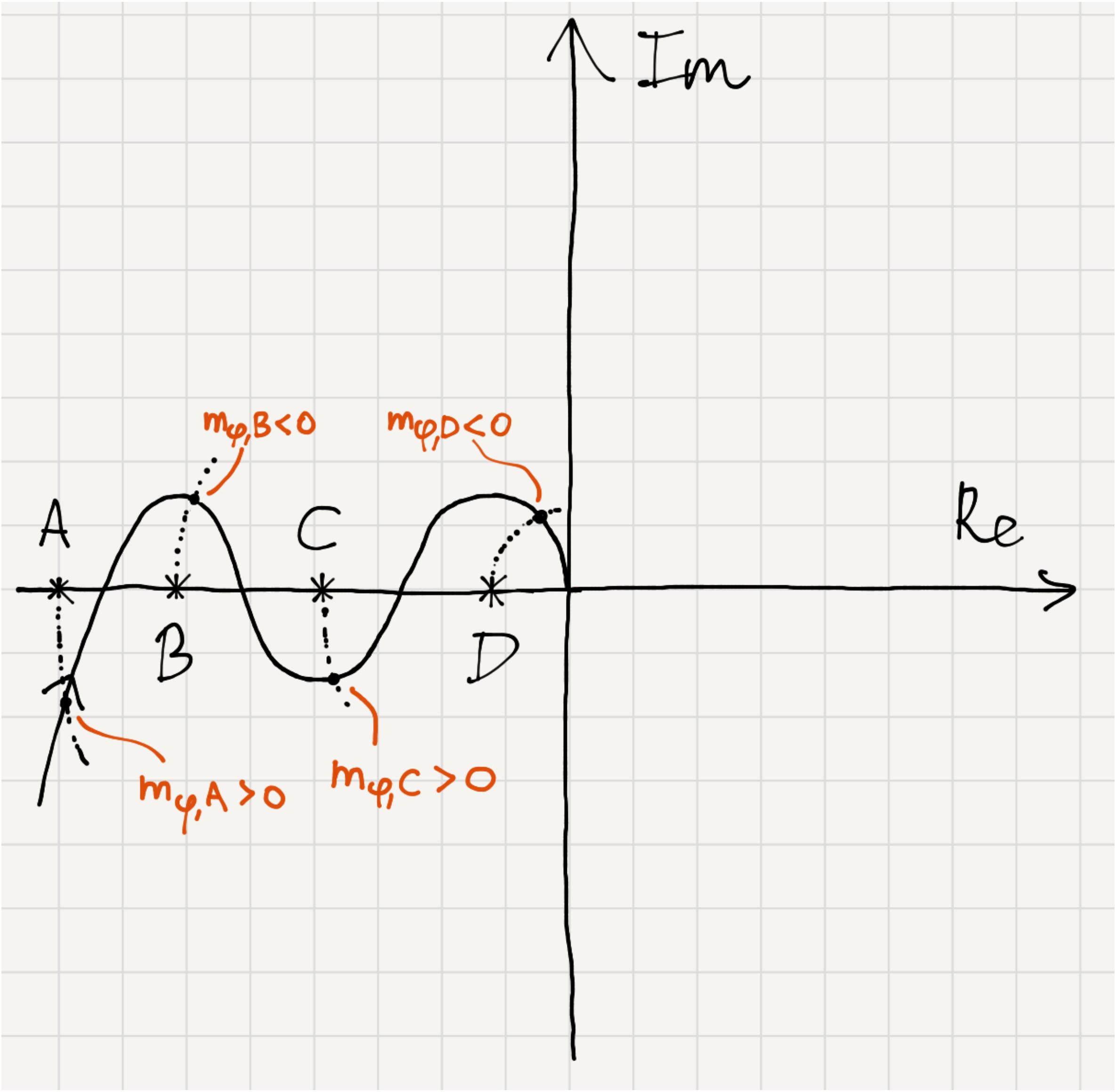
- $m_\varphi = 180° + \angle F(j\omega_t)$ margine di fase
- più è grande m_φ, più la stabilità in retroazione è robusta rispetto a variazioni della fase; se $m_\varphi < 0$, il sistema retroazionato è I

stabilità regolare: situazioni ambigue



- se il ddN⁺ di $F(j\omega)$ ha intersezioni multiple con la crf di raggio unitario, esiste più di una pulsazione di attraversamento
- in questo caso m_φ non è definito univocamente e perde di significato (mentre m_g è sempre ben definito per sistemi a stabilità regolare)

margini nei sistemi a stabilità condizionata



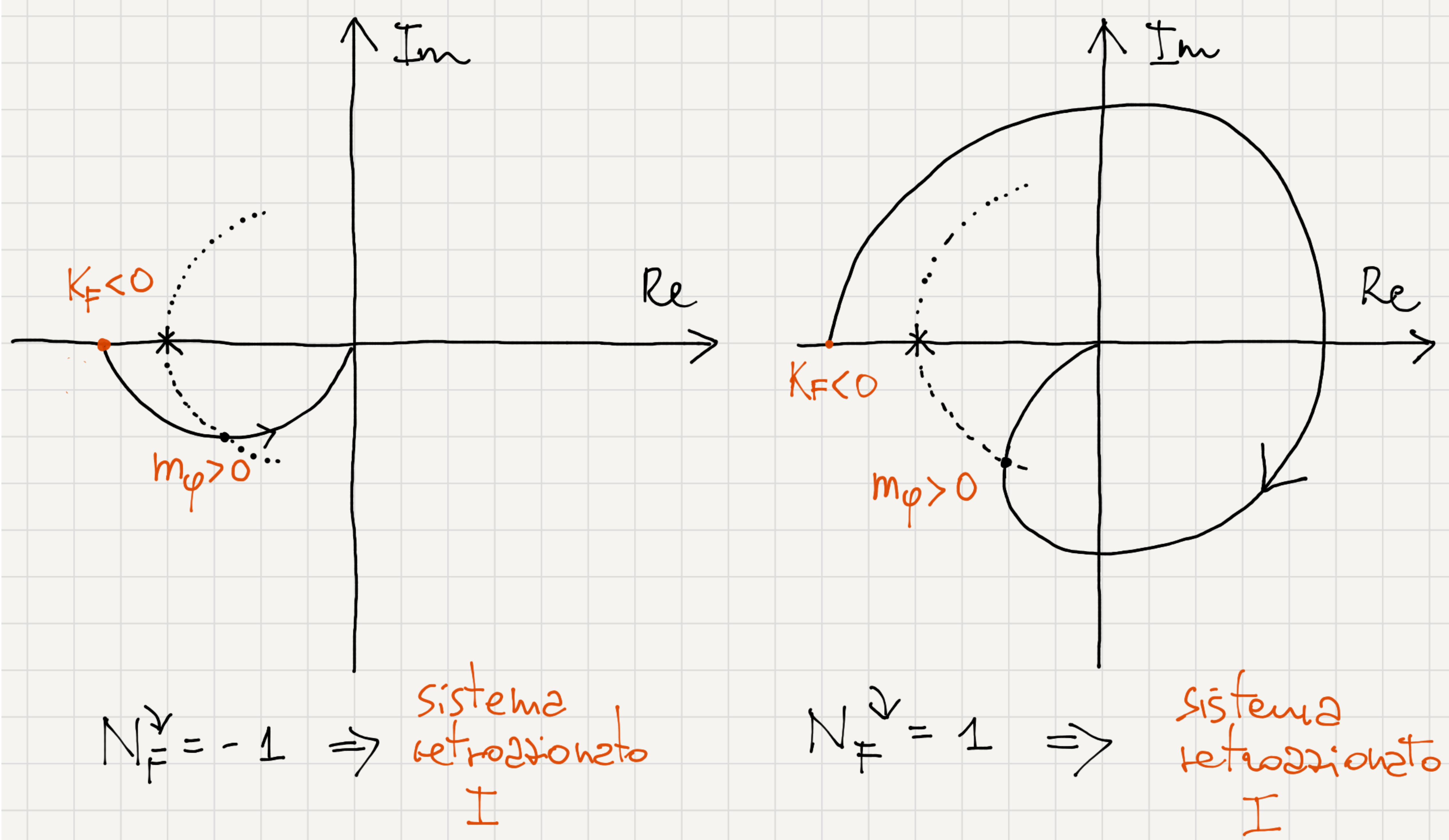
- anche nei sistemi a stabilità condizionata, m_φ caratterizza la robustezza della stabilità rispetto a variazioni della fase purché sia definito univocamente; se $m_\varphi < 0$, il sistema retroazionato è I
- m_g è invece strutturalmente ambiguo

Criterio di Bode (CdB)

Si assumano vere le hyp 1 e 2. Inoltre, si assuma che $n_F^+ = 0$ e che m_φ sia definito univocamente. In questo caso, il sistema retroazionato è AS se e solo se

a. $m_\varphi > 0$
b. $k_F > 0$

- il CdB è una conseguenza diretta del CdN per il caso $n_F^+ = 0$
- consente di giudicare la stabilità del sistema retroazionato direttamente dai ddB (uso nel progetto in frequenza)
- la condizione $k_F > 0$ è necessaria per evitare situazioni del tipo…


Im
Re
$K_F<0$
$m_\varphi>0$
$N_F^{\circlearrowright} = -1 \Rightarrow$ sistema retroazionato I
Im
Re
$K_F<0$
$m_\varphi>0$
$N_F^{\circlearrowright} = 1 \Rightarrow$ sistema retroazionato I